UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA III
(POLÍTICA ECONÓMICA)

TESIS DOCTORAL

Capital humano, tasa de retorno y políticas educativas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Alberto Soler Vera

DIRECTOR

Ramón Febrero Devesa

Madrid, 2017

CAPITAL HUMANO, TASA DE RETORNO Y POLÍTICAS EDUCATIVAS

Autor: Alberto Soler Vera

Director: Ramón Febrero Devesa

Departamento de Economía Aplicada III - Facultad de CCEE (UCM)

ÍNDICE

La presente tesis se estructura en tres bloques. En el primero de ellos, que comprende los capítulos 2 y 3, se pasa revista a las principales corrientes de modelización del capital humano desde los años 60, tanto en el ámbito de equilibrio parcial como en el contexto de modelos de equilibrio general dinámico. Este análisis se realiza desde la óptica de los planteamientos de raíz beckeriana, de modo que partiendo de un modelo canónico construido tanto a partir de las aportaciones de este autor como de las de Yoram Ben-Porath, se contemplan las sucesivas aportaciones como adiciones o modificaciones de los supuestos básicos de dicho modelo. La formalización del concepto de capital humano ha venido marcada por su triple condición de bien de activo real, output de un proceso productivo realizado bien el seno del hogar, bien por un sector especializado, a partir de inputs adquiridos en el mercado y del propio tiempo disponible, así como de consumo duradero. En el segundo bloque, desarrollado en el capítulo 4, se aborda el concepto de tasa de retorno del capital humano. Este concepto, desarrollado primordialmente por la literatura empírica de un modo intuitivo, ha sido abordado en raras ocasiones en el marco de modelos dinámicos, tanto de corte macro como microeconómico, siendo la principal razón la dificultad de modelizar la valoración de un activo que no pasa por el mercado. En este trabajo se opta por combinar el enfoque de asignación óptima del tiempo de Gary S. Becker con el de producción óptima de capital humano de Ben-Porath para construir un modelo básico en el que se apoya la formulación de la tasa de retorno que, frente a la de otros activos, presenta la peculiaridad de venir definida en términos de costes de producción variables, que solo bajo circunstancias muy concretas son equivalentes a precios de mercado de los inputs utilizados. La tasa de retorno bruta marginal resultante, derivada a partir de las condiciones de primer orden de optimización de la utilidad de un consumidor representativo, posee bajo hipótesis estándar una estructura similar a la de otros activos, viniendo dada por por la suma de una renta marginal y ganancias de capital en función de la variación intertemporal de los costes marginales de producción. Por lo demás, se formula la tasa en distintos escenarios y en combinación con diferentes activos reales, lo que permite realizar matizaciones sobre el contenido y la dependencia de la tasa respecto al vector de parámetros que lo condicionan. Por lo demás, la tasa se deriva para dos períodos o un número superior, para todo tipo de rendimientos del capital humano en la función de producción del mismo y considerando dos inputs diferentes, tiempo de aprendizaje (o, equivalentemente, de producción del capital humano) y bien final, estableciéndose una relación entre sus propiedades básicas y la dinámica del modelo. El tercer bloque de la tesis se compone de los capítulos 5 y 6 y estudia el papel del capital humano en la consecución de la movilidad social e intergeneracional, así como las principales limitaciones endógenas y exógenas que pueden encontrarse en un problema típico de agentes heterogéneos y que restringen la plena convergencia de rentas. En relación con este problema, se realiza primero una revisión de la literatura sobre las principales vías de intervención pública para mitigar la importancia de estas restricciones, tanto en el campo de los impuestos y subvenciones como de la provisión y, en su caso, producción de servicios educativos, así como los condicionantes de la eficacia relativa de dichos instrumentos. Dada la heterogeneidad de supuestos que caracteriza este tipo de literatura, el capítulo 6 ofrece un marco común de análisis comparativo de los efectos de estas intervenciones sobre el eficiencia, el crecimiento y la movilidad social. Dicho marco anida distintos grados de altruismo intergeneracional y efectos de entorno en el proceso educativo y, consecuentemente, genera distintos resultados en cuanto a la optimalidad de unos u otros instrumentos en función de cuál sea la combinación de hipotesis empleadas.

Summary of the thesis

This thesis is structured in three blocs. The first one of them, that comprises chapters 2 and 3, revises the main modeling streams of human capital eversince the 60s, both in partial and in general dynamic equilibrium. This analysis is made from a Beckerian perspective; in this vein, taking as a starting point a canonical model integrated by the early contributions of the latter author and Yoram Ben-Porath, the succesive views of other researchers are studied as extensions or modifications in the basic assumptions of the benchmark model. Thus it can be shown that the formalisation of the concept of human capital has been deeply influenced by its triple condition of a real asset, output of a productive process organised domestically or by a different specialised sector -who, in turn, purchases inputs in the market and also uses time-, as well as a durable. The second bloc, developed in chapter 4, deals with the notion of rate of return of the human capital. This concept, tackled primarily by the empirical literature in an intuitive fashion, has been rarely treated within the framework of dynamic models -either macro or microeconomic-, the main reason being the difficulty of pricing an asset which is not directly exchanged in the market. In this work, the approach departs from a canonical model constructed by merging an optimal allocation of time scheme with a minimization of costs in the production of human capital. Compared to that of other assets, the marginal rate of return of human capital is peculiar since it is defined in terms of its marginal production costs which, only under very specific circumstances, are equivalent to the market prices of the inputs applied to the production function. The rate of return is derived from a utility maximization problem of a representative household and presents, under standard hypothesis, a similar structure to the one observed for other assets, i.e., it can be expressed as the sum of two elements, a marginal income and capital gains, the latter being given by the intertemporal increase in the marginal production costs. Addtionally, this rate of return is developed for different scenarios and combinations of real and financial assets, which allows to nuance its content in each case, as well as its sensitivity with respect to the parameters that define it. Besides, the rate of return is constructed for 2 or more periods, for all kind of returns of escale of human capital in the education function and considering two inputs, learning time and the final consumption good; finally, some useful relations between the properties and the rate and the dynamic properties of the models that encapsulate it are established. The third bloc covers chapters 5 and 6 and analyses the role of human capital in the attainment of intergenerational and social mobility, as well as the main exogenous and endogenous constraints in an heterogenous agents problem that prevent a full income convergence from materialising. Regarding this issue, the chapter 5 begins with a revision of the literature on the main government´s tools to mitigate the importance of these constraints, both in the field of taxes/subsidies and the area of provision -and eventually, production- of public services, as well as the basic conditionants of the relative effectiveness of the former. Given

the heterogeinity of assumptions that plagues this literature, chapter 6 provides a common framework for the comparative analysis of the effects of these instruments on efficiency, growth and social mobility. Such framework nests different degrees of parental altruism and peer effects in the education process and, consequently, generates different outcomes concerning the optimality of the instruments depending on the combination of selected assumptions.

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento al profesor Ramón Febrero, por tantas cosas de valor incalculable.

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de capital humano y sus implicaciones, que han constituido una de las aportaciones clave de la economía neoclásica a la Teoría Económica moderna, hizo su entrada en escena en el año 1945 de un modo casi imperceptible. Fue en la introducción a *Income From Independent Professions* donde Milton Friedman y Simon Kuznets, sin utilizar todavía el concepto capital humano, expusieron las grandes líneas de su noción de distribución de la renta que, sorprendemente, constituye un magnífico resumen de algunos de los principales hallazgos de la Teoría del Capital Humano durante los siguientes 70 años. En grandes trazos, las diferencias observadas en la renta entre individuos responden a dos grandes categorías de factores: la capacidad y la voluntad de asunción de riesgos. La consideración de la capacidad como fuente de riqueza para los individuos no era nueva. Adam Smith en The Wealth of Nations incluía en la definición de riqueza nacional el conjunto de habilidades, innatas o adquiridas de sus habitantes. En esta misma línea, para Friedman y Kuznets el concepto de capacidad se entiende también en sentido amplio, comprendiendo tanto la innata como la reforzada mediante la educación recibida en diferentes fases de la vida, y designando el conjunto de habilidades y la condición física de los individuos para desempeñar un trabajo que, como tal, es susceptible de generar un flujo de rentas -detrás de esta idea, pues, subyacía ya la idea de dicha capacidad como activo-. El segundo factor que determina las diferencias entre salarios refleja la heterogeneidad en la predisposición de los individuos a aceptar trabajos penosos o que conllevan una especial dificultad en su desempeño, con el consiguiente riesgo sobre la corriente de rentas a que da lugar el contrato laboral. Respecto al primero de estos factores, la capacidad, se adquiere tanto por el concurso de los padres durante los primeros años de vida del individuo, por sus propias decisiones, por aportaciones filantrópicas de otros agentes y, cada vez con mayor frecuencia, por la acción educativa del Estado. La combinación de todas estas fuentes de financiación no puede evitar en ciertos casos, bien por insuficiencia de las rentas familiares o por escasez de financiación externa, que el individuo vea restringido su acceso a la educación a un nivel inferior al que demandaría en ausencia de tales limitaciones. No obstante, si bien la movilidad entre profesiones a veces está consetreñida por fricciones como las mencionadas, la movilidad intraprofesional constituye un paliativo que, a largo plazo, aproxima en mayor medida los salarios a las características innatas del individuo. Esta visión de la distribución de la renta se desarrollaría en otro artículo de Friedman, *Choice, Chance and the Personal Distribution of Income*, de 1953.

En 1956 Friedman utiliza por primera vez el término capital humano en *The Quantity Theory - A restatement,* como elemento del vector de variables que determinan la demanda de dinero. En efecto, si bien esta última se encuentra conformada por los rendimientos reales relativos de una serie de activos financieros y reales, también se encuentra influida por la proporción deseada entre riqueza humana y financiera, correspondiendo la primera de ellas al conjunto de capacidades individuales que se había identificado como fuente de rendimientos pecuniarios en la obra de 1945. A diferencia de otros activos, sin embargo, Friedman renuncia a formular el retorno de la riqueza humana, ya que en una sociedad sin esclavitud esta no se comercializa en el mercado y no lleva asociada un precio; en su lugar, se conjetura la existencia de una ratio entre riqueza humana y financiera que se mantiene constante a largo plazo. Este sería el comienzo de una relación elusiva entre la Teoría del Capital Humano y la definición de la tasa de retorno del activo, que ha perdurado durante la práctica totalidad de su evolución.

El año 1958 marcó el nacimiento de la Teoría del Capital Humano en sentido estricto, con *Investment in Human Capital and Personal Income Distribution* de Jacob Mincer, donde se dota por primera vez de corporeidad analítica el valor de la inversión en capacidad como uno de los motores de diferencias en las rentas según la visión de Friedman. De acuerdo con Mincer, aquel corresponde al valor descontado de los salarios de los individuos que reciben entrenamiento a lo largo de su vida profesional. Este sería el punto de partida de su función salarial. En 1960 Gary S. Becker publica su *Underinvestment in College Education? ,* en el que anticipa cualitativamente los principales elementos de la tasa de retorno, que desarrollaría de un modo completo en *Investment in Human Capital: A Theoretical Analysis*, de 1962; a diferencia de Mincer, el problema de inversión se formulaba de una forma más completa, al hacer referencia a los costes de inversión en forma de ganancias sacrificadas durante el tiempo de formación y así se avanzaba decisivamente en la definición de todos los elementos relevantes de la tasa de retorno, privada y social. Por su parte Theodore W. Schultz, en 3 artículos publicados entre 1960 y 1962, reflexionaba premonitoriamente sobre algunos interrogantes que marcarían el desarrollo de la Teoría -en algún sentido, todavia no resueltos-, como la dificultad de estimar el valor de la inversión a través de los costes imputados a la producción del activo -en la medida en que en ocasiones dichos costes responden tanto a la voluntad de invertir como a la de consumir, cuando ciertas dimensiones del activo forman parte también de las preferencias de los individuos-, o la valoración de la opción de acceso a nueva educación futura que posibilita la adquisición de formación en el presente. A comienzos de los años 60, los principales hilos conductores de la Teoría del Capital Humano estaban ya tendidos, restaba solamente formalizarlos en un modelo intertemporal que endogeneizara las decisiones de inversión.

El presente trabajo, que inicia su cobertura histórica de mediados de los 60, pretende alcanzar principalmente 3 objetivos. El primero de ellos, cubierto por los capítulos 2 y 3, ofrecer una panorámica desde una perspectiva beckeriana de la evolución de las principales líneas de modelización dentro de la Teoría del Capital Humano. Para ello se han separado los ámbitos de equilibrio parcial y equilibrio general, en la medida en que las direcciones tomadas por la literatura en cada uno de ellos han sido claramente distintas, aun partiendo de un tronco conceptual común y contando los modelos de equilibrio general con una fundamentación microeconómica rigurosa. Se trataría, por tanto, de un ejercicio a medio camino entre la Historia y la Teoría Económica, por cuanto que cubre la evolución del pensamiento en un área clave de la economía durante unos 50 años pero, al mismo tiempo, persigue realizar una anatomía detallada de la articulación analítica de las principales aportaciones que han protagonizado su devenir. El contenido de estos capítulos no es, pues, una simple revisión del estado de la cuestión, sino una búsqueda de la huella de Becker a lo largo de varias generaciones de autores que, pretendidamente o no, han desarrollado y profundizado su legado hasta convertirlo en una de las ramas más ricas, fascinantes y polivalentes de la Teoría Económica moderna.

El segundo objetivo se refiere al desarrollo de un concepto latente a lo largo de toda la Teoría del Capital Humano, como es la tasa de retorno financiera de este activo. Desde el mismo arranque de esta disciplina, como se anticipó unos párrafos más arriba, se aprecian dos enfoques diferentes en su tratamiento: El primera de ellos, en un sentido cronológico, es una línea esencialmente empirista, que arranca con los trabajos de Mincer de 1958 y que deriva una función salarial (a partir de la que puede obtenerse indirectamente la tasa) a partir de supuestos ad-hoc y persigue, fundamentalmente, la contrastabilidad empírica de dicha función aun sacrificando rigurosidad conceptual. La segunda, inaugurada por el propio Becker en su trabajo de 1962, deriva la tasa a partir de la igualdad de beneficios y costes marginales obtenidas -y aquí radica la originalidad y la grandeza del trabajo- de un modo puramente intuitivo, sin explicitar un modelo dinámico a partir del cual puedan desarrollarse condiciones de primer orden. A partir de este momento, la tasa de retorno en la variante coste-beneficio de Becker tiene un tratamiento muy desigual y no recibe una atención sustantiva prácticamente hasta finales de los años 80, momento en el que el desarrollo de los primeros modelos neoclásicos de crecimiento con acumulación de capital humano permiten estructurar la resolución de los programas dinámicos de un modo tal que se perfila con claridad la existencia de una tasa que, en su versión más simple, coincide en esencia con la propuesta por Becker en 1962 e incluso presenta algunos puntos en común con las propuestas de Mincer. Sin embargo, el tratamiento de la tasa a partir de este momento es asistemático y algunos puntos esenciales en la construcción de la tasa no se han abordado directamente, como el hecho de que este activo no es objeto de transacciones en el mercado y, consiguientemente, no tiene un precio de equilibrio asociado. Por estas razones no se ha realizado hasta el momento una reflexión en profundidad sobre la taxonomía de la tasa de retorno, los supuestos de modelización que permiten su existencia, sus propiedades básicas o la relación con otras tasas de activos reales diferentes del capital físico. Este trabajo, en su capítulo 4, realiza una exploración de estas cuestiones. Dicho recorrido, de carácter analítico, es complementario a los capítulos 2 y 3 ya que, partiendo de un modelo dinámico canónico, permite ir efectuando sucesivas extensiones y variaciones en los parámetros del mismo que dan lugar a las diferentes líneas de modelización estudiadas en aquellos: se trata, por tanto, de una vía alternativa de reconstruir los principales elementos de la Teoría del Capital Humano, solo que desde un ángulo muy particular.

El tercer objetivo se centra en una de las áreas de aplicación más fértiles de la Teoria del Capital Humano: el estudio de los límites a la movilidad social que los modelos de capital humano, en sus distintas variantes, reflejan, así como la evaluación de la conveniencia de posibles vías de intervención pública para hacer más fluida dicha movilidad, de modo que esta última se vea afectada en la menor medida posible por las fricciones de los mercados. Al margen de este problema, la heterogeneidad de características de los individuos constituye un límite natural a la convergencia de rentas en una sociedad libre, por lo que el papel del sistema educativo en su reducción es también fundamental a la hora de garantizar la igualdad de oportunidades: en este sentido eficacia y financiación de las políticas educativas son dos variables que deben combinarse óptimamente para mitigar la desigualdad a largo plazo de un modo socialmente eficiente, dado que otro tipo de enfoques basados en el estímulo a la demanda no corrigen la raíz de los problemas referidos y generan inestabilidad económica, aparte de tener límites muy evidentes a medio y largo plazo dados por la racionalidad de los agentes y su capacidad de anticipación. Los capítulos 5 y 6 se ocupan precisamente de estas cuestiones, teniendo como meta principal el establecimiento de las condiciones bajo las cuales la intervención pública puede generar ganancias de eficiencia y, al tiempo, mitigar la desigualdad generada por las trayectorias de acumulación divergente de capital humano cuando estas obedecen a factores distintos a la voluntad y/o la capacidad de los individuos. En el primero de ellos, se lleva a cabo una revisión de las principales conclusiones de la literatura de capital humano en este ámbito , especialmente centrada en el período que transcurre desde comienzos de los años 90 hasta la actualidad, en el que se generalizan los modelos de generaciones solapadas como instrumento de análisis distributivo de la acumulación de este activo y las políticas que inciden sobre la misma. En el segundo, se formula un modelo de crecimiento endógeno con heterogeneidad de individuos basada en distintos factores y se analizan comparativamente, bajo distintas combinaciones de supuestos tecnológicos y de preferencias, las consecuencias en eficiencia y promoción de la movilidad social de un conjunto de políticas públicas, que van desde el mero establecimiento de subvenciones educativas hasta la producción de servicios educativos a través de escuelas públicas, pasando por sistemas mixtos que dan cabida a las preferencias privadas mediante cupones escolares.

II. ESTRATEGIA MODELIZADORA DEL CAPITAL HUMANO EN EQUILIBRIO PARCIAL.

II.1. La construcción del modelo básico. Capital humano y ciclo vital.

Tras las primeras aportaciones al concepto de capital humano, esencialmente descriptivas, surgidas durante los años 50 y primeros años 60, la modelización del capital humano se bifurcó desde bien temprano en dos direcciones, que trataron de insertarlo alternativamente en un contexto de equilibrio parcial o equilibrio 12general. En este capítulo nos ocuparemos de la primera de ellas.

La contibución de Gary.S.Becker, inicialmente concebida en un entorno de equilibrio parcial (aunque extendida durante la segunda mitad de su carrera al equilibrio general) ejerce una influencia formidable en la práctica totalidad de la literatura posterior, cualquiera que fuera su orientación y objetivos. La base de la misma se sienta en dos artículos de 1962 y 1965, Investment in Human Capital: *A Theoretical Analysis y A Theory of the Allocation of Time.* De ellas, el primero se corresponde con una derivación intuitiva de las tasas de retorno de este activo en diferentes situaciones, aunque sin mediar una modelización explícita que permita endogeneizar dichas tasas en equilibrio. Nos referiremos con posterioridad a dicho trabajo y comenzaremos por el segundo, que constituye el marco esencial en el que más tarde se incardinaría la teoría beckeriana de inversión en capital humano.

La clave de la teoría intertemporal de consumo de *Allocation of Time* es la noción del tiempo como bien escaso y que cumple una función de input en la producción de distintos bienes de consumo, sujeto, como el resto de los inputs, a un coste de uso que en este caso viene dado por un coste de oportunidad (tiempo retribuido en el mercado de trabajo a una tasa salarial w). Este tiempo aplicado a la producción doméstica de bienes que generan satisfacción se englobaría dentro de la categoría genérica de “ocio”, sin que por ello quepa asociar este término al de inactividad. En todo caso, ocio denominaría aquella parte del tiempo no destinado a la producción de mercado.

De este modo, la función de utilidad del individuo se construye a partir de un conjunto de bienes o “commodities” que el propio consumidor produce combinando inputs de mercado y no mercado a partir de tecnologías más o menos complejas, en régimen de autoproducción. Así, denominando C_i a cada una de estas commodities, cada una de ellas se producirá a partir de un vector x de inputs de mercado y de una fracción del tiempo disponible en cada período s, de suerte que:

$$C_s^i = C_i\left(x_s, n_s^i\right) \text{ (2.1)}$$

$$U = U\left(C_s^1,...C_s^J\right) \equiv U\left(x_s, n_s\right) \text{ (2.2)}$$

Si además normalizamos a 1 la cantidad de tiempo disponible por período y denotamos por n^w la fracción de tiempo destinada al trabajo, entonces se verificará directamente la siguiente igualdad período a período:

$$\sum_{i=1}^{J} n_s^i = 1 - n_s^w \text{ (2.3)}$$

La maximización de la anterior función de utilidad deberá someterse a las restricciones de disponibilidad de tiempo anterior, así como a la restricción presupuestaria que rige en el período y que adoptará la siguiente forma, suponiendo que los ingresos de la economía doméstica procedan exclusivamente del trabajo y que p denotan los precios de mercado de los inputs que intervienen en la producción de las commodities:

$$\sum_{i=1}^{J} p_s^i x_s^i + \sum_{i=1}^{J} n_s^i w_s = w_s \text{ (2.4)}$$

Equivalentemente, si la tecnología de producción de las commodities es tal que permita establecer coeficientes fijos entre los inputs y aquellas, la restricción reviste la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{J} \left(\overline{x}_s^i p_s^i + \overline{n}_s^i w_s\right) C_s^i = w_s \text{ (2.5)}$$

En la última expresión, $\overline{x}, \overline{n}$ son los coeficientes técnicos de inputs de mercado y tiempo, respectivamente. En cualquiera de sus dos formulaciones, las dos restricciones presupuestarias ponen de manifiesto que la renta total, derivada de la aplicación del tiempo total disponible al trabajo, presenta dos tipos de usos: los directos, asociados a la adquisición de inputs a precios de mercado para la producción de la commodity, así como los indirectos, al soportar el tiempo destinado a esta última un coste de oportunidad en términos de salario no percibido.

Partiendo de este marco general, Ben Porath (1967) modeliza[1] por primera vez dentro de un esquema intertemporal de equilibrio parcial la acumulación de capital humano. Su

---

[1] Se recorrerán los principales aspectos del modelo de Yoram Ben Porath trasladándolos a tiempo discreto, ya que la formulación original del modelo se realizó en tiempo continuo.

modelo, que tendrá una importancia esencial dentro de la Teoría del Capital Humano. se compone de los siguientes elementos:

i) El activo capital humano propiamente dicho al comienzo de un período, que denotaremos por a_s^h y que se mide en sus propias unidades. No se impone una cota al valor del activo, aunque al servir de input en la función de producción de bienes de consumo se supone deberá ser no negativo. Cada período se produce una cierta cantidad del activo, coincidiendo esta producción con la inversión neta en las propias unidades del activo, y además está sujeto a una tasa de depreciación constante δ^h . Estos dos elementos permiten desarrollar una ecuación de acumulación del activo análoga a la utilizada para el capital productivo en los modelos de crecimiento neoclásico como la siguiente, que se convertirá en un elemento fijo en la literatura posterior:

$$a_{s+1}^h = i_s^h + \left(1-\delta^h\right)a_s^h \quad (2.6)$$

ii) El tiempo del período se asigna por el consumidor entre trabajo[2] (contribuyendo a la producción de bienes de consumo) y producción de capital humano en régimen doméstico. Este último uso del tiempo se denominará aprendizaje, con independencia de cual seal el entorno en el que se produce. Prosiguiendo con nuestra táctica de normalización del tiempo por período, las dos fracciones serán las siguientes:

$$1 = n_s^h + n_s^w \quad (2.7)$$

iii) La máxima renta alcanzable por el individuo en cada período de su vida será proporcional al stock de capital humano disponible. Por lo tanto, las diferencias en las rentas salariales máximas vendrán explicadas solamente por la diferencia en los stocks de capital acumulados, mientras que las diferencias en las rentas salariales efectivas podrán explicarse también por la diferencia fracción de tiempo dedicada al trabajo y al aprendizaje. Mincer (1958) ha yabía reflexionado sobre este punto, concluyendo que la diferencia entre los salarios de dos oferentes de trabajo con diferentes niveles de aptitud debía ser proporcional y no aditiva. La razón última de este resultado era, bajo el supuesto de un ciclo vital dividido en una fase de aprendizaje y otra de trabajo, que el valor actualizado de la

[2] Ben-Porath habla de fracciones del capital humano utilizadas en la producción doméstica o de mercado. Trasladar este concepto a fracciones de tiempo no solamente encaja mejor en un universo beckeriano, a la luz de la teoría de asignación del tiempo, sino que es lógico teniendo presente la imposibilidad tecnológica que caracteriza a este modelo de simultanear la acumulación de capital humano y la prestación de servicios de mercado por medio del mismo, al estar ausentes los procesos de learning-by-doing. La inmensa mayoría de los ejemplos analizados en la literatura son coherentes con esta dicotomía.

renta laboral ligada a n años de entrenamiento era igual al salario percibido a lo largo de los años de trabajo, constante, multiplicado por una constante en la que intervenía el tipo de interés e igual a la suma de los términos de una progresión geométrica. Por lo tanto, el cociente entre los salarios vinculados a trabajadores con que han cursado períodos de aprendizaje de diferente duración será también una constante que depende de la diferencia en la longitud de dichos períodos y de los factores de descuento de los flujos.

Esta proporcionalidad también es asumible desde el punto de vista del problema de optimización del beneficio de la empresa. Supongamos una función de producción del bien de consumo dependiente de dos factores, capital físico (o "máquinas", para simplificar) e input trabajo efectivo L, dado tanto por el stock de capital humano acumulado por el individuo como por la fracción de tiempo dedicada al trabajo "de mercado". En este caso el beneficio viene dado por la siguiente expresión:

$$B = F(K_s, L_s) - w_s n_s^w - q_s K_s \quad (2.8)$$

En ella, ro es la tasa de alquiler por período del capital físico. Si denominamos e al salario por hora por unidad de capital humano, la anterior ecuación puede reescribirse como:

$$B = F\left(K_s, a_s^h n_s^w\right) - e_s a_s^h n_s^w - q_s K_s \quad (2.9)$$

La condición de primer orden respecto a la demanda de tiempo de trabajo, que supondremos estrictamente mayor que cero, implica una proporcionalidad entre el salario w y el stock de capital humano acumulado una vez evaluada la función de producción F en los valores de equilibrio, ya que:

$$\frac{\partial B_s}{\partial n_s^w} = F_{Ls} a_s^h - e_s a_s^h = 0;$$

$$w_s = e_s a_s^h$$

Si denominamos $\overline{e}$ al salario por unidad de capital humano una vez evaluada la función de producción en sus valores de equilibrio, en efecto la máxima renta laboral alcanzable -esto es, suponiendo la aplicación íntegra del tiempo disponible en el período a trabajo- vendrá dada por el producto $\overline{e} a_s^h$. Sin embargo, Ben Porath considera el término de proporcionalidad constante entre períodos, lo que no tendría por qué suceder fuera de un equilibrio estacionario salvo que la productividad marginal de F respecto al trabajo efectivo sea una constante. Por tanto esta es una simplificación que deja abiertos ciertos interrogantes y que procede de una falta de modelización completa del sector de producción.

iv) Por primera vez en la literatura Ben-Porath formaliza la función de acumulación de capital humano. Así, emplea en su artículo una función Cobb-Douglas de rendimientos decrecientes tanto en cada uno de los inputs como en el conjunto de los dos inputs, que esta puede representarse de la siguiente forma:

$$i_s^h = B\left(n_s^h a_s^h\right)^{\varepsilon}\left(x_x^h\right)^{\eta}; \varepsilon, \eta < 1; \varepsilon + \eta < 1 \quad (2.10)$$

Esto es, la producción de capital humano dependerá del trabajo efectivo aplicado a esta tarea así como de la aplicación de un input genérico de mercado. Obsérvese que una especificación de este tipo implica que, dado un stock de capital humano existente al comienzo del período s, la única forma de incrementar el trabajo efectivo aplicado a la inversión en capital humano será un incremento de la fracción de tiempo destinada al aprendizaje (o el grado de utilización del activo en este uso, dicho de otra forma). Sin embargo, entre períodos será posible también aumentar el trabajo efectivo vía acumulación de stock, dado un cierto grado de utilización en dicho uso[3]. Es importante también notar que los rendimientos de ambos factores productivos son decrecientes; en este sentido la introducción de los modelos de crecimiento en equilibrio general, con horizontes infinitos, despertarán interés por la utilización de otro tipo de rendimientos capaces de proporcionar resultados más próximos a la evidencia empírica a medio y largo plazo; la primera generación de modelos de equilibrio parcial de los años 70, no obstante, extiende sus preocupaciones solamente hasta el final de la vida del individuo, por lo que percibe como natural que los stocks de capital humano presenten un máximo a lo largo de aquella.

v) Por último, Ben Porath elude la modelización de las preferencias del individuo, formulando su problema de optimización en términos de la maximización de su riqueza intertemporal haciendo uso del teorema de separación de Fisher. Por tanto, dicho problema, entendido como la optimización a lo largo de su horizonte vital de un flujo dado en cada período por la diferencia entre los ingresos máximos laborales alcanzables y los costes de la producción en capital humano, le permite obtener los valores adecuados de los inputs aplicados y de la distribución del tiempo por usos. A su vez los costes de la inversión, formulados en términos monetarios, vendrán dados por la suma del gasto incurrido en el input de mercado más el coste de oportunidad del tiempo destinado a aprendizaje, esto es,

---

[3] El término “grado de utilización” no debe confundirse, por el hecho de que el enfoque de Ben Porath sea de equilibrio parcial, con una subutilización del activo en el conjunto de la economía. En efecto, aunque el sector productor está ausente del núcleo del modelo, el activo se utiliza totalmente por período y las variaciones en su nivel de utilización en la inversión en educación son de suma cero respecto a las variaciones experimentadas en su utilización de mercado.

$p_s^x x_s^h + e_s a_s^h n_s^h$. El supuesto implícito para que la aplicación del teorema de separación de Fisher sea posible es, aparte de un funcionamiento perfecto del mercado de capitales[4], la dependencia de la utilidad exclusivamente del consumo (y no del tiempo destinado a la producción de otras commodities). Por esta última razón el modelo de Ben Porath puede considerarse una versión simplificada por el lado de la demanda de la teoría de asignación de tiempo de Becker y, al mismo tiempo, una versión de la misma aplicada a la producción de una commodity muy especial, el capital humano.

En efecto, el capital humano en el marco de Ben-Porath es producido en un régimen análogo al de una commodity beckeriana, a partir de una combinación de inputs de mercado y de tiempo aplicado y además esta producción se realiza en el entorno del hogar. Sin embargo, a diferencia de una commodity estándar, no genera utilidad en sí mismo en este modelo; como veremos posteriormente, esta simetría con las restantes commodities se restablecerá en otras aportaciones más tardías dentro de la literatura de equilibrio parcial. Aun así, de modo indirecto el capital humano genera también utilidad y tendrá asociado un valor sombra en términos de bienestar, al ser un activo real generador de una corriente de renta la cual, a su vez, puede materializarse en bienes de consumo de los que el individuo derivará bienestar.

El problema de optimización de la riqueza del individuo se plantea en dos etapas. En una primera, se minimiza la función de costes de la inversión respecto a los inputs utilizados para cada vector de precios. Un aspecto clave de esta primera etapa es que la minimización de costes se realiza sujeta a la tecnología de producción de capital humano y, por lo tanto, a un nivel genérico de output. Las cpo, como es típico en una minimización de costes, comprenden tanto la igualdad entre los precios relativos de los inputs y la relación marginal de sustitución técnica (ver capítulo sobre tasas de retorno). La función de inversión resultante dependerá de ambos precios y de la cantidad de output lanzada, pero es independiente del stock de capital humano acumulado hasta el período s, como se pone de relieve en la siguiente cpo, en la que puede simplificarse a_s^h a izquierda y derecha:

---

[4] El valor presente de la riqueza del individuo se calcula descontándola a una tasa libre de riesgo r, lo que permite suponer la existencia de al menos un activo adicional en el modelo. El hecho de que no se formule una restricción presupuestaria flujo, sin embargo, así como la ausencia de una descripción de las características tecnológicas del sector productor de bienes de consumo, hace que dicho activo no intervenga en las ecuaciones fundamentales del modelo.

$$\frac{\varepsilon\left(n_s^h a_s^h\right)^{\varepsilon-1} a_s^h}{\eta\left(x_s^h\right)^{\eta-1}} = \frac{e a_s^h}{p_s^x} \text{ (2.11)}$$

Esta propiedad de la función de costes se cumple solamente porque el tiempo de aprendizaje y el stock de capital humano están elevados al mismo exponente dentro de la función de inversión en capital humano, aunque se pierde en el resto de los casos. La diferenciación es importante, porque supone que la función de costes marginales se vea modificada a consecuencia de la senda anterior de posiciones en el activo y, más concretamente por el stock inicial del activo del individuo.

En una segunda fase, se maximiza la riqueza como suma descontada de ingresos menos costes incurridos en cada período en la producción de capital humano respecto a la posición en capital humano deseada en cada período. Es esta concatenación la que permirá, como se verá en el capítulo siguiente sobre tasas de retorno, plantear simultáneamente cpo del problema respecto a los inputs y al output de capital humano, resultando de la combinación de unas y otras la tasa de retorno del activo. En definitiva, este problema de optimización implica en su segunda etapa la resolución de:

$$Max_{a_{s+1}^h} \sum_{s=0}^{T} R_s\left[e a_s^h - c\left(i_s^h, p_s^x, e\right)\right]$$
$$s.a: a_0^h > 0;\ a_{s+1}^h = i_s^h + \left(1-\delta\right) a_s^h \ \ (2.12)$$

La optimización se realiza a lo largo de todo el horizonte vital del individuo, aunque a este respecto implica asumir que, durante la época de la niñez, los padres adoptan el mismo criterio de maximización que el adulto una vez que comience a tomar decisiones de manera independiente. En caso contrario, la longitud del horizonte se vería reducida. El stock de capital humano inicial tendrá entonces una connotación distinta en cada uno de estos casos. Cuando s=0 se refiere al inicio de la vida del individuo, apuntará a una dotación genética de capacidades. Si no, será el legado del período de vida transcurrido por los agentes junto a sus padres. La cpo del problema en esta segunda fase permite establecer la igualdad entre el coste marginal de la producción de capital humano, creciente en la cantidad de inversión bruta acometida, y el valor sombra marginal de una unidad adicional de capital humano, igual a la corriente de ingresos salariales adicionales que este último proporciona, siendo corregido en todo período por la pérdida de valor que la depreciación ocasiona. Esto es:

$$c_{is} = \sum_{i=s}^{T} R_i e\left(1-\delta\right)^{i-s} \text{ (2.13)}$$

Por tanto, el modelo da lugar a un benefcio marginal constante respecto a la inversión bruta. Dado un salario por unidad de capital humano que se mantenga durante toda la vida, el valor sombra va disminuyendo a medida que avanza la edad; dados los rendimientos decrecientes, en todo período la inversión bruta positiva que se realiza es positiva, aunque en el período terminal al ser nulo el valor sombra de la misma esta excepcionalmente se anula. El valor óptimo de la inversión bruta será decreciente respecto al tipo de interés, creciente en la tasa de remuneración de los servicios del capital y muestra una elasticidad respecto al precio relativo de los inputs e / p_s^x igual a $\eta / (1 - \varepsilon - \eta)$.

Bajo ciertos supuestos, el coste marginal no tiene por qué ser necesariamente creciente en todo su recorrido. Por ejemplo, si la tecnología de acumulación de capital humano es Cobb-Douglas de rendimientos constantes ($\varepsilon + \eta = 1$), la elasticidad del output frente a variaciones en los precios relativos de los inputs se hace infinita y, por tanto, la función de coste marginal se hará constante hasta el punto en el que $1 = n_s^h$. A partir de él, será creciente siempre que la elasticidad de producción de los inputs distintos del tiempo sea positiva, al desaparecer la posibilidad de sustitución de un input por otro -el stock de capital humano está dado desde el comienzo del período y el tiempo disponible se ha agotado- o infinito si no existe la posibilidad de aplicar un input adicional al tiempo. Dada la elasticidad nula de los beneficios marginales respecto al output a lo largo de cada período, solo puede haber dos tipos de equilibrio en la inversión bruta óptima[5], en ambos casos esquina: i) uno en el que todo el tiempo disponible se asigne a trabajo de mercado, cuando los beneficios marginales se encuentran por debajo del tramo horizontal de los costes marginales; ii) otro en el que el todo el tiempo se dedica al trabajo doméstico, cuando el beneficio marginal corta al coste marginal en su tramo creciente. Teniendo en cuenta además el descenso del beneficio marginal a lo largo de la vida, podría pasarse del segundo equilibrio esquina al primero con el transcurso de los períodos, generándose por tanto un salto en la renta laboral desde 0 a un nivel finito que sería, bien estacionario, bien decreciente si el capital humano estuviese sometido a una depreciación positiva.

El mismo Ben Porath (1970), en un artículo que puede considerarse una prolongación del publicado tres años atrás, formula la función de acumulación de capital humano de un modo más general, sin imponer una identificación Cobb-Douglas. En concreto propone una función h homogénea de grado q, de suerte que la función de costes de inversión asociada a la producción de una determinada cantidad de capital humano viene dada por:

---

[5] Cabría añadir un tercer tipo de equiibrio, en el que el beneficio marginal se superpone al tramo horizontal del coste marginal. Sin embargo, en este el reparto del tiempo quedaría indeterminado.

$$c\left(i_s^h\right)=c(1)\left(i_s^h\right)^{1/q}=\overline{c}\left(i_s^h\right)^{1/q} \quad (2.14)$$

A esta expresión se llega al calcular la constante por la que es necesario multiplicar el vector de inputs del capital humano para llegar al vector de cantidades necesaria para producir 1 unidad del activo. En efecto:

$$\lambda^q i_s^h = 1 \Rightarrow \lambda = \left(\frac{1}{i_s^h}\right)^{1/q} \quad (2.15)$$

De donde se deduce que el factor para escalar desde los costes de producción unitarios a una cantidad dada de inversión en capital humano será el inverso de λ . En este contexto el problema de optimización de la riqueza es equivalente a la maximización de la suma descontada del siguiente excedente por período:

$$\sum_{s=0}^{T}(1+r)^s\left[y_s-c_s\right] \quad (2.16)$$

$$y_s=e\left(1-n_s^h\right)a_s^h;\ c_s=\overline{c}\left(i_s^h\right)^{1/q} \quad (2.17)$$

$$a_{s+1}^h=i_s^h+\left(1-\delta^h\right)a_s^h \quad (2.18)$$

$$i_s^h=h\left(n_s^h a_s^h, x_s^h\right) \quad (2.19)$$

En definitiva, esta redefinición del problema permitiría maximizar directamente respecto a la inversión bruta en capital humano sin necesidad de pasar previamente por las demandas de inputs, con una solución del problema en términos de las formas de las funciones de beneficios y costes marginales análogas a las de la versión básica. Esta cuestión entronca directamente con la posibilidad de imputar un precio unitario vía coste a cada unidad producida de capital humano, con independencia del total producido, lo que exige condiciones adicionales a la estructura de la función de producción del activo. Volveremos sobre este tema en el capítulo monográfico sobre tasas de retorno.

Weiss (1971) planteó una variante del modelo de Ben-Porath en el contexto de la literatura de ciclo vital en la que el horizonte del agente se divide en dos períodos, aprendizaje y trabajo. En cada uno de ellos la distribución de tiempo es exógena, aunque el individuo puede escoger la dimensión de uno y otro dentro de su horizonte vital. De este modo, si T es la duración de la vida, se cumplirá que T=H+W, siento H la duración de la etapa de aprendizaje y W la laboral. Visto desde otro ángulo, este planteamiento podría ser compatible con el de Ben-Porath si se supusiera que este último arroja equilibrios esquina a lo largo de toda la vida, con valores óptimos del trabajo nulos durante una primera etapa y valores óptimos de aprendizaje durante una segunda etapa[6]. Durante la fase laboral, la función salarial del individuo no será proporcional al capital humano, como en Ben-Porath, sino que adopta una estructura más compleja, aunque también depende positivamente del capital acumulado durante la etapa de aprendizaje (H), así como de la dotación inicial de capital humano al nacer ω , los años transcurridos de experiencia en el trabajo (existe pues, siquiera implícitamente, una posterior acumulación de capital humano vía *learning by doing),* así como de una tasa de crecimiento "natural" de los ingresos propia de cada tipo de empleo. Durante la fase de aprendizaje en sentido estricto, existirán unos ingresos netos que dependerán esencialmente de la dotación del individuo (ω) y su edad, si bien no se modeliza su procedencia (podría pensarse que constituyen la retribución a un trabajo básico en las horas residuales del sistema educativo) menos los gastos derivados de sufragar el aprendizaje. De este modo, el individuo maximizará la siguiente función -simplificada- de ingresos vitales en el período s escogiendo como variable de control la duración del período de formación:

$$y=\sum_{s=0}^{H} R_s y^h(\omega)+\sum_{s=H}^{T} R_s y^w(\omega,s-H,H,\gamma) \quad (2.20)$$

En la anterior ecuación I denotan los ingresos laborales totales, y^h los ingresos netos durante la fase de aprendizaje, y^w H la duración del período de este último, T-H (ó W la duración del período laboral y γ la tasa de crecimiento natural de los ingresos en la ocupación elegida por el individuo. Este tipo de modelización, sin embargo, no es tan completa como la línea de Ben Porath y Becker, especialmente en lo que a las características y la fundamentación microeconómica del proceso de acumulación de capital humano y no tuvo tanta repercusión en al literatura como la primera.

Lillard (1973) reflexiona sobre un punto clave en el modelo dinámico de Ben-Porath, como es la financiación de las decisiones de consumo e inversión en capital humano; este será un tema recurrente en la literatura tanto de equilibrio parcial como general, aunque

---

[6] Desde este punto de vista, el enfoque de Weiss equivaldría a suponer que durante los primeros H primeros años de vida los costes marginales de la formación, en términos del salario de mercado al que se renuncia, son inferiores a los beneficios marginales derivados del incremento de capital humano. Dado que los beneficios marginales descontados de acumular una unidad adicional de capital humano son decrecientes en el tiempo restante de vida, dado un tipo de interés de descuento, es más probable que al comienzo del horizonte vital la adopción de estas soluciones esquina constituyan soluciones óptimas para el individuo.

dentro de esta última no se expandirá de modo sustancial hasta la eclosión de los modelos OLG con capital humano durante los años 90, en conexión con la optimalidad social de la intevención estatal para financiar gastos en educación que los agentes privados, debido a imperfecciones en los mercados de crédito, pueden no proporcionar per se. En su modelo de 1967 Ben-Porath soslaya el problema de la financiación de la inversión, pero el hecho de que la función de beneficio descontado del hogar-productor utilice una tasa de descuento igual al tipo de interés de mercado parece apuntar a la ausencia de restricciones de financiación, de modo que tanto excedentes como insuficiencias de fondos en determinados períodos puedan ser financiados a la misma tasa sin restricción alguna de acceso al mercado. En cualquier caso, el hecho de no exista una formulación de la restricción presupuestaria del hogar à la Becker impide efectuar apreciaciones concluyentes sobre los activos financieros presentes en el modelo.

A la hora de considerar posibles fricciones en los mercados de crédito, Lillard sugiere dos posibles escenarios. En el primero, es imposible financiar a través del mercado de crédito tanto las decisiones de consumo como las de inversión en capital humano[7]. Esto significa desde la perspectiva de la restricción presupuestaria del hogar representativo que los ingresos en cada período deberán financiar tanto el gasto en consumo como la inversión en capital humano. La representación de la restricción utilizada por Lillard todavía no es completamente beckeriana, pero traducida a términos nuestra notación anterior sería la siguiente[8]:

$$ea_s^h \geq p_s^x x_s^h + p_s^n n_s^h + C_s \text{ [9]} \quad (2.21)$$

De este modo, se maximizaría el cash flow del individuo sujeto a esta restricción, de nuevo sin especificación de preferencias, al igual que en el modelo de Ben-Porath. En un

---

[7] El supuesto de fondo al hacer este tipo de distinción es que en el mércado de crédito la utilización del mismo es perfectamente discernible y por tanto ambos tipos de financiación son separables. Por otro lado, la actuación del hogar en ambos segmentos del mercado es asimétrica, ya que en el de crédito al consumo puede actuar tanto como prestamista como prestatario, mientras que en el de crédito destinado a la inversión solamente puede jugar el papel de prestatario.

[8] La jornada laboral como fracción del tiempo disponible puede suponerse constante.

[9] Lillard utiliza el concepto de coste de la utilización de una fracción del capital humano en la producción del mismo activo para referirse al coste de oportunidad salarial; a ese coste se alude en la ecuación mediante la variable-precio relativo p_s^n . En notación puramente beckeriana la ecuación devendría $e_s a_s^h \left(1-n_s^h\right) \geq p x_s^h + C_s$

contexto estándar de optimización de función de utilidad, como se verá en el capítulo sobre tasas de retorno, la principal consecuencia de operar en este sentido sería la igualación, para soluciones interiores de la demanda de input, entre la relación marginal de sustitución intertemporal entre consumos y la tasa de retorno del activo, que se configura como única medida del precio relativo del consumo presente en términos de consumo futuro en ausencia de un activo financiero. No obstante, la principal consecuencia de este tipo de planteamiento, bien se maximice la renta intertemporal o las preferencias, es la ruptura del teorema de separación de Fisher, de manera que incluso en un entorno de equilibrio parcial las decisiones de consumo e inversión se encuentran totalmente interrelacionadas, como muestra la forma relatada de la cpo de acumulación del capital humano[10].

Otra alternativa abordada por Lillard -y en la que verdaderamente se centra su artículo- es la existencia de fricciones diferenciales entre los mercados de crédito para financiar consumo e inversión en capital humano, de modo que la primera operación es posible sin ningún tipo de restricciones, mientras que la segunda es inviable. El recurso siquiera parcial al mercado de crédito permite expresar la maximización de los flujos de renta sujetos a dos restricciones, una común a la contribución de Ben-Porath y la otra adicional[11]:

$$\sum_{s=0}^{T} R_s \left[C_s - p_s^x x_s^h - p_s^n n_s^h \right] = \sum_{s=0}^{T} R_s \left(\overline{e} a_s^h \right) \quad (2.22)$$

$$\overline{e} a_s^h \geq p_s^x x_s^h + p_s^n n_s^h \quad (2.23)$$

Las fricciones en el mercado de crédito se utilizan para enfocar el problema de optimización desde otro punto de vista. Se supone que durante un número de años a determinar, el individuo seguirá una estrategia de especialización total, en el sentido de que dedicará íntegramente todos sus ingresos a la inversión en capital humano. Este comportamiento es lógico en tanto la cuantía de su capital humano no le permite generar unos in-

---

[10] Como se verá en los capítulos 3 y 4, en equilibrio general siempre están interrelacionadas las decisiones de consumo e inversión a través del tipo de interés, que es endógeno. En equilibrio parcial, sin embargo, es la exogeneidad del mismo y la igualdad de la pendiente de la restricción presupuestaria tanto en operaciones de préstamo como de toma de fondos la que permite hablar de separación entre aquellas.

[11] La segunda de las ecuaciones podría sustituirse por $\overline{e} a_s^h \geq p_s^x x_s^h$ si la restricción de crédito se refieresé solamente a los inputs adquiridos a través del mercado. Esta será el supuesto adoptado a partir de este momento en la exposición del modelo, en la línea del trabajo de Lillard.

gresos suficientemente elevados para financiar otros usos. Por tanto, en esta primera fase la segunda de las restricciones planteadas se verificará con un signo de igualdad estricta[12]. En la medida en que se suponga constante el precio de los inputs educativos, puede afirmarse que la adquisición de los mismos será una proporción constante del capital humano del período. A partir de un punto, sin embargo, los ingresos permitirán ir alterando la posición deudora en el mercado de crédito incluso en una senda de consumo creciente.

El punto de abandono de especialización viene dado por el stock inicial de capital humano y los restantes parámetros del problema (se aplica, al igual que Ben-Porath, una función Cobb-Douglas a la tecnología de aprendizaje), pero en general no puede expresarse como una solución cerrada. Todo lo más puede estudiarse el impacto de la variación de diferentes parámetros sobre la extensión del período de especialización. Por ejemplo, un mayor stock inicial se traduce en una desplazamiento superior de las ganancias salariales durante toda la vida laboral; además, el período de especialización finalizaría antes, al alcanzar antes el nivel de ingresos necesario para comenzar a diversificar sus gastos. También resulta de interés el análisis del impacto de un mayor parámetro de eficiencia en la tecnología educativa, puesto que este produce efectos en diferentes direcciones. Por una parte, incrementa la productividad de las inversiones realizadas, pero al mismo tiempo genera mayores incentivos a realizar mayores gastos tanto en tiempo de aprendizaje como en material educativo; el efecto neto es una prolongacion del tiempo de especialización, así como del período durante el que las ganancias netas (esto es, sueldo menos gastos de inversión) son bajas es también más amplio, aunque una vez despegan las ganancias netas se refuerzan.

La contribución de Ben-Porath resultó clave para el avance en la modelización del capital humano en modelos dinámicos de corte neoclásico. Partiendo de los elementos aportados por Ben-Porath y de la teoría de asignación óptima del tiempo de Becker se distinguen varias líneas de análisis. La que ha tenido más resonancia posterior ha sido la marcada por el trabajo de Ghez y Becker de 1975, *A Theory of the Allocation of Time and Goods Over the Life Cycle,* basada tanto en un manuscrito no publicado del propio Becker del año 1967 como en la propia tesis doctoral de Ghez de 1970 y ambos, más indirectamente, en los trabajos de Ben-Porath.

---

[12] Recordemos que puede consumirse con cargo a deuda al comienzo de la vida. En modelos con preferencias explícitas tampoco sería posible un patrón de especialización total no se observa debido a las propiedades de la función de utlidad, cuya utilidad marginal, decreciente, suele suponerse asintótica en sus dos extremos, por lo que un nivel nulo de consumo provocaría valor no acotado de su utilidad marginal.

Desde un punto de vista formal, el artículo de Becker y Ghez inserta el mecanismo de acumulacion de capital humano de Ben-Porath en un marco de optimizacion del tiempo y producción de commodities ya anticipado por el trabajo seminal de Becker (1965). Como se comentó antes, el capital humano será una commodity más, solo que no formará parte de la función de producción como tal y proporcionará satisfacción indirectamente a través de la corriente de renta que genera. De nuevo se trata estrictamente de un modelo de consumo sin consideración explícita de la producción, aunque se mantiene un vínculo latente entre ambos sectores a través de la formación salarial.

La función de utilidad del consumidor depende de nuevo del vector de commodities consumido por unidad de tiempo, con una tecnología productora de las mismas que depende de los inputs de mercado incorporados y del tiempo "de ocio" dedicado a dicha producción. La función de producción de capital humano es muy similar a la empleada por Ben Porath en sus dos artículos de 1967 y 1970, con una versión básica del modelo en la que solo que el tiempo de aprendizaje se considera un input en sí mismo (aplicando así una simetría total con la producción de las restantes commodities), de modo que el trabajo efectivo como tal no es un argumento de la función de acumulación:

$$i_s^h = h\left(n_s^h, x_s^h\right) \quad (2.24)$$

Más allá de plantear un ejercicio curioso, desde un punto de vista económico la consideración del tiempo como input, aisladamente del capital humano, tiene un escaso sentido. En la medida en que, como apuntaba Ben-Porath, el tiempo cobra sentido como fracción del capital humano utilizado en cada una de sus posibles funciones, uno y otro deben ir unidos; otra cuestión es si sujetos al mismo tipo de rendimientos. Más aún, este tipo de modelización implica establecer una asimetría entre la productividad del tiempo de trabajo dentro de la tecnología de la commodity, la de aprendizaje y la del bien de consumo. En cualquier caso y dejando de lado esta consideración, el capital humano está sujeto a una dinámica de acumulación análoga a la introducida por Ben Porath. El salario por fracción de tiempo trabajada "en el mercado" es proporcional al stock de capital humano, si bien dicha proporción se formula, ahora correctamente, como una variable que en equilibrio puede adoptar valores diferentes en cada período. El tiempo se distribuye en ocio, tiempo destinado al trabajo y tiempo de aprendizaje (que sería, en realidad, una clase especial de tiempo de ocio, en cuanto que dedicado a la producción de otra commodity):

$$1 = n_s^w + n_s^h + n_s^C \quad (2.25)$$

$$n_s^C = \sum_{i=1}^{J} n_s^i \quad (2.26)$$

Por lo demás, la restricción presupuestaria intertemporal del individuo adopta la siguiente expresión, congruente con la ampliación del conjunto de J commodities en una más (el capital humano):

$$\sum_{s=0}^{T} R_s \left(p_s^{xc} x_s^c + p_s^h x_s^h \right) = A_0 + \sum_{s=0}^{T} R_s \left(w_s n_s^w \right);\ w_s = e a_s^h \quad (2.27)$$

En la anterior restricción R es el factor de descuento de cada período y, en el miembro izquierdo, los costes de la producción doméstica se desglosan entre aquellos dirigidos a la adquisición de inputs de mercado para las commodities presentes en la función de utilidad y los del capital humano, considerando un vector completo de los primeros. La restricción intertemporal puede reformularse poniendo de manifiesto más claramente todos los costes en los que se incurre para invertir en capital humano:

$$\sum_{s=0}^{T} R_s \left(p_s^{xc} x_s^c + p_s^h x_s^h + w_s n_s^h \right) = A_0 + \sum_{s=o}^{T} R_s w_s \quad (2.28)$$

Nótese que esta restricción intertemporal sería compatible[13] con una serie de restricciones flujo como la que se reproduce más abajo, siendo b bonos con vencimiento a 1 período en los que se puede tomar una posición acreedora o deudora (dependiendo de si el individuo es prestamista o prestatario) y A_0 la posición neta en la riqueza “heredada” por el individuo al comienzo de su horizonte vital:

$$p_s^{xc} x_s^c + p_s^{xh} x_s^h + b_{s+1} = w_s n_s^w + \left(1 + r_s\right) b_s \quad (2.29)$$

Por último, la ecuación de acumulación del activo, idéntica a la empleada por Ben-Porath, puede escribirse también “hacia atrás”, esto es, descomponiendo la procedencia del capital acumulado hasta el período s por los períodos de inversión, expresión que será útil a la hora de cuantificar el beneficio marginal. Si denominamos $D_{v,s}$ a la fracción de la inversión bruta en capital humano realizada en el período s que todavía no se ha depreciado en el período s, se tendrá que $D_{v,s} = (1-\delta)^{s-v}$. Entonces el stock de capital disponible al comienzo del período s será:

$$a_s^h = a_0^h D_{1,s} + \sum_{v=0}^{s-1} i_v^h D_{v+1,s} \quad (2.30)$$

El problema a resolver consistirá por tanto en la optimización de la función de utilidad dependiente del conjunto de commodities, sujeta a: la ecuación de acumulación del capi-

[13] Esta reflexión no forma parte del artículo de Becker y Ghez, sino que es una derivación analítica a partir de éste. Este tipo de consideraciones se abordan más extensamente en el capítulo 4.

tal humano, las funciones de producción tanto de commodities como del propio capital humano y la restricción presupuestaria intertemporal. Las variables respecto a la que se realiza la optimización serían las fracciones de tiempo, los inputs adquiridos destinados a cada una de las commodities y la posición en cada uno de los activos, que se opte por incuir en el modelo, entre ellos capital humano.

Como extensión al modelo básico Becker y Ghez proponen una ampliación de las funciones de producción de las commodities, incluyendo el capital humano como un input adicional (o parte del input trabajo efectivo), de suerte que:

$$C_{is} = C_i\left(x_s^i, a_s^h, n_s^i\right), i = 1 \ldots J \quad (2.31)$$

$$i_s^h = h\left(x_s^h, a_s^h, n_s^h\right) \quad (2.32)$$

Así, el stock de capital humano pasaría a formar parte de la función de utilidad, modificándose con ello las tasas de retorno del activo. Dejando aparte este cambio, la estructura del problema de optimización sería la misma que en el modelo sin ampliar.

Esta última extensión del modelo, que en última instancia implica la existencia de una productividad positiva del capital humano tanto en las actividades de mercado como en las de no mercado (o equivalentemente, en la producción doméstica) no era enteramente original. Como sabemos Ben Porath ya había incluido el capital humano como input en la función de producción del propio activo en sus artículos de 1967 y 1970, mientras que Robert (1972) lo había hecho tanto en esta como en la tecnología de las restantes commodities. En el caso de Roberts, sin embargo, la introducción del capital humano en estas dos funciones se exogeneiza[14], frente al modelo de Becker y Ghez, en el que la propia acumulación del activo se endogeneiza.

Centrándonos en los resultados principales del modelo básico, sin capital humano en las funciones de producción o educación, (las cpo se abordan analíticamente con mayor detalle en el capítulo sobre tasas de retorno), el sistema de ecuaciones de cpo es análogo

[14] El concepto de capital humano en Robert (1972) es todavía vago. Comprendería no solamente un conjunto de habilidades o capacidades del individuo, sino cualquier variable de "entorno" que pudiera afectar su productividad doméstica, desde la estabilidad política a factores medioambientales. A pesar de que Roberts señala la posibilidad de endogeneizar la acumulación del activo, su enfoque se limita a estudiar la interacción de este input con el resto de elementos de las funciones de producción, por lo que parte de un nivel exógeno de capital humano-input que puede ser modificado también exógenamente, sin someterse a las restricciones de un proceso de acumulación de parámetros definidos.

al obtenido en un planteamiento de commodities sin capital humano; en realidad este es una commodity más. Manipulando estas condiciones, la productividad marginal de cada unidad de bien de consumo gastada en la producción de la commodity debe igualarse sea cual sea el input elegido: este resultado es una extensión de la igualdad entre relaciones marginales de sustitución técnica y precios relativos de los inputs en teoría de producción. En consecuencia, cada unidad de bien de consumo invertida (o sacrificada) en el incremento del tiempo de aprendizaje produce el mismo incremento marginal de capital humano que las destinadas a la adquisición del input de mercado. Desde un punto de vista intertemporal, el valor sombra del capital humano se igualará a la corriente descontada de pagos marginales del activo, dados por los incrementos salariales que en cada período genera la ampliación del stock en una unidad adicional. Siendo μ_s el valor sombra del capital humano, en equilibrio se cumplirán simultáneamente las tres ecuaciones relativas a esta variable:

$$\mu_s = \frac{e_s a_s^h}{h_{ns}} = \frac{p_s^x}{h_{xs}} \quad (2.33)$$

$$R_s \mu_s = \sum_{v=s+1}^{T} R_v e_v n_v^w D_{t,v-1} \quad (2.34)$$

La primera de las ecuaciones establece la igualdad entre el valor sombra del activo y los costes marginales de producción, sea cual sea el input adicional empleado en la misma. La segunda ecuación es una mera transcripción de la definición del valor sombra del activo, descontado al período inicial de planificación.

A partir de estas condiciones es posible determinar la producción óptima de capital humano como punto en que beneficios marginales se igualan a costes marginales. De acuerdo con el análisis de Becker y Ghez, los beneficios marginales, que incluyen la corriente descontada de ganancias salariales adicionales gracias a la inversión (ver ecuación superior), guardan una relación positiva con la producción de capital humano en cada período, a diferencia de Ben-Porath, que los consideraba constantes -a pesar de derivarse, en esencia, a partir de la misma condición de primer orden-.

Hay varias razones que explican esta diferencia. En primer lugar, el uso previo del problema dual en Ben-Porath para definir la función de costes reduce la optimización a un problema de selección de la posición en capital humano, ya que para cada nivel del mismo primera genera la proporción más adecuada de inputs. Este enfoque oscurece un tanto el problema, ya que no se pueden aislar con claridad los efectos futuros completos sobre la riqueza de la aplicación de una cantidad adicional de input. Por ello, cuando Ben-

Porath se refiere a beneficios marginales los entiende derivados de la ampliación de la posición en el output en una unidad, dada la función de costes.

Más allá de esta distinta aproximación al problema, otra razón fundamental de la diferencia estriba en la utilización en la cpo de relaciones funcionales entre variables que pueden derivarse solamente al resolver el sistema de ecuaciones completo y que no forman parte de las condiciones iniciales; por emplear una denominación más práctica, se trataría de una interpretación “a posteriori” de la cpo. Ghez y Becker optan por este enfoque, sustituyendo en la expresión del beneficio marginal la relación entre la senda de tiempos de trabajo de equilibrio y el capital humano, que solo puede obtenerse tras la combinación de todas las cpo. Desde este punto de vista, la clave del crecimiento respecto a la inversión bruta estriba en que, en su análisis, el tiempo de trabajo en equilibrio crece, tanto más cuanto mayor sea la producción de capital humano en el período. Este incremento se produce como resultado del predominio de un efecto sustitución sobre un efecto riqueza. En efecto, la inversión en el activo, dada una senda de horas de trabajo futuras, genera una renta adicional que implica mayor capacidad de adquisición de inputs para producir las commodities que generan utilidad; esta renta se genera no solamente en el período inmediato, sino en todo el horizonte con una persistencia que dependerá de la tasa de depreciación del activo. Pero además, el incremento de la percepción por hora trabajada inducirá un efecto sustitución desde horas aplicadas al consumo -y, en menor medida, al entrenamiento, al elevarse el coste de producción del capital humano- hacia el trabajo, elevando así el flujo de rentas marginales. El supuesto implícito en este análisis es que el efecto sustitución compensará al efecto renta subsiguiente a consecuencia del aumento de la retribución por hora trabajada. Este estaría justificado en tanto que en la fase inicial de la vida el número de horas trabajadas es todavía escaso y, en consecuencia, cabría esperar un efecto renta de pequeña cuantía; no obstante, este predominio del efecto sustitución, que se da por sentado, se trata de un apriorismo. Pero más allá de este hecho, la interpretación de la condición de beneficio marginal a posteriori para obedecer a una voluntad de dotarla de mayor contenido empírico. Como se detallará en el capítulo 4, cuando la lectura que se realiza de los beneficios marginales es apriori, que parece más adecuada para hablar de posibles equilibrios del sistema, bajo rendimientos decrecientes en el input x, si el capital humano no forma parte de la tecnología de producción del propio activo, no puede surgir cuando se hace una lectura a priori de las cpo y, por tanto, los beneficios marginales serían constantes.

Por lo que respecta al coste marginal, la curva puede tener 1 ó 2 tramos, como sucedía en el modelo de Ben-Porath. En un primer tramo el coste marginal reflejará el coste de oportunidad del trabajo de mercado, esto es el salario real, siendo o no creciente respecto al output dependiendo de si la función de inversión en capital humano es homogénea de grado 1 en sus dos inputs -en este último caso el coste sería horizontal e independiente del output producido, con un valor dado por el salario real de mercado-. Cuando el ocio formara parte la tecnología de producción de las commodities, si se supone que el tiempo de aprendizaje se realiza primero mediante detracciones al tiempo de trabajo de mercado y más tarde al de ocio, si el tiempo de formación fuera tan elevado que forzara a reducir el tiempo de ocio, entonces habría que considerar como coste de oportunidad adicionalmente la productividad del tiempo en la función de utilidad. La introducción del ocio en la función de utilidad, sin embargo, genera otros problemas en la resolución del modelo, como se verá más adelante, uno de los cuales y no menor, posible falta de unicidad de la solución de equilibrio[15]. Una característica adicional de la función de costes marginales, cuando el capital humano no se considera uno de sus inputs, es que estos últimos son path-dependent, esto es, se desplazan conforme cambia el stock de capital humano acumulado hasta el comienzo de s. Este será precisamente la razón por la que existe la comentada dependencia entre el input x aplicado en el período s y la misma variable en períodos futuros, porque a mayor x en s, los costes marginales se desplazan habia abajo al resolver el problema en los períodos posteriores.

Dado que para valores positivos de producción de capital humano el beneficio marginal es siempre superior al coste marginal, hará falta que este útimo crezca a mayor velocidad que el beneficio marginal para que en equilibrio la inversión positiva en capital humano sea positiva; con rendimientos constantes en la tecnología de aprendizaje esto solo será posible para valores nulos del tiempo de trabajo, ya que solamente una vez agotado este los costes marginales se hacen crecientes. Teniendo en cuenta este hecho, los autores consideran que la introducción de rendimientos decrecientes en los inputs del capital humano posibilita la consecución de tasas de inversión y tiempo de trabajo simultáneamente positivos.

El modelo ampliado considera funciones de producción de las commodities dependientes de ocio. Tanto en esta tecnología como en la de producción de capital humano, el

[15] Esta secuencia en la utilización del tiempo es arbitraria. Cuando el ocio forma parte de las preferencias, el esquema de beneficios y costes marginales del capital humano no es el más apropiado para estudiar la determinación de la inversión bruta óptima, principalmente porque esta no puede calcularse aisladamente de la relación marginal de sustitución entre consumo de las diferentes commodities.

propio stock del activo formaría parte del vector de inputs, aumentando la eficiencia del tiempo de producción, de modo que se tendría[16]:

$$C_s = C\left(x_s^C, n_s^C, a_s^h\right) \quad (2.35)$$

$$i_s^h = h\left(x_s^h, n_s^h, a_s^h\right) \quad (2.36)$$

De acuerdo con Ghez y Becker, el valor sombra del capital humano se forma a partir de la suma de 4 elementos:

$$\mu_s = B_{ws} + B_{Cs} + B_{hs} + B_{rs} \quad (2.37)$$

El primero de ellos concierne al efecto salarial que ya estaba presente en la versión básica del modelo. El segundo hace referencia a la reducción del coste de producción por unidad de commodity, siendo π_s el coste de producción unitario -suponiendo que sea posible la imputación de tal coste-:

$$B_{Cs} = \sum_{v=s+1}^{T} R_v \pi_v C_v \left(\frac{1}{C_v} \frac{\partial C_v}{\partial a_v^h} \right) D_{s,v-1} \quad (2.38)$$

El tercer sumando, los beneficios marginales procedentes de la presencia del capital humano del período s en su función de inversión bruta representan el ahorro de costes marginales proporcionado por una reducción del tiempo de trabajo necesario para producir una determinada cantidad de capital humano, a consecuencia de la productividad marginal cruzada positiva de ambas variables en h. Formalmente:

$$B_{hs} = \sum_{v=s+1}^{T} R_v e_v a_v^h \frac{\partial n_v^h}{\partial a_v^h} D_{s,v-1} \quad (2.39)$$

De nuevo aparece el problema comentado antes de la definición del beneficio marginal ex ante o ex post. Ex ante, el beneficio marginal se forma exclusivamente a partir de su cpo correspondiente. En ella no aparece la derivada parcial del tiempo de aprendizaje de equilibrio respecto al stock de capital humano del período. Ex post, cuando las endógenas del modelo -una vez resuelto este- se expresan en función de las exógenas en forma espacio-estado, efectivamente existe una relación entre n_v^h y a_v^h, pero no parece lo más adecuado que esta se utilice “retroactivamente” en la cpo que ya está implícitamente contenida en el sistema espacio-estado. El cuarto elemento del beneficio marginal, tal como es entendido por Becker y Ghez, presenta un problema análogo al tercero. En efecto, se añade como un sumando adicional el impacto sobre la renta del activo financi-

---

16 Si el capital humano aumentara la eficiencia del trabajo en sentido estricto, se introduciría en las tecnologías multiplicando el tiempo de producción. Becker y Ghez dejan abierta la posibilidad de que constituyan variables independientes.

ero en s (positiva o negativa) del efecto sobre el tipo de interés de equilibrio de un aumento en el capital humano:

$$B_{rs} = \sum_{v=s+1}^{T} R_v b_v \frac{\partial r_{v-1}}{\partial a_v^h} D_{s,v-1} \quad (2.40)$$

En este caso, no solamente se inserta una relación ex-post en una definición ex ante de beneficio marginal, sino que, curiosamente, se mezclan consideraciones de equilibrio parcial con general, puesto que el individuo toma como dado el tipo de interés de mercado en equilibrio general. Esta estrategia parece un tanto extemporánea, cuando el modelo no explica la endogeneización de ningún otro precio de los utilizados (por ejemplo, la retribución por unidad de capital humano). En una definición de beneficio marginal ex-ante y en equilibrio parcial, por tanto, este sumando sencillamente desaparecería.

El beneficio marginal sería ahora la suma de 3 elementos, lo que, ceteris paribus, apunta a una inversión bruta de equilibrio mayor en capital humano. Tal como es definido por Becker y Ghez, además, sería creciente en el tiempo dedicado a la producción doméstica en los períodos posteriores (en la medida en que el capital humano aparezca multiplicativamente junto al tiempo en las preferencias), por serlo la parcial de C respecto al activo y path-dependent a causa de la presencia del stock en s dentro de B_{hs} , de modo que este factor podría compensar al menos parcialmente la disminución del beneficio marginal a medida que transcurren los años. Por lo que respecta al coste marginal, perdería su path-dependency, al afectar la acumulación de capital humano en la misma proporción al coste de oportunidad que a los requerimientos unitarios del uso del tiempo de aprendizaje. No obstante, el path-dependency del beneficio marginal podría contrarrestar de algún modo la tendencia de la inversión de equilibrio a disminuir a lo largo del ciclo vital y en algún momento podría incluso hacerla aumentar, especialmente durante los primeros períodos de vida.

Con independencia de la discusión sobre las formas de beneficios y costes marginales, puede estudiarse también el patrón de acumulación de capital humano -e, indirectamente, ganancias- a lo largo del ciclo vital-. Suponiendo, para simplificar las conclusiones, que la tasa de depreciación fuera nula, el stock del activo seguiría una trayectoria monótonamente creciente, que seguirían también los salarios reales por unidad de tiempo trabajada. Por ello, los costes marginales de la producción de capital humano serían crecientes en el tiempo y sería más ventajoso para el hogar concentrar la acumulación del activo durante los primeros años de la vida. Por otro lado, cuanto más tardía sea la inversión en capital humano, menores serán los beneficios marginales ceteris paribus, al tener menos períodos hasta el final del horizonte a lo largo de los que percibir el incremento salarial. Por otra parte, conforme transcurre el tiempo se dan otros dos fenómenos: aumenta la proporción de la producción de capital humano llevada a cabo mediante input de mercado, al caer el precio relativo de estos, y se elevan las horas de trabajo, al retroceder tanto el tiempo destinado a la inversión en capital humano como el utilizado en la producción de las restantes commodities.

Cuando se relaja el supuesto de tasa de depreciación, intereses y crecimiento de la eficiencia del capital humano nulos (entendiendo por esta última la constante que vincula salario real a stock de capital humano), el perfil puede cambiar hacia el final de la vida. Por ejemplo, el stock de capital humano puede decrecer hacia el final del horizonte, a consecuencia de una inversión bruta decreciente combinada con la tasa de depreciación positiva; en cuanto a la eficiencia del capital humano, cuanto más acentuada fuera su tasa de crecimiento mayores serían también los beneficios marginales de una inversión tardía y, por tanto, más prolongada resultaría la fase de crecimiento del output de capital humano, que podría presentar un tramo creciente antes de caer. Suponiendo, para no complicar el análisis, que la eficiencia del capital humano no aumenta y la producción de capital declina continuamente, con una tasa de depreciación positiva se observaría la siguiente secuencia de acontecimientos: i) El máximo del capital humano marcaría el pico salarial; ii) Si el tiempo de consumo no sigue una tendencia en su crecimiento (esto es, el tipo de interés es igual que la tasa subjetiva de descuento) el mínimo de aquel se alcanzaría en coincidencia con el máximo de los salarios. iii) El mínimo del tiempo de aprendizaje -que con tasa de depreciación nula no existiría- se ubicaría más tarde que el máximo de los salarios. Esto se debería a que la disminución en los beneficios marginales del entrenamiento sería todavía superior a la reducción en los costes marginales y hasta que estos dos términos no se compensaran el tiempo de producción de capital humano continuaría retrocediendo. iv) El tiempo de trabajo alcanzaría un máximo y finalmente caería, ya que el aumento del tiempo de consumo pesaría más que la contracción del tiempo de aprendizaje. En los últimos estadios de la vida, por tanto, sería razonable encontrar una menor fracción de horas destinada al trabajo de mercado como resultado de una elección voluntaria.

El trabajo de Ghez y Becker fue clave en la fundamentacion microeconómica de la teoría de capital humano al fijar un marco de referencia analítico dentro del que se situarían la mayor parte de los autores posteriores. Pero no fue menos crítico por el hecho de ampliar la gama de finalidades endógenas del tiempo, más allá de las dos (formación y empleo) consideradas por Ben-Porath. Además, la introducción de ocio en las preferencias quebró la posibilidad de emplear el teorema de separación de Fisher como instrumento de análisis del problema de los agentes y, por este motivo, puso de relieve la interdependencia entre las decisiones de consumo (y, dentro de ellas, los factores que conforman las preferencias) y las de inversión, incluso en marcos de equilibrio parcial. En la estela de este trabajo se publican, durante los años siguientes, otros modelos de ciclo vital algo más complejos basados también en decisiones de asignación de tiempo entre ocio-trabajo-formación, aunque introduciendo distintos elementos ad-hoc para hacer generar distintas trayectorias vitales en función de los parámetros del modelo, desde trayectorias monótonas hasta ciclos. Precisamente con la endogeneización de los tres componentes del tiempo se buscaba reconstruir de manera detallada y relativamente realista diferentes fases dentro del ciclo vital, así como la dinámica de transición entre unas y otras. Dentro de esta línea destacan principalmente los trabajos de **Blinder y Weiss**, Ryder et al. y Heckman; la versión final de todos ellos vio la luz en 1976.

En el primero de ellos los autores proponen, en un contexto de tiempo continuo y horizonte finito, unas preferencias del individuo dependientes de la corriente de consumo que disfruta, su fracción de tiempo de ocio y el valor terminal de la riqueza real no humana al final de su vida, que se supone desaparece con él. Denominando b al activo financiero que puede acumularse, las preferencias pueden por tanto transcribirse en tiempo discreto como sigue:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^s u\left(C_s, n_s^c\right) + v\left(b_T\right) \quad (2.41)$$

La utilidad, estrictamente cóncava, posee derivadas parciales respecto a consumo y ocio con límite infinito en la asíntota de 0 para ambos argumentos, aunque para dar cabida a decisiones endógenas de retiro se excluye que la utilidad marginal del ocio pueda hacerse nula cuando se asigne a este la totalidad del tiempo disponible. El tiempo de mercado se asigna entre aprendizaje y trabajo remunerado[17]. Un supuesto clave de este modelo será el de frontera capital-ganancias, de origen esencialmente empírico y conectado con los trabajos previos de Mincer y Rosen (1972,1973), así como con la literatura de costes de ajuste en la inversión de Eisner y Strotz (1963), delimita una función de ganancias en función tanto del stock de capital humano como de su crecimiento, con derivadas parciales positiva y negativa respectivamente:

$$Y_s = F\left(a_s^h, \Gamma_a\right); \; \Gamma_a = \frac{a_{s+1}^h}{a_s^h} \quad (2.42)$$

La primera parcial es positiva, de acuerdo con las correlaciones obtenidas por Mincer y el soporte teórico proporcionado por la literatura anterior de capital humano. La segunda, sin embargo, es negativa, en la medida en que a mayor acumulación de capital

[17] No se distingue, sin embargo, entre usos del de mercado.

humano menos tiempo disponible para trabajo remunerado de mercado (y de esta forma se construye un paralelismo con la teoría de los costes de ajuste, al presentar el bien de capital una productividad estrictamente positiva solamente una vez que ha finalizado su instalación en la empresa y se ha materializado ya como stock de capital operativo). Si en la función F se fija un nivel de capital humano, la curva resultante -cóncava, por hipótesis- se denomina frontera ganancias-crecimiento, y proporciona la máxima remuneración, dada una posición alcanzada en activo humano hasta el comienzo del período s, que se puede percibir en el mercado la intensidad de la acumulación que permite una determinada actividad (la escolarización sería un ejemplo de máxima acumulación y nula actividad). Normalizando la acumulación de las distintas actividades del mercado en un intervalo comprendido entre 0 y 1, puede hacerse más operativa la elección de actividad a lo largo del ciclo vital del individuo. Véase que esta función es un sustitutivo de la endogeneización del tiempo destinado a la producción de mercado, al hacer depender de un modo ad-hoc la remuneración de la tipología de trabajo -y en última instancia, de su intensidad en tiempo de aprendizaje-. En el marco de este supuesto, las ecuaciones dinámicas de acumulación de los dos activos son las siguientes, suponiéndose ambas homogéneas de grado 1 respecto al capital humano:

$$a_{s+1}^{h} = a\left(q_{s,} 1 - n_s^c, a_s^h\right) \quad (2.43)$$

$$b_{s+1} = Y\left(a_s^h, q_s, 1 - n_s^c\right) + (1 + r_s) b_s - C_s \quad (2.44)$$

La maximización de la función de utilidad se construye sujeta a las ecuaciones de acumulación descritas y se realiza respecto a la asignación del tiempo, la tipología del trabajo y el consumo. Las cpo tienen una interpretación directa. La del tiempo de producción establece que la desutilidad marginal producida por la pérdida de ocio debe igualarse a la suma de los valores sombra de la acumulación adicional de activos tanto por mayor tiempo de aprendizaje como por mayores ingresos laborales. En cuanto a la del tipo de actividad, se igualará en módulo el valor sombra positivo de un incremento de la acumulación de capital humano con el negativo a consecuencia de una pérdida de ingresos y por tanto de acumulación del activo financiero.

Dependiendo de los valores óptimos de estas dos variables, puede hablarse de 4 fases vitales, tres en las que el trabajo productivo es positivo y una en la que es nulo (retiro). Respecto a las tres primeras, se distingue la escolarización (q=1), on-the-job training (OJT, en la que $0 < q < 1$) y trabajo en sentido estricto (q=0). Las tres que constituyen un esquilibrio esquina en alguna de las dos variables se caracterizan por una evaluación de las cpo para los valores correspondientes a cada fase. En general se hace evidente que las características de la derivada parcial que relaciona la renta laboral con la tipología de trabajo determina en gran medida la probabilidad de entrar en una u otra fase, así como la duración de las mismas. Un ejemplo clásico es la pendiente de dicha derivada en los puntos de corte con los ejes, esto es, cuando q se hace 1 o cuando toma el valor 0. Si en el primer caso la pendiente es asintótica, se excluirá un régimen de escolarización; si la pendiente es horizontal cuando q=0, será la fase laboral la que quede descartada, al generar un miembro de la cpo no acotado.

Uno de los aspectos más originales del modelo es la posibilidad de reconstruir un ciclo vital entero a partir de la dinamización de los valores sombra de las dos restricciones de acumulación de activos. En este sentido, para las combinaciones más realistas de los parámetros[18], las características del ciclo son las siguientes: i) La secuencia esperable y dinámicamente consistente es escolarización-OJT-trabajo-retiro. Esto es, una disminución progresiva de acumulación de capital humano en las distintas actividades acometidas. ii) La oferta de trabajo de mercado es creciente hasta que alcanza un pico en la fase de OJT y posteriormente es descendiente. En efecto, durante la escolarización es estrictamente decreciente, ya que la desutilidad del ocio se iguala al valor sombra del capital humano, que se incrementa gracias a la formación recibida. Simétricamente, en la fase de trabajo el valor sombra del salario disminuye con el tiempo, por lo que se eleva el tiempo de ocio. Entre ambas el máximo de la oferta de trabajo se localiza en la fase de OJT. Como producto de los perfiles de acumulación de capital humano y de las horas, la tasa de crecimiento de las ganancias alcanzará un máximo durante la fase de OJT para desacelerarse posteriormente.

Ryder, Stafford y Stephan (1976) plantean un modelo similar al anterior, aunque con dos diferencias básicas: la especificación de la función de acumulación de capital humano, en la que solamente se considera el tiempo como input, así como la exclusión de equilibrios esquina en el ocio, por medio de una utiliidad marginal de este bien asintótica cuando su valor tiende a 0. Bajo estas premisas se distinguen 4 regímenes representables en el espacio del valor sombra del capital humano y el stock del activo: una solución interior para ocio, trabajo y aprendizaje, una asignación completa al ocio, y otros dos consistentes en soluciones esquina de aprendizaje y trabajo. Aunque las fronteras entre las 4 zonas varían en función de las relaciones entre los parámetros del modelo, dando lugar a diferentes ciclos, en el caso más verosímil la solución interior se caracteriza por una dinámica con importantes semejanzas a la de Blinder y Weiss, con un crecimiento inicial de la formación y un descenso posterior y un máximo de horas trabajadas anterior al final del horizonte, a diferencia de la predicción de Ben-Porath; en torno a este máximo la rela-

---

[18] Esto es, tipo de interés de mercado superior a tasa de descuento intertemporal, con un perfil creciente de consumo a lo largo del ciclo vital.

ción consumo/tiempo de ocio, variable a lo largo del ciclo vital, también alcanzaría su máximo valor.

En la línea de los dos trabajos anteriores, **Heckman (1976)** desarrolla un modelo de ciclo vital en el que se da cabida a un número más amplio de activos, en la línea de la reflexión efectuada anteriormente. Se trata de un modelo planteado para unas especificaciones generales de la función objetivo del consumidor y su tecnología, sobre cuyos resultados canónicos se hacen después precisiones en función de clases de preferencias concretas. El enfoque es también de ciclo vital, solo que más simplificado que el de Blinder y Weiss, al no graduar el tipo de actividad en función de su intensidad en la acumulación y no considerar equilibrios esquina. Tampoco se compaña el modelo de una función de costes de ajuste en la inversión en capital humano, de suerte la inversión realizada comienza a incrementar la productividad del trabajo desde el mismo instante en que se realiza en la línea de Ben-Porath y Becker.

El modelo se basa en la simetría en el incremento de la productividad que el capital humano genera en el tiempo del individuo en cualquiera de sus usos: de esta forma las preferencias dependen tanto del consumo del bien final, como del tiempo destinado a la producción doméstica de commodities (ocio), aumentado convenientemente mediante el capital humano acumulado; dado el horizonte finito, se añade también un componente separable dependiente positivamente del legado en forma de riqueza no humana, para posibilitar la acumulación de este activo incluso en el período terminal. La función de aprendizaje depende del tiempo destinado a tal fin, aumentado también por el capital humano, así como de los inputs de mercado adquiridos. Esta función de acumulación es estrictamente cóncava en sus dos argumentos, de manera que el capital humano está sujeto a los mismos rendimientos decrecientes que cualquiera de los otros dos inputs. Finalmente, se considera un salario -igual al precio unitario de los servicios de capital humano por el stock del mismo, al igual que en la línea de Ghez y Becker y Mincer- por unidad de tiempo destinada al trabajo de mercado y se introduce un activo financiero que genera un retorno r, al igual que en Blinder y Weiss. Se supone un funcionamiento sin fricciones del mercado de crédito y el establecimiento de un tipo impositivo que grava uniformemente las rentas de trabajo y capital. La optimización del problema del consumidor se realiza respecto a los inputs utilizados en la producción de capita humano, el ocio, el consumo y la posición en el activo financiero. En suma, función objetivo, ecuación dinámica de acumulación y restricción presupuestaria son las siguientes, tomando como numerario el bien de consumo Z de las preferencias[19]:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^s u\left(Z_s, n_s^C a_s^h\right) + \Psi\left(b_{T+1}\right) \quad (2.45)$$

$$a_{s+1}^h = i_s^h\left(n_s^h a_s^h, x_s^h\right) + \left(1-\delta\right) a_s^h \quad (2.46)$$

$$Z_s + p_s^x x_s^h + b_{s+1} \leq \left(1+r_s\right) b_s + e_s a_s^h \left(1 - n_s^C - n_s^h\right) \quad (2.47)$$

El conjunto de cpo son en esencia las mismas que se obtenían en la versión ampliada del modelo de Ghez Becker, con la peculiaridad de que ahora implícitamente hay dos commodities dentro de las preferencias. La utilidad marginal del consumo de Z se iguala al valor sombra de la riqueza; la de C, multiplicada por la productividad marginal del tiempo de ocio y el stock de capital humano acumulado, al coste de oportunidad del ocio, en términos del salario de mercado. Finalmente las dos cpo referentes a los inputs del capital humano igualan su productividad a su coste de adquisición o, equivalentemente, el valor sombra del capital humano se iguala a su coste marginal de adquisición, que a su vez es el mismo cualquiera que sea el input elegido para generarlo. La ecuación que define el valor sombra del capital humano está homogéneamente expresada en términos ex ante, a diferencia de la proporcionada en Ghez y Becker, como se comentó antes. Según esta, el valor sombra del capital humano se iguala a la suma del incremento salarial gracias a la inversión en formación (girado sobre el tiempo de trabajo, es decir, el total menos el destinado a la producción doméstica y al aprendizaje) más el valor sombra futuro multiplicado por el incremento en la productividad marginal del tiempo de aprendizaje (dado un valor futuro del tiempo, aquí radica la diferencia esencial con Ghez y Becker) más el valor no depreciado del stock en el período siguiente. La simple iteración de esta condición permite expresar el valor sombra como suma descontada de los beneficios marginales en cada período futuro, à la Becker. Por último, en el período terminal el valor sombra de la riqueza se iguala la utilidad marginal de la posición en el activo financiero al final de la vida.

El conjunto de cpo y la restricción presupuestaria intertemporal permiten extraer algunas conclusiones sobre el perfil de ciertas variables endógenas a lo largo del ciclo vital. Así, cuando el tipo de interés excede la tasa de descuento temporal, tanto el consumo como el ocio en términos de eficiencia tienen un perfil ascendente cuando la utilidad es CES, incluso a pesar de la que la utilidad marginal cruzada del consumo respecto al tiempo es positiva; de hecho con unas preferencias CES el crecimiento del ocio es uni-

[19] Puede suponerse implícitamente que el tiempo de ocio contribuye a la producción de otra commodity C, que también sería un argumento de la función de utilidad.

forme para todas las edades. Cuando las preferencias son homotéticas, la relación entre consumo y ocio es inversamente proporcional al salario o precio relativo del segundo. La ausencia de pérdida de atractivo del ocio frente a otros usos del tiempo radica en la interacción multiplicativa del capital humano con el ocio en la función de utilidad, de modo que la acumulación del activo real incrementa simultáneamente la eficiencia del tiempo de trabajo remunerado y el aplicado a la producción doméstica. Este crecimiento del ocio efectivo se diferencia solamente aparentemente de las prediccones de Ghez y Becker o Blinder y Weiss, que contemplan perfiles monótonos crecientes o con un máximo en el tiempo no de ocio, ya que la comparación se realiza entre argumentos heterogéneos en la función de utilidad: en cuanto al ocio medido en unidades tiempo, en el modelo de Heckman también sigue una trayectoria decreciente en tanto el crecimiento de los salarios es más importante (en paralelo, como veremos, a la expansión del capital humano).

Por otro lado, si el precio del input de mercado es constante en el tiempo y los ambos inputs del capital humano son normales, la tasa de inversión en este activo se desacelera monotónicamente en el tiempo; si además la tasa de depreciación es nula, la concavidad de su función de producción garantiza que a lo largo de todo el horizonte vital mantendrá un crecimiento positivo, aunque su tasa de acumulación se irá moderando gradualmente. Si la tasa de depreciación es positiva, dependiendo de su magnitud el stock de capital humano aumentará monotónicamente hasta cierto punto, aunque podrá declinar a partir del mismo; en general existirá solamente un máximo en la trayectoria de acumulación. En la medida en que el crecimiento del capital humano es declinante, los salarios seguirán de cerca esta senda de acumulación (en mayor medida todavía si la tasa de depreciación no es nula) y llegará un momento en que su crecimiento se desacelere lo bastante como para justificar un progresivo incremento del tiempo de ocio. Dada la concavidad de la función de acumulación de capital humano en sus dos argumentos, el máximo de las horas no de ocio se alcanzará antes por aquellos individuos con una dotación mayor inicial de capital humano, ya que la productividad marginal de este decrecerá más rápidamente. Finalmente las ganancias crecerán monótonamente hasta alcanzar un máximo incluso cuando la tasa de depreciación es nula, debido tanto al ritmo decreciente de acumulación del activo, que tiene un reflejo en el crecimiento de los salarios, como debido al pico en las horas destinadas a la producción no doméstica.

En un artículo recopilatorio sobre las principales implicaciones empíricas de los trabajos pioneros sobre capital humano, **Mincer (1994)** subraya que todos ellos, aun enriqueciendo la aportación de Ben-Porath, supusieron al mismo tiempo un respaldo a la esencia del trabajo de este, ya que aunque con refinamientos analíticos evidentes las predicciones sobre un tramo creciente prolongado en la oferta laboral no se ven radicalmente altera-das; únicamente la consideración de tasas de depreciación del capital humano positivas y de ocio como input de la producción doméstica logran, en última instancia, alterar este perfil y generan habitualmente una disminución del trabajo remunerado en la última fase de la vida. Por otro lado, Mincer llama la atención sobre el hecho de que hay factores relevantes a un nivel macroeconómico que los modelos de ciclo vital no suelen tener en cuenta, como el crecimiento tendencial de la renta entre cohortes y las variaciones tendenciales en los salarios reales debidas a la globalización. Las primeras determinan que las cohortes más antiguas suelen presentar su pico salarial antes que las más modernas (ya que para una misma tasa de acumulación el incremento de horas laborales es menor), mientras que el segundo es capaz trasladar hacia atrás o hacia delante estos máximos. Por ejemplo, para niveles de formación bajos Mincer constata que en Estados Unidos la tendencia decreciente en los salarios reales -por la presión de la mayor competencia internacional- contribuye también a adelantar los picos salariales entre cohortes, mientras que para los de trabajadores con mayor cualificación, más beneficiados por componentes como el crecimiento de la productividad, la ubicación de los máximos salariales apenas se modifica, dados estos dos efectos de signo contrario.

Interesado principalmente por la contrastación empírica de estas predicciones derivadas en el marco de ciclo vital, Mincer diferencia entre salario capacidad y salario observado. El primero estaría en línea con la evolución real del stock de capital humano del trabajador, mientras que el segundo debe entenderse en términos netos de costes de formación y aprendizaje. La inobservabilidad del primero implica que debe ser estimado a partir de ecuaciones salariales basadas en fundamentales (como horas de formación escolar o laboral, experiencia, etc,), en contraste con los segundos, que pueden medirse directamente a partir de series estadísticas. La hipótesis a contrastar, cuya verificación de algún modo refrenda las conclusiones de los modelos de ciclo vital, es el hecho de que los salarios observados presentan un pico posterior a los salarios capacidad, ya que incluso aunque el stock de capital humano haya tocado su máximo los gastos en formación suelen seguir retrocediendo durante un tiempo adicional. El resultado de su contraste, efectuado con datos de la economía estadounidense para diferentes cohortes dentro de una muestra que cubria desde comienzos de los 60 hasta 1990, fue positivo.

Como colofón a la integración del capital humano en la teoría del ciclo vital, las aportaciones de los años 70 se han visto complementadas desde finales de la década de los 90 por otras que hacen uso de la teoría de la búsqueda, si bien son igualmente fieles a la esencia del enfoque de Ben Porath-Becker. La principal diferencia de esta tendencia modelizadora con la sus precedentes es la mayor elaboración de las alternativas de utilización del tiempo en un contexto de incertidumbre, de modo que junto a un tiempo de trabajo en sentido estricto y a otro de formación, que a menudo se solapa con el anterior, se introduce un tercero constituido por “tiempo de búsqueda de trabajo de mercado”, cuyas probabilidades de éxito están a su vez influidas por las inversiones en capital humano que realizan los individuos. En este área cabría destacar los trabajos de Mortensen (2003), Christensen et al. (2005), Heckman (1999) -con agentes heterogéneos- o **Bowlus y Liu (2013),** por no citar una amplia batería de otros que combinan teoría de la búsqueda y formación de capital humano en el centro de trabajo (on the job training), que serán analizados en más profundidad en el apartado dedicado a esta modalidad de inversión en capital humano.

Centrándonos en esta última contribución, que no solo es una de las más actuales, sino también fiel a los trabajos originales de Ben-Porath, el individuo debe realizar sus esfuerzos de inversión en capital humano paralelamente al trabajo en el mercado; en este sentido puede interpretarse que el proceso de formación presenta complementariedades con el trabajo de mercado, sin llegar a ser un “learning-by-doing”, en la medida en que requiere la asignación de un tiempo independiente, ni “on the job training”, puesto que es determinado unilateralmente por el trabajador. La función de acumulación es convencional, con depreciación nula del activo y rendimientos decrecientes tanto en el propio activo como en el tiempo destinado al aprendizaje:

$a_{s+1}^{h} = a_{s}^{h} + B\left(a_{s}^{h} n_{s}^{h}\right)^{\gamma};\ 0 < \gamma < 1$ (2.48)

La función de llegada de ofertas de trabajo será q(t), siendo t el esfuerzo de búsqueda y adoptando una tecnología lineal $q(t) = \lambda t$. La función de costes de búsqueda c(t) será creciente y convexa respecto al esfuerzo. Las variables endógenas que son determinadas en el problema de optimización del trabajador serán su situación respecto al empleo, así como la acumulación de capital humano. Siendo e su retribución por unidad de capital humano, $V\left(a^{h}, e\right)$ y $\mathrm{V}_{u}\left(a^{h}\right)$ el valor de estar empleado y desempleado respectivamente, el problema queda definido a través de dos ecuaciones de Bellman, cada una de las cuales define los valores anteriores. Comenzando con el valor atribuido a la condición de desempleado

$$V_{us}\left(a_{s}^{h}\right) = Max_{t_s}\ b a_{s}^{h} - c\left(t_{s}\right) + \beta q\left(t_{s}\right)\int_{0}^{\infty} Max\left[V_{u,s+1}\left(a_{s}^{h}\right), V_{s+1}\left(a_{s}^{h}, e\right)\right] G(e)de +$$

$$+\beta\left[1 - q\left(t_{s}\right)\right]V_{u,s+1}\left(a_{s}^{h}\right)$$

$$s.a:\ 0 \le \lambda t_{s} \le 1 \ (2.49)$$

El valor del desempleo se forma a partir de una prestación recibida por el trabajador, proporcional a su capital humano, menos el coste del esfuerzo acometido, más el valor esperado de los acontecimientos en el período s+1 descontados por la tasa subjetiva β . Este último, por su parte, está integrado por la probabilidad de recibir una oferta, dado el esfuerzo desplegado, por la renta que genera esa oferta si se acepta (G es la función de distribución del sueldo) o por el valor de seguir desempleado, que se percibirá tanto si no se acepta como si no se recibe la oferta. En cuanto al valor de la situación de empleo, queda recogida por la siguiente función:

$$V_s\left(a_s^h,e\right)=Max_{t_s,n_s^h}\ ea_s^h\left(1-n^h\right)-c\left(t_s\right)+\beta(1-d)\left[1-q\left(t_s\right)\right]Max\left[V_{s+1}\left(a_{s+1}^h,e\right),V_{u,s+1}\left(a_{s+1}^h\right)\right]+$$
$$+\beta(1-d)q\left(t_s\right)\int_0^\infty Max\left[V_{s+1}\left(a_{s+1}^h,e\right),V'_{s+1}\left(a_{s+1}^h,e\right),V_{u,s+1}\left(a_{s+1}^h\right)\right]G(e)de+\beta dV_{u,s+1}\left(a_{s+1}^h\right)$$
$$s.a:\ 0\le n_s^h\le 1;\ 0\le q\left(t_s\right)\le 1\ (2.50)$$

El valor del empleo responde al salario percibido (descontando del tiempo hábil el dedicado a invertir en capital humano), menos los costes del esfuerzo realizado, más el valor esperado de s+1. Para determinar este último, hay que tener en cuenta que d es la probabilidad de destrucción del puesto de trabajo; si esta no se materializa, de nuevo la corriente de rentas dependerá de la probabilidad de recibir una oferta. Si se recibe, se escogerá el valor futuro máximo de cambiar de empresa, permanecer en la misma o convertirse en desempleado; si no se recibe, el abanico de alternativas se restringe a estas dos últimas. En cualquiera de los posibles escenarios, el capital humano será mayor, a consecuencia de la inversión realizada en s. El modelo se resuelve por métodos numéricos. No obstante, la mera exposición de su arquitectura básica pone de manifiesto su raíz común con los restantes modelos de ciclo vital, con el elemento adicional de incertidumbre.

II.2. La influencia de la familia y el matrimonio en la formación de capital humano.

En los modelos de ciclo vital abordados hasta el momento el individuo parte en el origen de su vida con un stock de capital dado, aunque la procedencia del mismo no se explica. Es fácil comprobar que la magnitud de dicho stock es muy relevante, al generar no solamente un efecto riqueza en su restricción presupuestaria intertemporal e influir la duración de las diversas fases por las que atraviesa la utilización de su tiempo. Por esta razón son numerosos los autores que se han preguntado por la importancia del contexto familiar en la configuración de este capital humano de partida e incluso en la generación de restricciones adicionales para el individuo en la maximización intertemporal de sus preferencias. Varias son las líneas de trabajo que merece la pena destacar en este ámbito, aunque indudablemente el punto de partida lo constituyen, una vez más, los trabajos de Becker sobre la endogeneización de la fertilidad, cuya importancia además radica en haber constituido el gérmen de los modelos de generaciones solapadas con fertilidad endógena y acumulación de capital humano que nacieron a mediados de los 80 y que han continuado dando importantes frutos hasta la actualidad.

Fertilidad endógena. Cantidad y calidad de los hijos. La iteratura beckeriana sobre inversiones familiares en el capital humano de generaciones posteriores se construye a partir de varias aportaciones sucesivas clave. La primera de ellas es la teoría de la elección entre cantidad y calidad de la descendencia de Becker y Lewis (1973). El elemento central es este enfoque es la inserción del número de descendientes y su calidad dentro de la función de utilidad familiar, junto al consumo de otras commodities, de suerte que se maximiza esta función objetivo sujeta a una restricción presupuestaria en la que tanto la cantidad como la calidad se ponderan por un precio sombra de producción. Respecto a los precios sombra, estos poseen términos fijos y otros que interactúan con la otra variable; por ejemplo, el precio sombra unitario por hijo será $p_n = \pi_n + Q\pi$. Análogamente $p_q = \pi_q + \pi Q$ .Estos elementos se articulan del siguiente modo:

$$U = U(N, Q, C) \quad (2.51)$$

$$p_n N + p_q Q + p_c C = Y \quad (2.52)$$

Por lo tanto, la relación entre cantidad y calidad se producirá no solo a través de las utilidades marginales cruzadas, sino también por medio de la interacción de los elementos de la restricción presupuestaria. Esta circunstancia influirá en la estática comparativa del problema de optimización; por ejemplo, un incremento de los costes asociados estrictamente a la natalidad generará un efecto sustitución contrario a esta, pero al mismo tiempo una disminución del precio sombra de la calidad. El resultado, por lo tanto, será no solamente una disminución de la relación óptima número-calidad, sino un incremento de la ratio calidad-consumo de la commodity.

La fundamentación de este modelo es desarrollada por Tray (1973), al intentar justificar en el marco de la teoría de elección de commodities la presencia de la cantidad y la calidad de hijos en la función de utilidad de los hogares. En concreto, Tray propone la siguiente función de utilidad:

$$U = U\left(C, S_{of}\right) \text{ (2.53)}$$

Dentro de ella el primer argumento se refiere a una commodity de consumo genérica o compuesta y S_{of} denota el conjunto de servicios proporcionados por el stock de descendencia de la familia, que es considerada un bien de consumo duradero. La cantidad disfrutada de cada commodity viene dada por su correspondiente función de producción, que en el caso de los servicios de los hijos se estructura del siguiente modo:

$S_{of} = S(N,Q)$ (2.54)

Ahora el primer argumento representa el número de hijos del matrimonio, mientras que el segundo agrupa el conjunto de variables relacionadas con su calidad -entre las que , por supuesto, se encontraría su nivel educativo, aunque el stock de capital humano no forme parte como tal del análisis formal de Tray-. Por último, tanto número como calidad de los descendientes poseen su propia tecnología de producción, en función de la fracción de tiempo dedicada a tales aspectos por el padre y la madre y un vector de inputs de mercado preciso para la generación de cada dimensión. El tiempo total disponible por el padre y la madre se divide en tiempo de producción y/o mejora de la calidad de su descendencia y tiempo laboral remunerado. Finalmente, la adquisición de todos los inputs necesarios más los costes de oportunidad asociados al tiempo transcurrido fuera del mercado laboral se someten a una restricción presupuestaria dada por los ingresos conjuntos de la pareja y la suma de las fracciones de tiempo destinadas a cada tarea, a la disponibilidad total de tiempo por período. En definitiva, la teoría beckeriana sobre asignación del tiempo se emplea para microfundamentar el tamaño y las características de la descendencia. Se proporciona así una base racional al legado educativo.

La teoría de Becker sobre interacción social (1974) es el siguiente eslabón en la dirección a los modelos de generaciones solapadas, explicando de una forma más explícita los gastos familares en educación a partir de una variante de los desarrollos de Tray. Así, los rasgos de las personas existentes en el entorno del individuo constituyen un input más en la producción de determinadas commodities que consume. Pensemos por ejemplo en la distinción social como commodity, que se vería reforzada por un círculo social capaz de reconocer los logros cometidos o que actuaran como variable señalizadora de tales logros. Partiendo de esta base la función de utilidad del individuo pasaría a escribirse de la siguiente manera:

$U = U(C)$ (2.55)

$C = C(X,Q,...)$ (2.56)

Esto es, la función de utilidad se expresa como dependiente de una commodity compuesta, en cuya producción intervienen tanto un vector de inputs de mercado X, como un vector de características Q pertenecientes a las personas de su entorno, como eventualmente otras variables (tiempo destinado a la elaboración de la commodity C, etc.). Para Becker la razón por la que la teoría del consumo tradicional no hace referencia a la variable Q es porque se considera dada, esto es, ajena al individuo de suerte que este no puede incidir sobre ella. Sin embargo, es más realista suponer que el agente optimizador sí tiene una capacidad de influencia sobre la variable QE (quality of environment), por varios conductos dependiendo del caso concreto. En este sentido, el nivel de la variable QE puede escribirse como la adición de dos factores:

$QE = \omega + h$ (2.57)

El primero de ellos refleja el nivel que alcanzaría dicha variable en ausencia de un "esfuerzo adicional" por el individuo, mientras que el segundo representa esta última contribución. Por lo demás, la optimización de la función de utilidad vendría sujeta a la siguiente restricción presupuestaria, correspondiente al caso simplificado en que Q y X son los únicos inputs necesarios en la producción de la commodity:

$p_x X + p_q h = Y \Rightarrow p_x X + p_q QE = Y + \omega$ (2.58)

Uno de los principales campos de aplicación de esta teoría es el hogar y el mundo de las relaciones familiares. Factores como el bienestar material de los miembros de la familiar o el nivel de educación de los niños se convierten en inputs en la producción de C, que podría asociarse a la imagen social de la persona. Así pues, por esta vía se da también cabida a un conjunto de transferencias intergeneracionales que, en última instancia, incrementan la satisfacción del cabeza de familia al elevar al perfeccionar la calidad de determinadas commodities en cuyo consumo se basa aquella. La diferencia principal con el enfoque de cantidad/calidad radicaría en que, mientras en el primero el stock de descendencia es un bien en sí mismo, en el segundo las condiciones de vida de los miembros de la familia son relevantes en cuanto que elementos que sustentan la estabilidad y calidad del entorno en el que consume el individuo.

En Becker (1976) el modelo de cantidad-calidad sigue evolucionando y adopta algunas características de trabajos previos. En concreto dos. Por una parte, se racionalizan las aportaciones a la calidad de la descendencia en el marco de la teoría de la interacción social. Por otra, se aplica la estructura de dotación + esfuerzo (que en el artículo de 1974 venía asociada a las características de las personas del entorno familiar) a la calidad de los hijos, de suerte que ahora esta se modeliza como la suma de los mismos componentes que antes explicaban el entorno de consumo. De esta forma, el primer sumando del miembro derecho representa la dotación de calidad de los niños, "exógena" a los esfuerzos paternos (herencia genética, educación pública, "suerte", etc.), mientras que h continúa denotando el producto de la aplicación de medios a la elevación de esta calidad por encima del nivel dictado por la dotación. A la misma expresión puede llegarse de un modo más riguroso si se considera la calidad una commodity cuya producción depende de una tecnología en la que se aplican varios inputs, a saber inputs de mercado, aquellos que se encuentran presentes en la dotación de los niños y, eventualmente, tiempo, si bien este último no se considera en el análisis. Si además se asigna una productividad marginal constante a cada uno de estos inputs y una estructura aditiva a la función de producción, llegamos a la siguiente expresión, que se conecta con el enfoque de interacción social:

$Q = \alpha X + \gamma Q_0;\ X = h;\ Q_0 = \omega$ (2.59)

Familias con mayores rentas, ceteris paribus, invertirían más en la educación de su prole. Ahora bien, en la medida en que las dotaciones de la prole no tienen por qué ser iguales entre los hijos (hay factores específicos en ella, junto a otros de tipo horizontal) este tipo de modelización podría explicar diferencias ex post en la calidad de los hijos y, en particular, en su nivel de capital humano, independientemente de la renta familiar. También explicaría diferentes asignaciones de capital humano a cada uno de ellos por la familia si algunos de ellos resultan especialmente desfavorecidos por la dotación.

Conclusiones diferentes podrían alcanzarse si el precio de la calidad, en lugar de ser constante, estuviese inversamente relacionado con la dotación de capital humano de los niños, ya que entonces la calidad deseada de los niños estaría relacionada positivamente con su dotación. En estas circunstancias la compensación a los niños peor dotados no tendría por qué ser necesariamente la estrategia óptima para los padres y, en este sentido, dos efectos contrapuestos concurrirían: un efecto precio, que primaría a los niños mejor dotados, y uno riqueza, por el que los recursos disponibles tenderían a canalizarse en mayor medida hacia los peor dotados. Para Becker, la solución más probable es que predominara el efecto precio para las inversiones educativas, mientras que si fuera posible mejorar la calidad a través de otro tipo de inversiones en otros activos (con coste independiente de las dotaciones), estas serían las predominantemente utilizadas hacia los niños con dotaciones inferiores. Aunque Becker no llega a modelizar esta variante del modelo, habría que suponer la calidad de los niños como una commodity cuyo nivel es posible elevar gracias tanto a inversiones en educación como en otro tipo de activos. En equilibrio de la familia los tres tipos de costes marginales deberían igualarse, procedimiento que permitiría determinar las inversiones en capital humano para los niños con diferentes dotaciones. Dado que los costes marginales de las inversiones en educación serían mayores para aquellos descendientes con peores dotaciones, las cantidades óptimas dedicadas a estos serían inferiores. De esta manera, si bien las familias contribuirían a la desigualdad observada en los ingresos laborales, la contrarrestarían parcialmente mediante aportaciones a la renta no laboral.

Becker y Tomes (1978) y Becker (1986) construyen por primera vez, basándose en las aportaciones anteriores relatadas, los verdaderos fundamentos de un modelo de generaciones solapadas con inversiones en capital humano. Aunque a diferencia de los modelos de Diamond (1965) y Samuelson (1958,1968) cada generación planifica solamente a lo largo de un período, existe una coincidencia de ambas generaciones a lo largo del período de optimización de la más antigua, durante el cual se producen determinadas interacciones que tendrán efectos sobre el stock de capital humano de la nueva cohorte. Las principales novedades frente a la cadena de trabajos anteriores son: i) se refleja la coexistencia de las sucesivas generaciones así como los efectos sobre la renta de las inversiones en la descendencia, tanto dentro de la función de utilidad como en la restricción presupuestaria familiar; ii) se circunscribe el conjunto de inversiones en calidad de los hijos a aquellas con un contenido más directo sobre su capacidad de generación de renta futura; la modelización del artículo subsume de hecho estos activos en el capital humano y las rentas derivadas en salarios; iii) el propio modelo incluye parámetros que permiten medir la evolución de la desigualdad en rentas tanto entre generaciones de la misma dinastía como entre familias que coexisten a lo largo del tiempo en la misma sociedad.

Así, la versión básica del modelo parte de una función de utilidad dependiente de una commodity de consumo genérica, el número de niños y sus características o calidad. Asociando calidad con renta del que se dota a la próxima generación, el producto del factor calidad por el número de hijos dará lugar a la renta de la que disfruta la mencionada generación venidera, Y_{t+1} , siendo el período t aquel en el que viven los padres y en el que se realizan las inversiones correspondientes resultantes del proceso de optimización dinámica. En definitiva, la utilidad de los padres tomará la siguiente forma:

$$U = U\left(C_s, Y_{s+1}\right);$$

$$Y_{s+1} = N\overline{Y}_{s+1}, \text{ siendo } \overline{\text{Y}} \text{ la renta individual de cada futuro adulto } (2.60)$$

El stock de capital humano de los futuros adultos en s+1 se compondrá de 3 elementos, ya presentes en los trabajos anteriores de 1974 y 1976: la inversión familiar en educación propiamente dicha, una dotación de factores determinísticos (algunos de los cuales afectan a todos los miembros de una generación y otros son específicos a los miembros de una familia, como la herencia genética) y un término aleatorio.

$$p_{cs}C_s + p_{hs}h_s = Y_s \text{ (2.61)}$$

Teniendo en cuenta los elementos integrantes del stock de capital humano de los niños, la renta máxima de la generación posterior se definirá como (donde e es, siguiendo la notación anterior, la retribución de mercado por unidad de capital humano):

$$Y_{s+1} = e_{s+1}h_s + e_{s+1}\omega_{s+1} + e_{s+1}u_{s+1} \text{ (2.62)}$$

La restricción presupuestaria de los padres puede expresarse en función de los argumentos de las preferencias si, de una manera un tanto ad-hoc, suponemos como hace Becker que el tipo de interés de un activo financiero que no aparece en el modelo se iguala a la tasa de retorno de los gastos educativos, esto es:

$$p_s^h = \frac{e_{s+1}}{1+i_s} \quad (2.63)$$

Reordenando, tendremos la igualdad entre el precio sombra de cada bien en la función de utilidad e FY o renta familiar total:

$$p_{cs}C_s + \frac{Y_{s+1}}{1+i_s} = Y_s + \frac{w_{s+1}\omega_{s+1}}{1+i_s} + \frac{w_{s+1}u_{s+1}}{1+i_s} = FY_s \quad (2.64)$$

Al no conocer la familia a priori el valor del shock aleatorio, la restricción presupuestaria habrá de expresarse en términos esperados. Suponiendo a los individuos neutrales al riesgo, el problema de optimización adoptaría la siguiente forma:

$$\max_{\{C_s, E_s Y_{s+1}\}} E_s U\left(C_s, Y_{s+1}\right) \quad (2.65)$$

$$s.a. p_{cs}C_s + E_s Y_{s+1} = S_s \quad (2.66)$$

$$E_s Y_{s+1} = \frac{e_{s+1}h_s}{1+i_s} + \frac{e_{s+1}\omega_{s+1}}{1+i_s} \quad (2.67)$$

Podemos suponer que, si las preferencias son homotéticas, la inversión en capital humano constituye una cierta fracción v de la renta familar, de modo que $E_s Y_{s+1} = vFY_s$. Al parámetro v se le denomina propensión a la inversión en la próxima generación. Para cerrar el modelo, los autores asumen también que la relación que guardan las dotaciones determinísticas de dos generaciones sucesivas viene dada por la siguiente ecuación:

$$\omega_{s+1} = (1 + g_\omega - \varsigma)\overline{\omega}_s + \varsigma\omega_s + \varepsilon_{s+1} \quad (2.68)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que la dotación toma algunas características generales de la dotación media social existente en el período s y otras de la dotación específica familiar de sus antecesores. Esto es, se absorbe la dotación media -corregida de su correspondiente tasa de crecimiento, que representaría una mejoría general por razones biológicas-, mientras que es el parámetro ς , o de propensión a la herencia, el que determina el grado en que los individuos estarán más próximos a las características de su propia familia que a los restantes miembros de su generación. Finalmente, ε es una innovación aleatoria. En consecuencia, un miembro de la cohorte s+1 se diferenciará de los otros miembros de su cohorte en razón de la propensión a invertir en él de su familia, de la renta y el grado de altruismo familiar implícito en sus preferencias y de su capacidad genética de “impregnación” de la dotación determinística de su familia, lo que en terminología de Becker se denomina “grado de heredabilidad”.

El hecho de que la composición de las dotaciones contenga elementos aleatorios y específicos de cada familia implica que la desigualdad es un fenómeno de equilibrio, producto tanto de impactos aleatorios de las generaciones futuras como de todos los sufridos (o disfrutados) por las pasadas, incluso aunque todas las familias partan de una dotación común. En sentido contrario, el modelo también admite la existencia de movilidad intergeneracional incluso en familias con una renta reducida, si se encadenan varios shocks aleatorios y el coeficiente de "heredabilidad" es lo suficientemente alto.

Una dimensión importante no suficientemente elaborada en la versión del modelo de 1979 es la financiación de los gastos de las familias. En efecto, tal como se ha planteado la restricción presupuestaria de las dos generaciones solapadas en s, nada impediría que los padres tomasen a préstamo cierta cantidad para mejorar el stock de capital humano de sus hijos, repagándose dicha cantidad por estos últimos tras la correspondiente transferencia del título de crédito. El trabajo de 1986 desarrolla más en profundidad esta cuestión, recogiendo al mismo tiempo los elementos esenciales de la primera incursión de Becker y Tomes. Así, prescindiendo de fenómenos como el OJT se supone que el capital humano de un individuo en un período dependerá de las inversiones llevadas a cabo por sus padres, eventualmente de la educación pública recibida (E) y su dotación. Esto es:

$$a_{s+1}^{h} = a\left(h_s, E_s, \omega_{s+1}\right) \quad (2.69)$$

En esta función las tres derivadas parciales son positivas. Si los mercados de capitales son perfectos, se aplicará dentro de la familia el teorema de separación, en el sentido de que los padres maximizarán la riqueza total familiar sujeta a la cual planificarán su consumo. Para hacerlo, la cpo del gasto en formación indica que este deberá elevarse hasta que su productividad marginal se iguale al tipo de interés del crédito con el que se financia y al que habrán de hacer frente los hijos. Reordenando la cpo, el coste marginal (precio de la inversión en los niños) se iguala al beneficio descontado. **Por lo tanto, se trata de una condición análoga a la obtenida en el modelo de ciclo vital,** solo que en aquí los períodos relevante serían solamente dos. La clave del resultado sería la inclusión de la renta de la generación posterior dentro de las preferencias de sus padres, lo que contribuye a aproximar la mecánica del modelo a una maximización de unas preferencias en un vector de commodities a lo largo de varios períodos. A diferencia del enfoque de ciclo vital, no obstante, el capital humano que se forma en el seno de la relación padre-hijo no trasciende a la misma, a pesar de que la dotación de toda cohorte puede contener, como hemos visto, un elemento familiar. Esto hace que, de facto, la tasa de depreciación del capital humano sea igual a la unidad en el paso de una cohorte a otra.

Además, bajo los supuestos de normalización del salario real por unidad de capital humano y de coste unitario por unidad de gasto en educación, esta condición equivaldría a la igualdad entre la tasa de retorno del activo financiero y la del capital humano. Teniendo en cuenta el decrecimiento[20] de la productividad marginal de la inversión en formación, la relación entre el tipo de interés del activo y esta será negativa. Este tipo de solución en mercados de capital perfectos no genera diferencias en la transmisión de capital humano en función de la renta familiar. Sin embargo, sí surgirán diferencias en la renta de los descendientes, ya que mientras las familias más pudientes sufragarán la inversión en capital humano con sus propios fondos, las más pobres deberán hacerlo mediante el recurso a la deuda, que legarán a su hijos. En el caso de que se plantearan en el modelo legados de otro tipo de activos, las diferencias consiguientes reforzarían este mismo argumento. Pero al margen de este hecho, las dotaciones de capital humano (y dentro de ellas, el componente familiar) constituyen un nexo indirecto entre capacidad de generación de ganancias a lo largo de distintas cohortes dentro de la misma familia. Por otra parte, se sugiere que el componente estocástico de la renta puede seguir un proceso estocástico en el que la relación con el shock del período anterior sea negativa, esto es:

$u_s = \overline{u} - \phi u_{s-1} + v_s$, siendo v ruido blanco y $\phi > 0$ (2.70)

Entonces, la solución estacionaria hacia la que debería converger el proceso si fuera estacionario sería $\frac{\overline{u}}{1-\phi}$. Esto implica que existe una media ligada a cada familia, tanto mayor cuanto mayor el componente autónomo del numerador. Por esta razón, aquellos sectores de la población que sufran una discriminación sistemática que se traduzca en falta de acceso al mercado acabarán transmitiendo esta característica entre generaciones a través de la media del componente aleatorio de su renta. Se supondrá que el componente estocástico de la dotación es conocido por los padres antes de decidir el gasto en educación: de esta forma, una menor dotación redundaría en una menor productividad de la inversión en capital humano, por lo que se incrementará compensatoriamente la cuantía de la inversión para igualar la tasa de retorno a la del activo financiero.

En un entorno de información imperfecta, existe un factor de riesgo moral en las transmisiones de deuda de padres a hijos, por lo que es improbable que los primeros pudieran recibir con facilidad crédito para financiar la educación de los segundos, al no poderse verificar a priori qué tipo de educación recibirán los segundos o el valor que toman las variables no observables que afectan a su capacidad de generar renta en el futuro. A esto se añade que el capital humano no puede utilizarse como colateral del préstamo, al no estar institucionalizada la esclavitud en ningún código legal. Por esta

[20] Aquí hay un punto de divergencia con el artículo de 1979 con Tomes, en el que la relación de los tres componentes del capital humano era aditiva y lineal. En 1986 se toma implícitamente una función de inversión en capital humano cóncava en el input mediante el que los padres actúan sobre la acumulación de los hijos.

razón el acceso al crédito para financiar gastos en educación suele presentar fricciones. Cuando estas están presentes la resolución del modelo se ve alterada en varios aspectos: i) No existe un tipo de interés uniforme para todas las familias para aquellas que tengan acceso al crédito. ii) Se rompe el teorema de separación, al no haber un único tipo de interés de mercado al que se igualen las relaciones marginales de sustitución de las familias. Por tanto, la condición de primer orden más relevante para la determinación de la inversión en educación pasa de ser la de no arbitraje a la igualdad entre relación marginal de sustitución de consumo y renta de los hijos el precio relativo del primero en términos de la segunda, esto es, la tasa de retorno de la inversión en capital humano.

De esta manera, la inversión óptima en educación se localizará en el punto en que se verifique la anterior igualdad y al mismo tiempo la tasa de retorno se iguale a la productividad marginal de la inversión en el ingreso de los hijos. Esto equivale a hablar de dos curvas en el espacio tasa de retorno-inversión, cuya intersección determinará el gasto en educación: una creciente, ligada a la primera igualdad (a mayor tasa de retorno más caro se hace el consumo en el presente) y otra decreciente, a consecuencia de la concavidad de la función de producción. La curva que representa la igualdad entre la relación marginal de sustitución y los precios relativos se construye para un valor dado de la dotación y de la renta familiar; a mayor renta la curva se situará más a la derecha, poniendo de manifiesto que para una tasa de retorno dada se podrá acometer un mayor gasto en educación. Una dotación más alta de un niño produce un efecto ambiguo sobre la inversión óptima: por un lado aumenta la productividad de los gastos educativos (suponiendo una derivada parcial cruzada positiva en la función a definida antes), pero al mismo supone una renta futura más alta del hijo en el futuro, por lo que disminuye su la utlidad marginal de este bien para los padres y tiende a penalizar la inversión en educación frente al consumo presente. Por una razón análoga una mayor educación pública podría atraer o expulsar la inversión privada, dependiendo de qué efecto predominara. Un último factor a considerar sobre el valor de equilibrio de la inversión sería el grado de altruismo hacia la próxima generación, plasmado en la utilidad marginal de la renta de los hijos para un valor dado de la misma. La existencia de estas fricciones crediticias, en consecuencia, abre una vía de dependencia entre la renta de los padres y el stock de capital humano que pueden llegar a acumular los hijos.

El modelo de Becker-Tomes admite una variante, que permite enlazar su estructura con los de agente representativo dinástico. Sin más que incluir en la función de utilidad familiar la función de utilidad de los descendientes en lugar de su renta y sustituir iterativamente, la función objetivo y restricción presupuestaria de la generación viva en el período s serían las que se reflejan a continuación. En primer lugar y en cuanto a la función de utilidad, si ψ es el factor de altruismo intergeneracional y, como es usual, β la tasa de descuento intertemporal, entonces:

$$U_s = V_s + \psi\beta E_s V_{s+1} = V(C_s) + \psi\beta E_s\left[V(C_{s+1}) + \psi\beta E_{s+1} V(C_{s+2})\right] = \ldots =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} (\psi\beta)^s E_0 V(C_s) \quad (2.71)$$

Para representar la restricción presupuestaria intertemporal en este marco de horizonte infinito resultante de la cadena intergeneracional que propicia la introducción del altruismo, sustituiríamos en la restricción anterior Y_{s+j} por los correspondientes términos de su restricción, resultando la restricción de solvencia siguiente, en la que ahora FY es la riqueza dinástica (o suma descontada de la riqueza familiar de las sucesivas generaciones).

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{p_s^c C_s}{\prod_{j=1}^{s}\left(1 + r_{s-j}\right)} = FY_s \quad (2.72)$$

De esta forma, la maximización respecto a la secuencia de consumos, conocida la renta de cada cohorte, permite deducir la inversión en la educación de la generación inmediatamente posterior. Estas dos líneas de modelización serán las que den lugar a los dos modos principales de insertar el capital humano en equilibrio general: las generaciones solapadas o las economías dinástias con hogares representativos.

Volviendo algo hacia atrás en el tiempo, la integración de las preferencias de la descendencia en la función de utilidad paterna propuesta por **Becker y Tomes (1979**) no tiene por qué conducir necesariamente a un modelo dinástico de inversión en capital humano, sino que puede desembocar en otros resultados bajo supuestos diferentes. En este sentido, un enfoque alternativo al dinástico es el de Bevan (1979). De acuerdo con este y partiendo de un modelo en horizonte infinito como el que acabamos de plantear, la variable de actuación de cada cabeza de familia respecto a la generación próxima ya no será la inversión en capital humano, sino la determinación de un legado monetario. Así, su restricción presupuestaria se articulará de modo que para cada miembro de una dinastía, el legado recibido al comienzo de su vida más el valor descontado de su renta futura debe ser igual a su consumo más el legado dirigido a sus descendientes. Por otro dichas rentas laborales presentan una evolución exógena y estocástica, de modo que esta seguiría una distribución estocástica logarítmico-normal de media $\mu_s = g_\mu^s \mu_0$ y desviación típica σ , que introducida en el problema de optimización arroja una solución endógena de los legados en cada período en función de los parámetros del problema de optimización y el nivel de rentas laborales del primer miembro de la dinastía. Incluso suponiendo que a este planteamiento subyaciera una inversión en capital humano llevada a cabo por cada individuo -la cual explicaría el componente tendencial de la media de la renta- y que los legados tendieran a compensar posibles desviaciones de la tendencia, no seguiremos esta línea de desarrollos por no endogeneizar el proceso de acumulación de capital humano, en contradicción con la línea medular de este trabajo. El mensaje fundamental de este modelo, no obstante, es que la cadena de relaciones económicas a través de la que se manifiesta el altruismo entre los miembros de una dinastía puede sustanciarse de diferentes formas y no solamente por medio de una inversión en educación, incluso cuando el capital humano forma parte de la cartera de los agentes. Volveremos sobre esta cuestión al plantear los modelos de altruismo intergeneracional y fertilidad endógena de Becker y Barro.

Otra variante del esquema de generaciones sucesivas de Becker y Tomes es el de **Loury (1981)**, que introduce una modificación sustancial y otras menores. Los individuos viven durante dos períodos. Durante el segundo período se produce un solapamiento entre la nueva y antigua generación dentro de cada familia. La diferencia esencial con el enfoque de Becker-Tomes es que el nexo de altruismo está constituido por la utilidad indirecta del hijo en función de su renta y no por la utilidad directa en función de su consumo, a fin de evitar en la función de utilidad posibles valores ineficientes del consumo. Por el contrario, el argumento relacionado con el bienestar de los padres es su consumo. Por lo demás, esta estructura de preferencias es común a todas las generaciones y solo se optimiza durante el segundo período de vida, ya que durante el primer periodo tan solo se recibe pasivamente ayuda paterna (bien en forma de consumo o de inversiones en formación).

Otra diferencia menor viene dada por el hecho de que se explicita el lado de la oferta, de modo que la producción del bien compuesto se lleva a cabo dentro de la propia familia (este es un supuesto completamente accesorio). La función de producción del bien compuesto dependerá exclusivamente de input trabajo en su doble vertiente: tanto tiempo aplicado -que será inelástico- como stock de capital humano disponible. El stock de capital humano desaparece con la muerte del individuo y depende, como herencia de Becker, de una dotación que se supone estocástica (distribuida uniformemente en el intervalo cerrado $[0,1]$ y con función de densidad estrictamente positiva) y cuyo valor se desconoce hasta el segundo período de vida, más el resultado de la inversión paterna óptima. Al estar operativo el capital humano durante uno solo de los períodos de la vida de los individuos no hay ninguna tasa de depreciación y se omite capital productivo. Bajo estas premisas y empleando nuestra notación habitual, la función de producción familiar se identificaría del siguiente modo en el período s se identificaría del siguiente modo:

$$y_{s+1}=f\left(a_{s+1}^{h}\overline{n}_{s+1}^{w}\right)=f\left(a_{s+1}^{h}\left(h_{s},\omega_{s+1}\right),\overline{n}_{s+1}^{w}\right)=\phi\left(x_{s}^{h},\omega_{s+1}\right) \quad (2.73)$$

La función de producción de capita humano tiene rendimientos decrecientes en la inversión realizada por los padres. Partiendo de esta estructura, la función de utilidad paterna, a maximizar en el nivel de consumo en s sujeta a las expectativas sobre la dotación aleatoria de los hijos, que no se revelará hasta s+1, se definiría así:

$$U_{s}=U\left(C_{s},E_{s}V\left(y_{s+1}\right)\right) \quad (2.74)$$

Finalmente, el problema de optimización quedará sujeto a la siguiente restricción presupuestaria-flujo[21]:

$$y_{s}=C_{s}+x_{s}^{h} \quad (2.75)$$

La función de utilidad esperada del padre se maximiza respecto a su consumo. La determinación de esta variable endógena permite resolver el problema, ya que la inversión en formación de los hijos será el residuo de la renta del padre y, una vez conocido este y el valor de la dotación estocástica, la renta del hijo adopta un valor final. En realidad esta estructura de optimización es coherente, en el sentido de que el padre también está maximizando una función indirecta de utilidad idéntica a la que se presume para su descendencia.

$$\forall y_{s}>0, V^{*}\left(y_{s}\right)=Max_{0<<}\ \mathrm{E}\left[U\left(C_{s},V^{*}\left(\omega_{s+1},x_{s}^{h}\right)\right)\right] \quad (2.76)$$

Sin embargo, **el elemento de asimetría reside en que el factor de altruismo no se da por sentado en la generación futura,** lo que conduce a un “alisamiento” limitado de la renta de los padres. La solución al problema de optimización aporta una función óptima de inversión en educación en función de la renta paterna, al no existir mercados de capitales que permitan eliminar o mitigar esta influencia. Una función como esta puede obtenerse, no obstante, en un problema convencional à la Becker con restricciones de acceso al crédito. De hecho, la condición de primer orden resultante es análoga a la que caracteriza un problema de legado de educativo beckeriano con una planificacion de dos períodos, solo que la valoración del bienestar de la renta de los descendientes se hace de acuerdo con sus propios criterios.

La expresión del problema en términos de la función indirecta de utilidad hace de este enfoque un instrumento adecuado para extraer algunas conclusiones sobre las consecuencias de distintos escenarios de distribución de la renta. El hecho de que las preferen-

[21] La restricción se expresa en términos reales, en unidades del bien compuesto producido por la familia. Para simplificar, se supone también que la commodity es un bien de consumo habitual producido 1 a 1 por unidades de y, por lo que su precio relativo es la unidad.

cias de los padres sean altruistas implica que, si la probabilidad de movilidad social es alta (bien por una elevada varianza de la dotación estocástica o por una elasticidad alta de los ingresos de los hijos respecto a dicha dotación), el perfil de la utilidad indirecta de los padres tenderá a ser más plano ante variaciones de la renta presente, al estar más dispuestos a sacrificar consumo para paliar los riesgos a que están sometidos los ingresos de sus hijos. Bajo las condiciones anteriores y si además la inversión en educación es un bien normal (en el sentido de que a más renta de los padres, más inversión) la secuencia de utilidades indirectas de la renta entre generaciones converge en el límite a un valor de equilibrio en el que, dependiendo del valor de la dotación estocástica, la renta puede tomar un valor máximo $y^{\max}$, de modo que:

$$y\left(1,x^{h}\left(y^{\max}\right)\right)=y^{\max} \quad (2.77)$$

Tamaño de la familia, orden de nacimientos y capital humano. Dentro de los modelos de equilibrio general, una rama de gran importancia cuyo origen se remonta a los trabajos de Becker y Barro de mediados de los 80 ha estudiado la interrelación existente entre decisiones de natalidad e inversión en capital humano de los descendientes y las consecuencias de esta conexión en el crecimiento económico. En el campo estrictamente microeconómico, sin embargo, no han sido pocos los autores que se han preocupado por la relación entre el tamaño y la estructura de la familia y la acumulación de este activo, aunqe una buena parte de aportaciones han sido de carácter empírico[22].

En el plano teórico y comenzando por la relación entre el tamaño y la secuencia de crecimiento de la familia, **Behrman y Taubman (1986**) desarrollan un modelo basado directamente en el trabajo seminal de Becker y Lewis (1973) de endogeneización de la inversión cuando existen varios hijos y las preferencias del cabeza de familia, así como su restricción presupuestaria y tecnológica, pueden escribirse como:

$$u_s=v\left(Y_1 \ldots Y_N\right)+\xi\left(C\right) \quad (2.78)$$

$$Y_i=h\left(x_i^h,\omega_i\right) \quad (2.79)$$

$$E=\sum_{j=1}^{N} p_i^x x_i^h \quad (2.80)$$

[22] Trabajos empíricos notables han sido, entre los de primera generación, los de Leibowitz (1974,1977) y Lindert (1974) y, entre los más recientes, el de Black et. al (2005).

Se trata de una estructura atemporal en la que se decide, a través de una función de utilidad separable en consumo[23] y rentas de los hijos, la asignación óptima del presupuesto educativo entre ellos (puede suponerse que dicho presupuesto es residual, tras haber efectuado las decisiones correspondientes de consumo). La renta de cada hijo viene dada por una pseudo-función de acumulación de capital humano, que depende tanto de la inversión efectuada por el padre como de la propia dotación del niño al nacer. La cpo que arroja el problema establece que:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial Y_j}\frac{\partial Y_j}{\partial x_j^h}}{\frac{\partial u}{\partial Y_i}\frac{\partial Y_i}{\partial x_i^h}}=\frac{p_j^x}{p_i^x} \quad (2.81)$$

Gráficamente, esta condición de equilibrio se podría representar en el espacio (Y_i, Y_j) como el punto de tangencia entre una curva de indiferencia y la frontera de transformación entre las rentas de i y j, dadas sus dotaciones y teniendo en cuenta que el equilibrio de producción exige también la igualdad entre la relación marginal de transformación y el precio relativo de los inputs variables. Distintos factores pueden favorecer a los descendientes nacidos primero o posteriormente. Entre los primeros, podría pensarse en dotaciones genéticas de menor calidad a medida que avanza el orden de nacimientos, la existencia de un tercer factor en la función de ingresos relacionacionado con el tiempo parental disponible, inversión precautoria en previsión de futuros nacimientos no esperados que tensen los recursos disponibles, tasas de descuento altas en las preferencias de los padres -representativas de impaciencia respecto a los éxitos en los hijos-, o la presencia de efectos de confluencia de Zajonc -coeficientes de inteligencia decrecientes a medida que avanza el orden de nacimientos-. Por el contrario, otros factores favorecerían la concentración de gastos educativos en aquellos hijos nacidos más tardíamente, como la existencia de restricciones de crédito en las primeras fases del ciclo vital de los progenitores o una mayor productividad de los padres educando a los niños a medida que estos son más numerosos (podríamos hablar de una curva de aprendizaje). La integración de estos fac-

---

[23] La especificación de la función de utilidad puede denotar unas preferencias más o menos igualitarias entre niños. El artículo propone el ejemplo de $u=\sum_{j=1}^{N}\psi_j\left(Y_i-g_i\right)^{\sigma}$, donde los g asociados a cada niño pueden interpretarse como objetivos o valores estimativos de la renta futura para los padres y σ es un parámetro que mide el grado de preferencia por la igualdad, con $\sigma\rightarrow-\infty$ reflejando una estructura rawlsiana y $\sigma\rightarrow 2$ pondría de manifiesto la mayor indiferencia por la desigualdad.

tores en el modelo principal, no obstante, no está excesivamente conseguida analíticamente, ya casi todos ellos reflejan variables externas al propio modelo.

Bagger et al. (2013) formaliza con mayor precisión estas consideraciones y las combina con la endogeneización del tamaño de la familia. El punto de partida es una estructura de preferencias que depende tanto del número de hijos como del capital humano de cada uno de ellos, partiendo de la premisa de que su orden de llegada alterará la inversión en educación de que se beneficien. Expresando el tamaño de la familia en un intervalo continuo $\left[0,N\right]$, la función de utilidad altruista y la restricción presupuestaria del cabeza de familia podrán escribirse como:

$$U=\int_0^N u\left(a^h\left(i\right),i\right)\,di;\ \int_0^N p^h\left(i\right)\,a^h\left(i\right)di=Y \quad (2.82)$$

Donde los p^h representan precios constantes de proporcionar 1 unidad adicional de capital humano a cada uno de los hijos (ver discusión en capítulo 4 sobre las condiciones necesarias para poder aplicar este esquema de valoración del activo). El capital humano variará según el orden de nacimiento siempre que $\frac{\partial u}{\partial a^h\,\partial i}\neq 0$ ó $\frac{\partial p(i)}{\partial i}\neq 0$. La función de utilidad verifica además las propiedades de Inada. El problema de maximización de la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria arroja un vector óptimo de capital humano según el orden de nacimiento y una cota superior de fertilidad N*. Las 2 cpo resultantes respecto a cada variable son las siguientes:

$$u\left(a^h\left(N*\right),N^*\right)=\lambda p^h\left(N*\right)a^h\left(N*\right) \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial u\left(a^{h*},i\right)}{\partial a^h\left(i\right)}=\lambda p^h\left(i\right) \quad (2.84)$$

Mientras la primera de ellas establece que en el límite de fertilidad elegido la utilidad se iguala al valor sombra del coste incurrido, la segunda es la habitual ecuación que relaciona utilidad marginal de inversión en capital humano en el descendiente de orden i con su coste. Combinando las dos ecuaciones se tiene:

$$\frac{1}{p^h\left(N*\right)}\frac{u\left(a^h\left(N*\right),N*\right)}{a^h\left(N*\right)}=\frac{1}{p^h\left(i\right)}\frac{\partial u\left(a^h\left(i\right),i\right)}{\partial a^h\left(i\right)} \quad (2.85)$$

Expresión que manifiesta que la utilidad media -por unidad de formación- proporcionada por el descendiente marginal debe igualarse a la pérdida de utilidad derivada de la menor formación a los hijos inframarginales. Considerando que N es determinado por la primera cpo, puede transformarse la segunda cpo en una ecuación diferencial que explica la evolución de $\frac{\partial a^h *(i)}{\partial i}$ en función de las elasticidades cruzadas de la utilidad respecto a las inversiones y el orden de nacimiento, así como en función de los cambios en el coste de formación según el orden. El signo de esta derivada puede ser negativo, positivo o nulo, indicando una inversión creciente, decreciente o constante en los sucesivos hijos (este último sería el caso extremo de Becker y Lewis). La derivada puede ser también constante, indicando así una variación proporcional de la inversión en educación conforme transcurren los nacimientos; si esto sucede el tamaño familiar determinará la inversión en el primero de los herederos, que a su vez dependerá del ritmo de variación de la formación en los posteriores descendientes. En general los perfiles de ascenso o descenso de la formación serán no lineales, incluso aunque los precios unitarios del capital humano sean inelásticos al orden de nacimiento.

Cuando se admite la posibilidad de nacimientos múltiples (y por tanto de incrementos estocásticos del tamaño de la familia más allá del límite de fertilidad previsto), se puede demostrar que a renta constante el perfil educativo en la familia de menor tamaño dominará siempre a la numerosa, en el sentido de que a cada niño le corresponderá una inversión mayor en su capital humano; en el mismo sentido, el gasto medio educativo será superior en una familia menos numerosa cuando la diferencia se produce en el margen por factores exógenos.

Matrimonio y capital humano. Dentro del ámbito de la estructura familiar, la interacción entre dos líneas de modelización netamente beckerianas como el emparejamiento y la inversión en educación ha sido también objeto de estudio por una rama dentro de la literatura, inicialmente sobre todo mediante modelización ad-hoc diseñada directamente para su contraste empírico (sería el caso de Heckman et al. (1980), Keane (1997) o Gould (2008) y más recientemente a través de construcciones teóricas más sólidamente fundamentadas, como en Blundell et al. (2005), Chow y Siow (2006) Chiappori, Iyigum y Weiss (2009) o, refinamiento de los anteriores, Chiappori, Costa Dias y Meghir (2015)[24].

Deteniéndonos algo más en el enfoque de esta última propuesta, el objeto es la endogeneización de distintas decisiones de individuos, hombres y mujeres, pertenecientes a la misma cohorte, a lo largo de 3 etapas de su vida. En la primera se adoptan decisiones

[24] A estos habría que añadir otros trabajos en el ámbito de la economía familia que toman el nivel educativo como exógeno y se dirigen principalmente a la explicación de la oferta de trabajo del matrimonio, como los de Low, Meghir y Pistaferri (2010), Jacquemet y Robin (2011) y Goussé (2014).

de capital humano, de suerte que partiendo de una dotación innata ω y eligiendo un nivel de educación entre varios existentes dentro del conjunto discreto $\{x_1,...x_J\}$ sujetos a un determinado coste, se alcanza un nivel de capital humano a^h fruto de la aplicación de estos dos inputs. En la segunda etapa se decide si emparejarse o seguir soltero; dicho emparejamiento se modeliza en función de un factor observable, como el nivel de capital humano, como proxy de ingresos futuros, y otro no observable, las preferencias maritales. Finalmente, en la tercera fase, dividida a su vez en T períodos, los miembros de la cohorte, casados y solteros toman decisiones sobre consumo y oferta de trabajo basándose en los salarios reales y en sus rentas no laborales. No se considera la posibilidad de divorcio o separación y la asignación intra-matrimonio del consumo y las rentas se supone se realiza conforme a acuerdos adoptados al formalizar el emparejamiento. No se contemplan fricciones en el mercado de crédito, en el que los activos laborales pueden pedir o tomar prestado al mismo tipo de interés.

La utilidad generada a lo largo de la vida se obtiene como la suma de tres componentes, cada uno correspondiente a una de las tres fases enumeradas: la utilidad aditiva de cada uno de los períodos de los tercera fase, en función de consumo y ocio, las preferencias maritales y (con signo negativo) el coste de adquisición del capital humano al principio de la vida. La utilidad del tercer período, cardinal y transferible entre esposos, se construye de modo que cualquier combinación pareto eficiente de ocio y consumo se iguala a la suma de una función exponencial de las utilidades de los esposos, esto es:

$$\exp u_i\left(C_{is},n_{is}^C\right)+\exp u_j\left(C_{js},n_{js}^C\right)=C_{is}+C_{js}+\theta_{is}n_{is}^C+\theta_{js}n_{js}^C \quad (2.86)$$

Donde las θ representan shocks de preferencias de cada período y el tiempo de ocio, n^C, es una variable binaria que toma los valores 0 ó 1. La restricción presupuestaria se plantea de un modo convencional, teniendo en cuenta que los salarios siguen la siguiente estructura, que incluyen implícitamente un proceso de learning-by-doing:

$$e_{is}=e\left(a_{is}^h,s\right)\eta_{is} \quad (2.87)$$

Donde η es un shock idiosincrásico. A partir de un resultado de Schulhofer-Wohl (2006), es posible mostrar que si las utilidades individuales de hombre y mujer toman la forma $u_i=\ln\left(C_i+\theta_i n_i^C\right)$ y las elecciones verifican la propiedad de pareto-eficiencia en el sentido expuesto más arriba, existe una cardinalización tal que cada hogar maximiza la suma de las utilidades vitales de sus miembros sujeta a una restricción presupuestaria intertemporal. Esto es, se verifica que $u_m+u_f=g\left(a_m^h,a_f^h\right)$, siendo esta última una función que, evaluada en el matching, arroja el valor del matrimonio para los individuos. En cuanto a la realización del matching, cada individuo posee unas preferencias maritales dadas por:

$$u_m = \overline{u}_m\left(a_m^h, a_f^h\right) + \beta_m\left(a_f^h\right) \quad (2.88)$$

$$u_f = \overline{u}_f\left(a_m^h, a_f^h\right) + \beta_f\left(a_m^h\right) \quad (2.89)$$

La utilidad individual será igual, por tanto, a un componente de renta generada a lo largo del matrimonio dados los stocks de capital humano de partida en la tercera fase, para un acuerdo de reparto interno de ingresos dado, más un elemento de satisfacción subjetiva dependiente del capital humano de la pareja. Un emparejamiento en la segunda fase se producirá para todas aquellas combinaciones en las que la suma de las utilidades individuales se igualen ex ante a la utilidad conjunta para el mismo vector de capital humano de la pareja. Para que el emparejamiento sea estable, el excedente del matrimonio deberá ser positivo, esto es, el valor total del mismo menos la utilidad subjetiva de permanecer soltero deberá ser positivo. El problema se resuelve hacia atrás desde la primera fase, de manera que la inversión en capital humano se decide maximizando la diferencia entre la utilidad esperada asociada a cada nivel de stock menos los costes de adquisición del nivel educativo; implícitamente, por tanto, en esta decisión se considera tanto el retorno económico individual de la formación, como el retorno económico de "la sociedad" matrimonial, tanto los derivados del reparto de las rentas como aquellos de origen subjetivo.

Las decisiones matrimoniales han recibido una especial atención en el contexto de la inmigración. En concreto, la denominada teoría de la inversión familiar explica cómo, en un marco de restricciones de liquidez, para muchos inmigrantes la estrategia más adecuada tras la la llegada al nuevo país es el matrimonio, como vía para financiar los gastos en educación mediante los fondos aportados por la oferta laboral del cónyuge. Este enfoque, que ha sido objeto de un tratamiento predominantemente empírico en trabajos como los de Bernhardt y Backus (1990), Baker y Benjamin (1997) y Cobb-Clark y Crossley (2004), recibe una fundamentación teórica en **Cohen-Goldner et al. (2009)**.

En lugar de centrarse en el ciclo vital completo, como el modelo de Chappori et al. (2015), el que nos ocupa estudia solamente la fase de inversión en educación una vez que la pareja ya se ha formado, a lo largo de dos períodos. Esto permite eludir el aparato analítico ligado a la cardinalidad y usar en su lugar un esquema de maximización de rentas conjuntas sujetas a una asignación eficiente de utilidad dentro de la pareja, lo que permite simplificar el aparato analítico y dotar de mayor parsimonia y elegancia al modelo. El capital humano de cada esposo se compone de un elemento importado de su país de origen y otro desarrollado en el país de recepción; cada uno de ellos crece por razones diferentes. El primero (denotado con el subíndice 0) se acumula a una tasa exógena (g, con $g_M > g_F$), debido a la mejora progresiva de adaptación a las condiciones del país anfitrión. El segundo (subíndice 1) seguirá una ecuación de acumulación convencional, con tasa de depreciación y función de producción creciente y cóncava respecto al input educativo, el tiempo destinado al aprendizaje en el tiempo de trabajo durante el primer período, que tendrá un coste en términos salariales. Las rentas salariales de cada miembro de la pareja se aplicarán a su capital individual, el cual a su vez se forma por composición de los elementos importados y autóctonos:

$$FY_s = y_{Ms} + y_{Fs};\ s = 1,2 \quad (2.90)$$

$$y_{js} = Y_{js}\left(1 - n_s^h\right);\ j = M,F \quad (2.91)$$

$$Y_{j1} = e_s a_{0js}^h a_{1js}^h \quad (2.92)$$

Donde n^h representa tanto la fracción de tiempo de trabajo dedicada a la formación, como la fracción de la renta salarial sacrificada al acometer la formación. Se adoptará en adelante la normalización $a_{1j1}^h = 1$. En ausencia de restricciones crediticias, sería posible una maximización intertemporal de la renta total del matrimonio descontado. Sin embargo, cuando dichas restricciones están presentes el problema se abordará en dos pasos sucesivos. En el primero, se derivará la frontera de ganancias del matrimonio, como maximización de los ingresos alcanzables en el segundo período para cada nivel de ingresos del primer período. Este problema de optimización se realizará con respecto a los esfuerzos en educación de los cónyuges o, equivalentemente, respecto a sus sacrificios salariales. En el segundo período no habrá incentivos a invertir en capital humano y la pareja se limitará a asignar su tiempo entre consumo y trabajo, maximizando la utilidad de uno de ellos sujeto a un nivel de utilidad del otro y a la frontera de posibilidades salariales o, equivalentemente, buscando un punto de tangencia entre la frontera de posibilidades de utilidad y la frontera de posibilidades salariares, dadas las inversiones en formación acometidas en el primer período.

Centrándonos en el problema del primer período, las cpo pueden sintetizarse en la siguiente ecuación:

$$\frac{\dfrac{\partial y_{M2}}{\partial n_{M1}^h}}{\dfrac{\partial y_{M1}}{\partial n_{M1}^h}} = \frac{\dfrac{\partial y_{F2}}{\partial n_{F1}^h}}{\dfrac{\partial y_{F1}}{\partial n_{F1}^h}} \quad (2.93)$$

Esto es, la solución óptima interior pasaría por igualar los retornos de la inversión en capital humano entre esposos. Teniendo en cuenta que el impacto de la inversión en educación sobre la renta del primer período es el mismo para los dos esposos, la anterior condición se reduce, siendo h la función de inversión en capital humano, a:

$$\left(1+g_{0M}\right)\frac{\partial h_M}{\partial n_{1M1}^h}=\left(1+g_{0F}\right)\frac{\partial h_F}{\partial n_{1F1}^h} \quad (2.94)$$

Esto es, aquel esposo con un crecimiento menor de su capital importado debería trabajar más. O también:

$$-\frac{a_{oM1}^h}{a_{0F1}^h}=-\frac{a_{oM1}^h\left(1+g_{0M}\right)h_{1M}}{a_{oF1}^h\left(1+g_{0F}\right)h_{1F}} \quad (2.95)$$

El miembro de la izquierda recoge la relación de intercambio entre stocks de capital humano que puede producirse entre miembros del matrimonio en el primer período para dejar los ingresos del mismo constantes[25], mientras que el segundo miembro refleja el concepto análogo para el segundo período. En otras palabras, el primer miembro es la expresión matemática de la pendiente de la curva isorenta del período 1 y el segundo, del período 2[26], de manera que la tangencia entre ambas determina el punto de inversión eficiente.

Es notable que, en ciertas circunstancias, la configuración de la frontera salarial incluye equilibrios esquina, esto es, la asignación de todo el tiempo del primer período a trabajo o a inversión. En concreto, la inclusión de estas soluciones exige que $h_{nj}(1)\neq 0$ y $h_{nj}(1)<\infty$. En el primero de ellos, la igualdad anterior entre pendientes se convierte en una desigualdad con signo $>$, de suerte que la tasa de retorno de la formación es estrictamente superior para el marido: $\left(1+g_M\right)h_n(1)>\left(1+g_F\right)h_n(1)$. En tal caso la elevación de las rentas del primer período pasa por un aumento del trabajo de la mujer hasta llegar a un punto en que su tasa de retorno vuelva a igualarse con la de su marido, mientras que este dedicará todo su tiempo a formarse. En el segundo caso, si ambos cónyuges dedican todo el primer período a trabajar, el retorno del marido será superior; en consecuencia, para aumentar los ingresos del segundo período será necesario que este último dedique algunas horas a la formación hasta que sus tasas de retorno se igualen, mientras que la mujer dedicará todo su tiempo a trabajar.

---

25 El capital humano autóctono no entra en la pendiente al haberse normalizado a 1.

26 Dicha pendiente pone de manifiesto que el único instrumento de transferencia de rentas entre períodos es la acumulación de capital humano en el país de acogida.

Una vez determinada la relación óptima entre ingresos del primer y segundo período y la curva de posibilidades salariales $y_2 = f(y_1)$, habrá que decidir el par de consumos óptimos sujeto a tal relación; esto es, las decisiones de reparto del consumo entre cónyuges y de inversión no pueden separarse, teniendo por tanto estas últimas un carácter marital. Más concretamente, se tratará de maximizar la utilidad vital de cualquiera de los cónyuges sujeta a un nivel de utilidad del otro, la composición de la renta y la curva de posibilidades salariales. Formalmente, el programa a resolver será el siguiente:

$$Max_{\{n_{sM}^h, n_{sF}^h, C_{sM}, C_{sF}\}} \; u_{1M} + \frac{u_{2M}}{1+\rho} \text{ s.a:}$$

$$u_{1M} + \frac{u_{2M}}{1+\rho} = \bar{u};$$

$$y_s = C_{sM} + C_{sF};$$

$$y_2 = f(y_1) \quad (2.96)$$

Las cpo, para soluciones interiores, se traducen en la igualdad de las tasas de retorno y las relaciones marginales de sustitución:

$$(1+g_M)h_{nM} = (1+g_F)h_{nF} = \frac{u_{1M}}{\beta u_{2M}} = \frac{u_{1F}}{\beta u_{2F}} \quad (2.97)$$

Únicamente cuando las preferencias son idénticas entre cónyuges y homotéticas, el vector de tiempos de aprendizaje que satisfacen el anterior sistema de ecuaciones se corresponden con un único punto en la frontera de posibilidades salariales, independientemente del reparto del consumo entre esposos. Esto no significa, sin embargo, que dicho vector pueda ser determinado independientemente de las preferencias de los miembros de la pareja. Otro efecto notable del carácter vinculante de las restricciones de liquidez es que las tasas de retorno de los esposos, que se igualan para soluciones interiores, son mayores que el tipo de interés de mercado al que podrían prestar o tomar prestado en un mercado son fricciones. Sin imperfecciones en los mercados de crédito, esta ineficiencia se resolvería incrementando el tiempo de formación en el primer período, pero la existencia de tales fricciones lo hace imposible. Esto quiere decir que en general el trabajo de ambos cónyuges deberá ser mayor que sin fricciones cuando las soluciones son no esquina, aunque cuando estas aparecen esta proposición solo se verificará para el trabajo de uno de los dos. Es posible demostrar también que con fricciones de crédito el vector de inversiones en educación en general no es independiente de las dotaciones de capital humano importado, al afectar estas a la relación marginal de sustitución del consumo; sin embargo la función que relaciona las mismas con el vector de inversiones en capital humano autóctono es homogénea de grado cero en los dos stocks iniciales, por lo que si el cambio en las mismas no implica cambios relativos, será neutral sobre la asignación óptima.

Cuando los mercados de capital no presentan fricciones, la función objetivo a maximizar es la suma descontada de los ingresos del primer y segundo período, siendo el tipo de interés del crédito la tasa de descuento. En efecto, en este contexto es posible aplicar el teorema de separación y resolver, en una segunda fase, la maximización de la función de utilidad respecto a dicha renta máxima. De este modo, se optimiza:

$$Max_{y_1}\ y_1 + \frac{y_2}{1+r_1}; y_2 = f\left(y_1\right) \quad (2.98)$$

Siendo f la frontera de posibilidades salariales. La cpo establece que:

$$-\frac{dy_2}{dy_1} = 1 + r_1 = \left(1 + g_M\right)h_{nM} = \left(1 + g_F\right)h_{nF} \quad (2.99)$$

II.3. Capital humano y capital social.

La interrelación entre ambos conceptos cobró especial a partir del trabajo de **Coleman (1988),** para quien el capital social es el conjunto de aspectos de las estructuras sociales que facilitan la interrelación de los actores, bien individuales o corporativos. Sus propiedades son similares a las de otros tipos de capital, en el sentido de tratarse de un factor productivo, al hacer posibles ciertos fines que en su ausencia no serían alcanzables. Existen varias formas de capital social, como la fiabilidad de los contratos implícitos en las relaciones, los canales de información, o la capacidad de poner en práctica sanciones al incumplimiento de las normas.

Determinadas variantes de capital social son catalizadores en la acumulación de capital humano. Es el caso, por ejemplo, del capital social familiar (o background familiar). Según Coleman, la influencia de la familia sobre el proceso de aprendizaje se concreta a través de la financiación que proporciona, el propio capital humano de los padres y el capital social del entorno familiar. Este último básicamente se compone del entramado de las relaciones entre sus miembros, de modo que si este distorsiona por cualquier razón -falta de atención, conflictos- la formación de habilidades, de nada servirá el capital humano disponible en la familia. La habitual presencia del capital humano de los padres en los modelos de generaciones solapadas presupone la existencia de una base eficiente de capital social en la familia que coadyuva a la creación de capital humano. Otra dimensión relevante del capital social viene dada por las relaciones de la familia con su entorno. A modo de ejemplo, la movilidad escolar permanente puede impedir la eficaz asimilación de los conocimientos del niño. O la falta de integración de la familia en su entorno, debido a razones étnicas o religiosas, puede conducir a la formación de ciertas capacidades privadas solamente rentables en ámbitos muy reducidos, pero no en los procesos productivos de mercado. En sentido contrario, una integración profunda genera efectos de emulación sociales en la formación de capital humano, multiplicando las influencias positivas sobre el aprendizaje. En este apartado se ofrece una panorámica de las aportaciones más recientes en el ámbito de equilibrio parcial sobre la influencia ejercida por las distintas variantes del capital social sobre las decisiones de inversión en capital humano. La modelización, en todos los casos, tiene una evidente raíz beckeriana, si bien en cada uno de ellos la presencia del capital social se sustancia en distintos elementos del problema de optimización: la función de utilidad, la incertidumbre sobre los ingresos futuros en la restricción presupuestaria o sobre el propio incremento futuro de la productividad, o la tipología de efectos externos en la tecnología de aprendizaje. Por una vía u otra, la influencia es evidente.

Capital humano, etnias y religiones. Dentro del análisis de la influencia del capital social sobre la inversión en capital humano y en concreto al estudiar la importancia del entorno familiar, una rama de la literatura lindante con la Sociología ha dirigido su mirada hacia la inevitabilidad de que determinadas habilidades y pautas de eficiencia ligadas a etnias determinadas se transmitan entre generaciones a través del capital humano, creando más o menos facilidades para la integración social. En definitiva, se trata de analizar el peso de a etnicidad sobre la movilidad intergeneracional.

Una vez más, la literatura empírica es muy abundante en este campo, pero los desarrollos teóricos son mucho más escasos. La contribución seminal se debe a **Borjas (1992**), quien plantea, en el espíritu de Becker y Lewis (1973) y utilizando efectos externos à la Lucas (1988), una estructura familiar en la que el cabeza de familia decide la inversión a realizar en sus hijos, sobre la base de unas preferencias CES que dependen de su propio consumo y el capital humano de la siguiente generación. Su tiempo disponible se reparte entre el trabajo y el dedicado a la educacion de los niños. Por otro lado, la etnicidad interviene en el modelo a través de un efecto externo del nivel medio del grupo racial en la función de producción de capital humano. Las tres ecuaciones que definen el modelo con estos supuestos serán:

$$u_s = u\left(C_s, a_{s+1}^h\right) \quad (2.100)$$

$$C_s \leq \left(1 - n_s^h\right) e_s a_s^h \quad (2.101)$$

$$a_{s+1}^h = B\left(n_s^h\right)^{\alpha_1} \left(\bar{a}_s^h\right)^{\alpha_2} \quad (2.102)$$

Será la suma de las elasticidades $\alpha_1 + \alpha_2$ la que determine si las habilidades de los descendientes convergerán al cabo del tiempo o mostrarán una influencia permanente de la etnia de origen. El problema de optimización arroja una solución $n^h\left(\overline{a}_s^h, a_s^h\right)$ con signo ambiguo en ambas derivadas. Un incremento en el capital humano de los padres produce un efecto sustitución a favor del tiempo de trabajo y un efecto riqueza a favor del tiempo en funciones parentales; cuando la elasticidad entre consumo y calidad de los hijos en la función de utilidad de los padres es mayor que 1, predominará el signo negativo (y en el caso especial de una utilidad Cobb-Douglas dicha elasticidad será nula, por lo que los dos efectos se compensarán). Por el contrario, ante elasticidades de sustitución altas entre los argumentos de las preferencias el signo del tiempo de educación respecto al capital étnico será positivo: los padres aprovecharán el refuezo que este capital supone para dedicar más tiempo a los niños, sacrificándolo de su propio consumo.

A pesar de las ambigüedades de signos anteriores, el de las elasticidades del capital humano frente a los stocks paterno y étnico obtenidos a partir de la siguiente expresión son inequívocamente positivos:

$$a_{s+1}^h = \left[n_s^h\left(a_s^h, \overline{a}_s^h\right)\right]^{\alpha_1} \left(a_s^h\right)^{\alpha_1} \left(a_s^h\right)^{\alpha_2} \quad (2.103)$$

Para discernir si las diferencias en la calidad de los individuos entre grupos aumentan o se contraen a lo largo del tiempo, se parte del supuesto de agente representativo aplicado a los cabezas de familia de la etnia, tal que $a_s^h = \overline{a}_s^h$. A partir de ahí se calcula el valor de la elasticidad $\frac{\partial \ln \overline{a}_{s+1}^h}{\partial \ln \overline{a}_s^h}$; si esta es menor que 1, el stock de capital de los diferentes grupos podrán converger a lo largo de las generaciones, al apuntar a una disminución a lo largo del tiempo del capital humano específico de la etnia[27]. Lo contrario sucederá si es mayor que 1 y si es igual a 1 las diferencias relativas se mantendrán. Estas condiciones estarán ligadas a la existencia, respectivamente, de rendimientos conjuntos decrecientes, crecientes o constantes en la función de acumulación de capital humano.

[27] El modelo explica la pérdida o ganancia de influencia del capital humano a lo largo de generaciones, pero no la asimilación de capital humano externo a la etnia.

Chiswick (2009)[28][29] explica de un modo más elaborado el fenómeno de la asimilación a través de un modelo de raíz beckeriana de consumo de commodities. El individuo posee una función de utilidad dependiente de dos commodities, una étnica (que agrupa bienes y servicios que generan satisfacción solamente en el contexto de la comunidad étnica) y otra general. A su vez, el tiempo puede dividirse en tres usos: producción de la commodity étnica, producción de la general y acumulación de capital humano. Dentro de este último se distinguen dos subtipos: un capital étnico, compuesto por las habilidades y experiencias relevantes para la producción de la commodity étnica y uno general, que es el concepto simétrico. Esta tecnología se resume en las siguientes ecuaciones:

$$U = U\left(E_s, C_s\right) \ (2.104)$$

$$1 = n_s^E + n_s^C + n_s^h \ (2.105)$$

$$E = E\left(a_s^{hE} n_s^E\right);\ C_s = C\left(a_s^{hC} n_s^C\right)$$

Para cerrar el modelo es necesario además especificar las ecuaciones de acumulación de las dos clases de capital humano. Teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al aprendizaje puede usarse en la producción de uno u otro, estas se expresan de forma inversa:

$$n_s^h = n_s^{hE} + n_s^{hC}$$

$$n_s^{hE} = \varphi_E\left(a_s^{hE}\right) / B^E;\ \varphi_E', \varphi_E'' > 0$$

$$n_s^{hC} = \left[\varphi_C\left(a_s^{hC}\right) - \psi a_s^{hE} a_s^{hC}\right] / B^C;\ \varphi_C', \varphi_C'' > 0 \ (2.106)$$

El parámetro ψ puede tener cualquier signo y captura posibles efectos externos desde el capital humano étnico hacia la acumulación de capital humano general. Chiswick denomina a este parámetro de “tensión étnica”, de modo que cuando es positivo refleja externalidades positivas desde el capital humano no étnico hacia el étnico y viceversa cuando es negativo. El problema de maximización de las preferencias se resuelve optimizando la función de utilidad sujeta a las funciones de producción de las commodities, la restricción de asignación del tiempo y las ecuaciones implícitas de acumulación de capital humano. Es reseñable que, dada la peculiar tecnología de las commodities, en que ambas pueden producirse exclusivamente a partir de tiempo, no es necesaria la adquisición de ningún bien final. Por otro lado, el hecho de que no exista un tiempo de trabajo de

---

[28] El trabajo se basa en Chiswick (2005), cuyo foco se dirige a las commodities religiosas como ejemplo representativo de bienes étnicos.

[29] Otros trabajos relevantes en esta línea son los de Constant y Zimmermann (2008), sobre medición de las preferencias por capital humano étnico y, ya en un marco de equilibrio general, el de Kahanec (2006).

mercado implica que los únicos costes de oportunidad derivados del empleo del tiempo en un cierto uso vendrán dados por combinaciones de productividades y utilidades marginales, sin la intervención de un salario de mercado. De este modo y excepcionalmente se obvia la inclusión de una ecuación presupuestaria convencional entre las restricciones del problema.

Las cpo establecen: i) La igualdad del valor marginal del tiempo utilizado en la producción de ambas commodities; Y ii) Dos ecuaciones respecto al tiempo asignado a la acumulación de las dos clases de capital humano, que igualan el valor marginal del tiempo dedicado a la acumulación con el coste de oportunidad de oportunidad del mismo en la producción de commodities. Combinando las dos expresiones, se tiene la igualdad entre la relación marginal de sustitución entre E y C (o pendiente de una curva de indiferencia entre las dos commodities) y la pendiente de la frontera de posibilidades de producción entre los tipos de capitales humanos. La pendiente de esta última puede tener cualquier signo, aunque una condición suficiente para que sea negativa es que $\psi \leq 0$. Así:

$$\frac{U_E E' n^E}{U_C C' n^C} = \frac{\varphi'_C - \psi a^{hC}}{\varphi'_E - \psi a^{hE}} \quad (2.107)$$

El punto de tangencia da por resultado el equilibrio en un espacio en el que pueden se representan los niveles deseados de capital humano. Desde un punto de vista analítico, las 3 cpo más la restricción del tiempo permiten endogeneizar los 4 usos óptimos del tiempo. Como se aprecia, el parámetro B no altera la pendiente de ambas curvas en el punto de tangencia[30]. Respecto a ψ , influirá sobre la pendiente y la forma de la frontera de posibilidades de producción. Cuanto más elevado sea, la tangencia con una línea de indiferencia tenderá a arrojar una combinación de stocks de capital humano en la que la participación del general es superior; por el contrario, cuando este último produce una externalidad negativa, la cesta óptima de capitales humanos contendrá una mayor proporción del de tipo étnico. El conjunto de pares de equilibrio de los integrantes de un grupo y su posición en el espacio de las commodities determinará su tendencia a la asimilación (nube de puntos de equilibrio más cercanos a la bisectriz del plano) o al aislamiento cultural.

El modelo tiene múltiples aplicaciones en el campo de la sociología, aunque quizá una de las más atractivas es el estudio de l**os procesos de asimilación a través de los mat-**

[30] La influencia de B es el desplazamiento de las curvas de indiferencia a lo largo de una senda de expansión, tal que todas ellas presentan la misma pendiente en su punto de intersección con la recta que define dicha senda.

rimonios interétnicos. Aceptando el resultado recurrente en la literatura (con origen en Becker, 1981) de que las personas suelen intentar emparejarse con otros individuos que posee niveles similares de capital humano, la principal implicación de este modelo es que aquellas personas con un componente étnico muy fuerte buscarían a otras con un perfil semejante y al revés aquellas con una inclinación más marcada por las commodities aculturales. Por el contrario, personas cuya tasa de retorno derivada del cambio de entorno cultural es superior por cualquier motivo podrían encontrar más atractiva la opción del matrimonio interétnico, debido a sus vínculos más débiles con los miembros de su propio grupo, aunque esto suele implicar que son aquellas con un nivel educativo más bajo. Las externalidades positivas del capital humano (o, en terminología de Chiswick, la ausencia de tensión étnica en las decisiones de acumulación) favorecen por tanto los matrimonios interétnicos, al generar una nube de puntos de equilibrio más próximos a la bisectriz en el plano de las commodities; el matrimonio interétnico sería por tanto atractivo para todo tipo de individuos, tanto más cuanto menor fuera su nivel educativo. Por el contrario, cuando existen externalidades negativas entre uno y otro tipo de capital, los puntos de equilibrio tenderán a estar polarizados cerca de los ejes dentro de un grupo étnico, dependiendo de la magnitud relativa de sus utilidades marginales por cada commodity. En este último marco, solamente aquellos más próximos al eje de la commodity acultural tenderían a acometer el matrimonio interétnico.

Dentro de la teoría de capital social y en su vertiente de relación con el capital humano son importantes los trabajos sobre **la importancia del entorno familiar sobre las decisiones de acumulación de este activo**. En el capítulo sobre Capital Humano y Educación se analizará la influencia de los diferenciales en la renta familiar sobre la escolarización, aunque en este se realizarán algunas reflexiones más generales. Un buen ejemplo de modelización dentro de este tipo de literatura -en la que de nuevo predomina el enfoque empírico- es el trabajo de **Sjödren (2000)**. El modelo que se plantea refleja algunos aspectos característicos de esta literatura, como diferencias en la renta familiar o en el acceso al crédito, aunque incluye también uno más propio de la literatura sobre capital social, como es el perfil profesional de los padres. Así, en un contexto de incertidumbre sobre la idoneidad profesional del individuo que invierte en capital humano, la primera será tanto mayor cuanto más distante esté la alternativa profesional de la opción elegida por sus progenitores.

Los individuos viven dos períodos: estudian en el primero y trabajan en el segundo, debiendo elegir el nivel de escolarización y el tipo de ocupación que maximice su utilidad intertemporal. Estas preferencias se concretan en:

$U_j = u\left(C_{1j}\right) + \gamma Eu\left(C_{2j}\right)$ (2.108)

Siendo la utilidad cóncava, j la ocupación escogida por el individuo y γ la aversión al riesgo, dado que la utilidad del segundo período es incierta al serlo también el grado de éxito que alcanzará en su elección profesional. La estrategia de optimización pasará por resolver el máximo de la utilidad intertemporal (para la que se utiliza una identificación de elasticidad de sustitución intertemporal constante) en el stock de capital humano, para posteriormente elegir aquella actividad que, evaluada en el stock de capital humano, proporciona la mayor satisfacción vital.

Durante el período escolar el agente vive del dinero de sus padres, neto de los costes educativos, mientras que en la etapa laboral se financiará íntegramente con su salarios. No hay crédito ni herencias entre generaciones. Así, las restricciones presupuestarias de ambos períodos serán:

$C_{1j} \leq Y_1 - p_1^e a_2^h;\ C_{2j} = Y_2$ (2.109)

Donde las rentas de primer período son las familiares, que varían entre individuos, como también pueden hacerlo los costes unitarios de adquisición del capital humano, pudiendo ser más elevados para aquellos con orígenes más humildes o -en terminología de Becker- una dotación inferior de capital humano de partida. Cuando el individuo elige una profesión, adquiere una habilidad específica A_j asociada a la misma, con una función de ingresos salariales Cobb-Douglas dependiente de la misma. Siendo el e el salario por unidad de capital humano:

$Y_{2j} = e_j a_2^{hj} \left(A_j\right)^{\alpha_j}$ (2.110)

Cada individuo valora subjetivamente sus posibilidades de adquisición de la variable A, de modo que estimarán una distribución del tipo:

$\ln A_j \sim N\left(\overline{A}_j, \sigma_j^2\right)$ (2.111)

Se supone que la previsión del éxito que pueden alcanzar cultivando una cierta habilidad específica será tanto más acertada cuanto más próxima esté esta a la desempeñada por sus padres, por lo que a mayor lejanía, mayor varianza. En cuanto a la población en su conjunto esta distribución se considera logarítmico-normal de media 0 y varianza unitaria. Hechos estos supuestos, el problema a resolver por el individuo será:

$Max_{a_{2j}^h}\ E\left[U_j\right] = u\left(Y_1 - p_1^e a_2^h\right) + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} u\left(e_j a_{2j}^h A_j^{\alpha_j}\right) f\left(A_j\right) dA_j$ (2.112)

La cpo que se obtiene es familiar, solo que adaptada a este marco: el valor sombra de los desembolsos en educación en el primer período debe igualar al ingreso marginal esperado en el segundo. Partiendo de esta condición es posible despejar el stock de capital humano de equilibrio, sobre el que se pueden realizar ejercicios de estática comparativa. Por ejemplo, el stock será creciente a la renta inicial y decreciente al precio de la educación. El efecto del salario por unidad de capital humano es ambiguo, predominando un signo positivo para bajos niveles de aversión al riesgo y uno negativo para aquellos agentes más aversos al riesgo, dado que para ellos funcionará como un sustitutivo de la inversión en capital humano. Una mayor varianza actúa a favor de la inversión, mientras que una mayor sensibilidad α lo hará en el mismo sentido con aversión al riesgo alta excepto si la esperanza $\bar{A}$ es elevada; con aversión al riesgo más baja el signo será también positivo salvo si la esperanza de la habilidad alcanzable es muy reducida. En definitiva, la incertidumbre actuará en general fomentando la inversión en la medida en que contribuya a proporcionar un aseguramiento a los agentes.

Para comprobar la incidencia del entorno familiar sobre la elección de educación, este se sustancia en 3 variables: la renta familiar, el coste de la educación (se entiende que este será mayor cuando se procede de entornos más deprimidos económicamente) y la varianza estimada de la distribución de $\ln A_j$. Siendo I una variable de estímulo y B una de las que definen el entorno, se dice que este último incrementa la sensibilidad a los estímulos cuando $\frac{\frac{\partial E\left[U_j\right]}{\partial I}}{\partial B} > 0$ y que la reduce cuando la derivada anterior presenta un signo negativo. Cuando los niveles de aversión al riesgo son altos, los agentes son más sensibles a incentivos salariales y a la elasticidad salarial de las habilidades (en un sentido positivo) si su habilidad es suficientemente alta, mientras que lo serán en sentido negativo para bajos niveles de habilidad. Por el contrario, para niveles de aversión al riesgo moderados los individuos procedentes de entornos menos favorecidos económicamente son menos sensibles a los incentivos. Independientemente del grado de aversión al riesgo, los agentes serán más sensibles a los incentivos cuando consideran ocupaciones más alejadas de las de sus progenitores, al presentar estas una mayor incertidumbre.

Dentro del análisis del entorno social que condiciona la inversión en capital humano **los efectos de imitación (peer effects)** ha sido otra área ha suscitado interés durante los útimos 20 años. Si bien los primeros estudios (Benabou (1996), Durlauf (1996), DeBartolome (1990)) se centraban en el impacto de la segregación sobre el éxito de los procesos de escolarización (ver capítulo al respecto), otros trabajos se han dirigido a modelizar la demanda de emulación en el contexto de las decisiones de formación; dentro de estos pueden destacarse los realizados por Hope et al. (2005), Peters (2007), Rege (2008) y Bidner (2010, 2014). De entre los distintos ángulos cubiertos por estos trabajos, nos centraremos en aquella modelización en la que el individuo adopta una actitud activa frente a las características del entorno; **Bidner (2010**) es el que todos ellos aborda este tema de un modo más directo, al estudiar una clase muy particular de efectos externos en la formación de capital humano: aquellos en los que el desbordamiento hacia otros individuos se produce a consecuencia de la proximidad social o emparejamiento, sea este del tipo que sea. Desde este punto de vista, la inversión en capital humano tendría por objeto aumentar el valor del individuo como atractor de determinados contactos. Sería un fenómeno, pues, que no estaría muy lejano a las inversiones en educación para favorecer el emparejamiento con parejas similares y asegurarse un lugar en estratos sociales elevados y de hecho este tipo de “competencia por el emparejamiento” puede interpretarse también como un modelo de inversión para maximizar la rentabilidad futura del matrimonio.

El modelo se basa en unidades familiares que contienen un adulto y un niño. Cada individuo presenta una predisposición al aprendizaje, la cual se identifica con una dotación estocástica de capital humano $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$. Las preferencias de los padres dependen mediante una combinación lineal tanto de su propio consumo[31] como del capital humano acumulado por los niños, existiendo un coste de formación ϕ , que depende de la tipología del agente y del gasto de inversión total, tanto de la realizada hacia ellos mismos como de la encaminada a dotar a sus hijos de capital humano. Los efectos externos se concretan en una función de acumulación de conocimientos CES que depende tanto del esfuerzo educativo de sus padres como del realizado por las familias de sus pares; para simplificar, el matching se concretará en parejas de personas. Si denotamos i^C la inversión de los padres que tiene por fin aumentar su consumo y x, x' las inversiones del hogar y las del par en capital humano, el excedente del cabeza de familia podrá escribirse como:

$$S = \alpha u(C) + (1-\alpha) i^h(x, x') - \phi\left(i^C + i^h, \omega\right); \; i^C = C \quad (2.113)$$

Dicho excedente se maximizará en C y x, sujeto a ciertas expectativas sobre x´ cuya formación describiremos más adelante. La secuencia de decisiones es la siguiente.

31 El consumo de los padres está relacionado tanto con su renta laboral -el tiempo puede asignarse entre ocio y trabajo- como con inversiones que ellos llevan a cabo para mejorar su productividad. El modelo no expicita el conjunto de decisiones que conducen a la conformación de la riqueza-consumo de los padres, sino que las subsume en una sola decisión de inversión en la propia riqueza.

Primero el padre observa la dotación del niño y, conforme a ella, elige sus niveles de inversión, propios y en su hijo. En una segunda fase, las familias acuden al mercado de emparejamientos, que funciona sin fricciones, y en el que elemento clave es que estos se decidirán en función del nivel de riqueza-consumo de las familias como índice de posibilidades de inversión en los hijos. Este mercado se dirá en equilibrio cuando se hayan agotado todas las posibles combinaciones entre los que operan en él; aquellos que no hayan logrado emparejarse acumularán capital humano como si tuvieran un par cuya familia hubiera hecho una inversión nula en este activo. La economía estará en equilibrio cuando: i) los padres hayan maximizado su excedente dadas unas conjeturas sobre el resultado del mercado de emparejamientos y ii) la asignación de equilibrio en dicho mercado no sea contradictoria con dichas expectativas.

Para cerrar el modelo, se consideran dos posibles equilibrios en el mercado de pares: uno conjunto y otro separado. En el equilibrio conjunto, existe un único nivel de riqueza común a todas las familias (C^*), de modo que los emparejamientos se efectúan de un modo básicamente aleatorio. Teniendo en cuenta este hecho, en la maximización del excedente familiar se considerará un único nivel de inversión en capital humano, igual en todos los participantes en el mercado de emparejamientos. De existir este equilibrio, el nivel óptimo resultante del problema de optimización deberá coincidir con C^* . Puede demostrarse que si el altruismo es imperfecto ($\alpha < 1$), no existirá un equilibrio conjunto; si existe, no tiene por qué ser único en la inversión en capital humano, al ser el beneficio marginal por la acumulación de este activo no decreciente en la inversión de las restantes familias. Mientras, en un equilibrio conjunto las familias observan diferentes niveles de riqueza en el mercado de emparejamientos y a través de ellos realizan inferencias correctas sobre las inversiones de capital humano realizadas en sus descendientes. Para ello, deben existir funciones $i^C(\omega)$ e $i^h(\omega)$, continuas y monótonas respecto a la dotación de los niños, de suerte que que al observar la riqueza C se pueda inferir ω y a través de la dotación, a^h . Expresado matemáticamente, si se observa que una familia tiene una riqueza z, deberá poder concluirse que esta de la tipología $\left(i^h\right)^{-1}(z)$ y, por tanto, habrá realizado una inversión en formación $\mu(z)=i^h\left[\left(i^C\right)^{-1}(z)\right]$. Por tanto un equilibrio separado estará dado por un par de funciones de inversión i^h, i^C y una función de emparejamiento h tales que: i) i^h, i^C son óptimas dada μ y ii) μ es consistente con i^h, i^C .

La resolución del problema parte directamente de la formalización de la definición anterior. Siendo las funciones del equilibrio aquellas que cumplen:

$$i^{C*}(\omega), i^{h*}(\omega) \in \mathrm{Argmax}_{i^h,\, i^C} \mathrm{V}\left(C, i^h, \mu, \omega\right) \text{ (2.114)}$$

La función μ deberá despejarse en forma implícita a partir de las siguientes cpo:

$$\alpha U_C + (1-\alpha) i_x^h \mu_C = \phi'; \; \mu_C = x \text{ (2.115)}$$

$$(1-\alpha) i_x^h = \phi' \text{ (2.116)}$$

Una de las regiones en mayor expansión dentro de la literatura de capital social es la confianza social (social trust); por tal se entiende las tendencias cooperativas de un miembro medio de la sociedad y su relevancia radica en ser un componente fundamental del éxito de las instituciones y por tanto un condicionante del crecimiento económico. La construcción de la confianza social se ha modelizado de diversas formas, pero desde comienzos de la década de 2000 comienza a ser tratada como un proceso de acumulación de capital y en algunos trabajos, se explotan los paralelismos con la teoría de la acumulación de capital humano. Si bien estos se encuentran predominantemente dentro del marco de equilibrio general dinámico, alguno como el de **Huang (2007)** opta por un enfoque de equilibrio parcial, contribuyendo así a microfundamentar los desarrollos más elaborados de otros autores. La aproximación desde el capital humano al *social trust* parte de la inculcación de las preferencias y las actitudes sociales por los padres a los niños no tanto sobre la base de principios morales, sino como solución a un problema de maximización de los pagos de tales preferencias, netos de los costes de educación, a lo largo de la vida de los hijos. En la línea de la teoría tradicional del capital humano, la conclusión fundamental de este tipo de modelos es que las tendencias cooperativas tenderán a prevalecer tanto más en el seno de la sociedad cuanto mayor sea la rentabilidad material que las acompaña.

En el enfoque de Huang[32], todo agente vive durante 2 períodos. En el primero, bajo control paterno, se le inculcan sus preferencias por la cooperación, teniendo en cuenta la fracción estimada Π de individuos que seguirán un comportamiento cooperativo en el futuro. Los costes de inculcación de las preferencias quedan recogidos en la función C, que será creciente y convexa en la intensidad de la tendencia cooperativa que se desea transmitir (a^h) y variará en función de la dotación de cada individuo ω , la cual representa la predisposición innata de los individuos a la cooperación. En el segundo período, el individuo produce y entra en contacto de una forma aleatoria con otros sujetos, cuya interacción genera determinados resultados económicos.

En correspondencia con la versión estática del problema, que se describe a grandes rasgos en el pie de página, existe una probabilidad p de que la información sobre el capital humano cooperativo sea conocida y 1-p de que sea oculta. En este último caso, con probabilidad q se detectarán a individuos que no están dispuestos a cooperar y con 1-q se será vulnerable ante comportamientos desleales ajenos. Cuando la tendencia cooperativa es conocida, se supone que existirá una institución que excluirá a los individuos con un capital inferior a $\underline{\alpha}$ de la participación en cualquier actividad conjunta con los restantes miembros; además en tal caso la ganancia G será superior que cuando la información es privada, por lo que $G \geq g$. El umbral de participación será decreciente respecto a Π : a mayor proporción estimada de individuos con tendencias cooperativas altas, tanta menos "penalización moral" será necesaria para generar un resultado cooperativo en los emparejamientos, ya que será menos probable ser defraudado. Con estas hipótesis, el individuo

[32] El modelo parte de un juego estático que se repite una sola vez, en el que agentes con distintos niveles de predisposición a la cooperación interactúan; dichos niveles están dados exógenamente; de hecho el enfoque de capital humano supone una endogeneización de dichas preferencias. En el juego estático, los agentes pueden cooperar o traicionar; si los dos cooperan se obtiene una ganancia g. Siempre que uno traiciona, tiene una pérdida dada por sus preferencias morales y que se mide por el parámetro α , que en la versión endógena será sustituido por el capital humano cooperativo. Si uno coopera y otro traiciona, el que se ve engañado incurre en una pérdida l y el que abusa de la confianza del primero obtendrá una ganancia g+d, a la que habrá que detraer el peso de sus principios morales. Existe además una probabilidad q de detectar a los "desertores". En este entorno, puede calcularse un nivel crítico de α ($\underline{\alpha}$) en función de los restantes parámetros, por encima del cual la estrategia dominante es siempre la cooperación.

al que se han inculcado tendencias cooperativas presentará un capital humano $a^h = \underline{\alpha}$ tendrá la siguiente renta vital esperada, descontando los costes de su educación:

$$E^j\left[Y|\Pi,\underline{\alpha},\omega^j\right] = \beta pG + \beta(1-p)\left[\Pi g - (1-\Pi)(1-q)l\right] - C\left(\underline{\alpha},\omega^j\right) \quad (2.117)$$

β es la probabilidad de que el juego continúe y mide la resistencia de la sociedad como red frente a posibles incumplimientos de los compromisos de algunos de miembros. La renta esperada para los individuos egoistas, en los que no se realizado ninguna inversión de capital humano, será:

$$E^j\left[Y|\Pi,0,\omega^j\right] = \beta(1-p)(1-q)\Pi(g+d) \quad (2.118)$$

Si el diferencial entre rentas netas para cada individuo es $\hat{E}^j\left[Y|\Pi,\omega^j\right] = E^j\left[Y|\Pi,\underline{\alpha},\omega^j\right] - E^j\left[Y|\Pi,0,\omega^j\right]$, es inmediato comprobar:

$$\frac{\partial \hat{E}^j}{\partial \omega^j} > 0; \frac{\partial \hat{E}^j}{\partial \Pi} > 0 \quad (2.119)$$

Cuanto mejor sea la dotación de capital humano cooperativo del individuo, tanto menores serán los costes educativos de los padres. Por otro lado, cuanto más alta sea la fracción estimada de individuos cooperativos tanto mayor será la probabilidad de encontrar a uno de ellos y mayor la ganancia del emparejamiento; además, disminuirá el umbral de participación en emparejamientos privados y se reducirá la necesidad de inversión en capital humano.

Siendo π^* la fracción real de individuos cooperativos, el equilibrio de Nash[33] debe caracterizarse porque la expectativa se confirme, esto es, $\Pi = \pi^*$. Un equilibrio con fracción nula de cooperativos siempre existirá, ya que si el resto de la sociedad no tiene este tipo de tendencia nadie invertirá aisladamente en el capital humano correspondiente, incurriendo así en unos costes, cuando sus beneficios esperados son nulos. La cuestión está en dilucidar si existirán equilibrios de Nash con valores positivos de inversión en capital cooperativo. Para ello se distinguen dos casos. Cuando las dotaciones son muy diferentes[34], existe un único equilibrio de Nash con inversión positiva y además este es es-

[33] El equilibrio de Nash será en general ineficiente, al presentar externalidades la decisión de las familias que no se tienen en cuenta en la determinación de la inversión óptima.

[34] Se entiende por un escenario de dotaciones polares aquel en el que, para algunos individuos, la dotación cooperativa es tan fuerte que incluso aunque $\Pi \to 0$ la estrategia dominante sería la de inversión positiva mientras que para otros, aunque $\Pi \to 1$ sería de inversión nula en capital.

table. Este vendría dado por la condición de diferencia de retornos nulos entre una y otra estrategia: $\hat{E}\left[\omega(\pi^*),\pi^*\right]=0$. La divergencia entre los costes es en este supuesto tan elevada, que no aparecen interacciones entre la conducta de los individuos, lo que explica la unicidad del equilibrio[35].

Cuando los costes son semejantes, puede encontrarse una variedad de resultados. Por ejemplo, los costes pueden ser similares e intermedios, en el sentido de que existe un intervalo $\left[\Pi_0,\Pi_1\right]$ tal que, por debajo de su extremo inferior, ninguno de los agentes invierte, mientras que por encima de su extremo superior todos ellos lo harán. En este caso existen tres equilibrios de Nash: uno interior, caracterizado al par $\left(\pi^m,\pi^m\right)$, con $\pi^m \in \left[\Pi_0,\Pi_1\right]$ y dos esquina, con π^* igual a 0 y 1, respectivamente. Mientras los dos últimos son estables, el primero es inestable, de suerte que una pequeña discrepancia en las expectativas sobre la fracción de individuos cooperativos respecto a la fracción de equilibrio conduce a una de las otras dos soluciones. Los costes también pueden ser predominantemente altos o bajos. Cuando se da el primero de estos casos, las dotaciones de origen son tan reducidas siempre existe un valor de Π tal que, por debajo de él, las inversiones en capital cooperativo serán nulas. En este caso solo existe un equilibrio en $\pi^*=0$ y además será estable. En la situación simétrica, con costes bajos, existirá siempre un equilibrio estable en $\pi^*=1$ y puede ser el único o no; si no lo es, existirán otros dos equilibrios interiores, de los cuales el de menor π^* es el estable.

Discriminación y capital humano. Una de las principales implicaciones de la teoría tradicional del capital humano es que diferencias en el nivel activo, en la medida en que impliquen niveles de productividad más elevados, deben llevar aparejados salarios reales más elevados. Existen diversas fricciones de mercado que pueden sustentar numerosos contraejemplos observados en la realidad, como estructuras de competencia imperfecta en el mercado de trabajo, información asímetrica sobre las características del individuo u obstáculos a la movilidad de los trabajadores en general, de los cuales las empresas se sirven estatégicamente alterando los niveles salariales respecto a su productividad marginal. Existe sin embargo otro ámbito clásico donde la modelización canónica del capital

---

[35] Si $\Pi > \pi^m$, será mayor el retorno de la inversión positiva, lo que acabará desembocando en una situación en la que todos los individuos realicen una inversión efectiva. Al revés con valores de la probabilidad estimada por debajo del valor de equilibrio que iguala las tasas de retorno.

humano se ha visto contestada en las últimas décadas: las diferencias salariales hombre-mujer. Polachek (2014), en un trabajo que supone la versión más actualizada de otros muchos sobre el tema, documenta la existencia de este gap, cuya intensidad sin embargo reviste niveles muy distintos según los países y en cualquier caso, tiende a estrecharse tendencialmente. A la hora de explicarlo han competido los autores más próximos a la línea tradicional beckeriana, que creen que dicha teoría puede generar explicaciones satisfactorias para este fenómeno, con otros que hacen énfasis en mecanismos ajenos a dicha teoría como variables más importantes.

La posición beckeriana se remonta **Mincer (1962) y Becker (1981,1991)** en el Treatise on the Family, quienes defienden que las diferencias salariales hombre-mujer son el reflejo de factores de oferta, principalmente la intermitencia en la oferta de trabajo de la mujer, consecuencia de la división tradicional del trabajo en el seno de la economía doméstica. Esta ausencia de continuidad genera una depreciación importante de su capital humano y por tanto resta atractivo a la inversión en este activo. En realidad esta respuesta es una aplicación directa del concepto beckeriano de beneficio marginal de inversión en capital humano, creciente en el número de períodos que restan hasta el final de la vida laboral. A este problema principal hay que añadir la experiencia en el propio centro de trabajo como fuente de acumulación de capital humano, de modo que la propia intermitencia, que suele traducirse en una rotación laboral más frecuente, rompe también esta vía de incremento de la productividad. Desde el lado de la demanda de trabajo, las empresas, conscientes de este patrón, ofrecen también un salario medio inferior a las mujeres. A pesar de esto, el origen de la desigualdad no es atribuible al mercado, sino que se sitúa en un rasgo estructural anterior a la realización de la transacción en sentido estricto.

Polachek (2004) analiza, desde una perspectiva empírica, las características del gap salarial de género, para estudiar su compatibilidad con los argumentos de Becker y Mincer. Así, la diferencia en los perfiles suele ser más reducida al comienzo de la vida laboral, aunque se va acentuando con el tiempo, indicando con ello una aceleración más pronunciada en el caso de los hombres. Esta diferencia se observa especialmente entre hombres y mujeres casadas, de suerte que el gap es mucho más reducido entre hombres y mujeres solteras. A su vez, dentro del colectivo de mujeres casadas las más perjudicadas suelen ser aquellas con hijo y, de estas últimas, aquellas que han dado a luz en intervalos más amplios de tiempo muestran un salario más bajo. Para Polacheck, la discriminación por el lado de la demanda no puede explicar esta evidencia: incluso aunque la empresa pueda conocer la situación conyugal de una mujer cuando recibe una solicitud de empleo, es imposible conocer cuál es la senda de fertilidad que ha escogido. En conclusión, el modelo de capital humano es capaz de explicar un 90% de la evidencia sobre discriminación salarial por sexo.

Lazear y Rosen (1990) proporcionan un modelo teórico que explica las diferentes carreras laborales de hombres y mujeres dentro de una empresa, debidas a los menores incentivos de promoción a la mujer incluso para el mismo nivel de capital humano que un hombre, sin que medie discriminación alguna en la toma de decisiones por el manager. De acuerdo con su argumento, las empresas tienen la posibilidad de ofrecer a sus trabajadores trayectorias laborales que comportan promociones o no; las primeras llevan aparejadas la posibilidad de ampliar el capital humano a lo largo de la escala laboral, con el consiguiente incremento de la productividad y de los salarios. Esta alternativa se ofrece cuando los trabajadores ya han transcurrido un cierto tiempo en la empresa y, por tanto, su nivel de capital humano es revelado. Una vez tomada la decisión de ofrecer la promoción o no y al cabo de otro período el trabajador decidirá si permanecer en la empresa, comparando el salario disponible en ella -dado por su productividad- y el valor de su tiempo en actividades fuera del mercado. En este sentido, la hipótesis clave del modelo es que si este valor estocástico se mide por $\bar{w}$, la función de distribución de $\bar{w}$ de los hombres es superior a la de las mujeres, denotando con ello que las opciones externas al mercado para estas últimas suelen ser superiores.

Cada trabajador deriva una corriente de rentas distinta de cada tipo de puesto en la empresa. En ambos casos en el primer período el sueldo será el mismo, pero en el segundo comenzará la diferenciación, al incrementarse el capital humano en aquellas ocupaciones que conllevan promoción. En el tercer período pueden suceder dos cosas[36]: si el sueldo que ofrece la empresa, cualquiera que sea el puesto que se ocupe, es superior al valor de la mejor alternativa fuera de mercado, se prolongará el contrato; por el contrario, si se abandona la empresa, se obtendrá el valor de dicha alternativa. Cuando no se abandona la empresa, el sueldo puede ser o bien un múltiplo del aquel que se recibió en el segundo período, si el puesto que se ocupa permite la promoción, o bien el mismo que el ingresado en el primer y en el segundo período, si el trabajador no tuvo acceso a la escala promocional. Cada corriente de rentas estará en función de: i) el capital humano inicial del trabajador, con más ingresos cuanto mayor fuera este y ii) el valor del tiempo extramercado. La solución óptima social al problema de la asignación del trabajador a una clase de puesto u otro pasa por la comparación de las corrientes de rentas que generan y la identificación de aquel nivel crítico de capital humano que implica una diferencia nula entre los

[36] Se supone que en el primer y segundo período siempre se continúa en la empresa; el primer momento en el que se plantea la disyuntiva de abandonarla es el tercero período.

dos flujos. Cuanto menor sea la función de distribución de $\overline{w}$, mayor deberá ser el salario en el tercer período para que no rotar sea la opción más atractiva para el trabajador; para que esto sea posible, su nivel de capital humano crítico para acceder a la escala promocional deberá ser superior[37]. Por tanto, imponer condiciones diferentes de promoción a un hombre y una mujer resulta un óptimo social en este contexto, incluso aunque sus capacidades sean las mismas en el momento de comenzar a trabajar para la empresa.

Paralelamente a la defensa de esta línea, desde comienzos de los 70 comienza a desarrollarse una literatura que endogeneiza la discriminación (sexual, racial, o de otro tipo) a partir de variables de demanda y/o imperfecciones de mercado. **Colander (1997)** ofrece una primera revisión de una literatura que complementa los factores de oferta con otros que, por distintas razones, no son considerados por la teoría del capital humano. En concreto, critica el enfoque beckeriano tradicional por no prestar suficiente atención a la dimensión social e institucional de la producción, así como a los cambios tecnológicos. El común denominador de todos estos factores es el siguiente: a medida que se incrementa el número de tecnologías disponibles y, con ellas, aparecen diversas características relevantes descriptivas de los individuos, las posibilidades para que se produzcan reversiones de ranking de las mismas en las diferentes tecnologías se eleva sensiblemente. Por tanto, en un de elección libre entre múltiples tecnologías, la superioridad del capital humano de un individuo es contingente a aquella elegida y solo podrá hablarse en términos absolutos de que la productividad incorporada de un individuo A es superior a la de uno B si lo es en el contexto de todas las tecnologías disponibles. En un entorno como este, la aparición de la discriminación, favorecida por factores institucionales de demanda, existe cuando la valoración del capital humano de una persona es inferior al de otra de acuerdo con la tecnología escogida, aunque la relación sería la inversa si se optara por otra tecnología factible.

Esta situación tiende a ser tanto más frecuente cuando se tiene en cuenta la endogeneidad de la elección de técnicas productivas en un marco de competencia imperfecta en el mercado de trabajo. En la línea de Lindbeck y Snower (1984), Colander defiende que, cuando el mercado de trabajo es dual son los insiders los que determinan en gran medida la tecnología, imponiendo aquella que maximiza el valor de su propio capital humano frente a de los insiders. Incluso en un entorno de competencia perfecta, Colander ve im-

---

[37] Desde el momento en que la escala promocional conlleva formación, entraña unos costes para la empresa. Por lo tanto esta deseará minimizar la probabilidad de abandono por el trabajador en el tercer período para aquellos que ocupen un puesto en el que pueden acumular capital humano.

probable que este problema pudiera resolverse por varias razones: i) La incertidumbre acerca de los rendimientos de determinadas tecnologías, que hace que estas sean esencialmente indiferentes a los ojos de los empresarios cuando no lo son en términos de la ordenación del capital humano; ii) las imperfecciones en los mercados de capital y las limitaciones consiguientes sobre la elección de la tecnología y iii) el fenómeno del learning-by-doing crea *path dependency* y no linearidades en la productividad asociada a las distintas tecnologías disponibles, de modo que el mero hecho de estar implantada hace tiempo puede hacer que una tecnología presente ventajas frente a otras con potencialmente más eficientes a medio plazo.

Un segundo vector de trabajos explicativos de la discriminación ponen el énfasis en distintas imperfecciones de mercado que se manifiestan en los procesos de búsqueda. Así, algunos de ellos (Phelps (1972), Arrow (1973), Agner y Cain (1977), Lundberg y Startz (1983) o Coate y Loury (1993) entre los más importantes) se refieren a deficiencias informativas sobre el capital humano de los trabajadores potencialmente contratables. Cuando ciertos grupos presentan varianzas especialmente amplias en su productividad, la selección se articula mediante la atribución al grupos (sexos, etnias) de una característica, antes que a través de un verdadero estudio de los perfiles individuales. El resultado es una disminución de la tasa de retorno del capital humano de estos colectivos frente a la de otros en lo que constituye a menudo un problema de coordinación con los empresarios (al esperar estos últimos una menor productividad entre los integrantes del colectivo, fijan para estos unas condiciones relativamente desafavorables, que reducen la tasa de retorno y *de facto* desincentivan la acumulación).

Una variedad de este enfoque la constituyen los denominados modelos de discriminación en la búsqueda -Mailath et. al. (2000)-, en los que la empresa incrementa su esfuerzo en la búsqueda de los trabajadores que presentan características directa o indirectamente relacionadas con su productividad, como su formación previa o la pertenencia a un cierto colectivo, si la inferencia a partir de una muestra de mercado le hubiera llevado a esta creencia. La principal diferencia con los modelos de discriminación estadística o informativa reside en que en estos segundos la empresa posee una información completa sobre las características del trabajador una vez llega el momento de fijar su salario, aunque en cualquier caso la discriminación se produce al tener acceso solamente algunos a la empresa. Antonovics (2000) explica la pervivencia de la discriminación en un entorno dinámico de OLG. Esta es generada a través de un sencillo mecanismo de obtención de puntuaciones en un test, así como la pertenencia a ciertos colectivos y afecta a la inversión en capital humano realizada por la empresa en los individuos. A partir de aquí, suponiendo la transmisión de capital humano de padres a hijos, es posible justificar como sucesivas generaciones que sufren discriminación pueden quedar sujetas a una trampa de pobreza. **Arcidiacono (2000)** combina las características de los dos anteriores trabajos y por tanto nos referiremos brevemente a su estructura de modelización, como una de las más representativas de esta corriente.

El modelo está integrado por un número constante de trabajadores (N) que viven durante 2 períodos, durante los cuales pasan de jóvenes (y) a viejos (o); cuando no están contratados se encuentran en un proceso constante de búsqueda. Las vacantes que crea la empresa, de acuerdo con una condición de beneficio nulo, son específicas para trabajadores en cada período de su vida. Una vez que se crean, los emparejamientos tienen una probabilidad positiva de disolverse, aunque los trabajadores del pool de los separados de su empresa pueden volver a encontrar un empleo en el siguiente período. Como se vio antes, la empresa no conoce las características del trabajador en el momento de contratarlo, aunque las infiere antes de fijar su salario. Denominando m a los emparejamientos por período y v a las vacantes, la tecnología de emparejamientos adopta la siguiente estructura:

$$m_j = Min\left\{m\left(v_j, N\right), v_j, N\right\};\ j = y, o \quad (2.120)$$

Con m creciente y cóncava respecto a sus dos argumentos, así como exhibiendo rendimientos constantes a escala. Las probabilidades de recibir una oferta (q) serán las mismas para todos los trabajadores y vendrán dadas por $q_j = m_j / N$. Recíprocamente, la probabilidad de captar a un trabajador para la empresa se denotará por $p_j = m_j / v_j$. Cada trabajador posee una dotación personal de capital humano a^{hi} al comenzar su relación con la empresa, siendo esta una variable estocástica que será incrementada en i^h tras un período de permanencia en la misma. El salario se determina sobre el excedente total que genera el trabajador mediante una negociación de Nash, siendo la alternativa de mercado del trabajador 0; su poder de negociación se cifra mediante el parámetro $\beta \in (0,1)$. En el caso de los trabajadores mayores, la cuantificación de su excedente y salario es directa:

$$WS_o^i = a^{hi} + E^i i^h \quad (2.121)$$

$$w_0^i = \beta\left(a^{hi} + E^i i^h\right) \quad (2.122)$$

Donde E es una variable binaria que toma los valores 0 ó 1 dependiendo de si el trabajador careció o tuvo experiencia en el período anterior. Por lo que respecta a los trabajadores jóvenes, su excedente graduado según la probabilidad de ser contratado en la vejez es el siguiente:

$$WS_y^i = a^{hi} + \beta q_o i^h \quad (2.123)$$

La configuración del salario para los jóvenes presenta la peculiaridad de que la empresa exigirá su fracción del excedente del segundo período por adelantado (esta última puede considerarse un reembolso anticipado de los gastos de entrenamiento). De este modo:

$w_y^i = \beta a^{hi} - (1-\beta)\beta q_0 i^h$ (2.124)

Finalmente, el modelo se cierra mediante la determinación de las vacantes óptimas aplicando la condición de beneficio nulo a cada trabajador. Si k_o, k_y son los costes de creación de una vacante para cada colectivo, los beneficios derivados serán:

$E(FS_o) = p_o(1-\beta)\left[E(a^h) + q_y i^h\right]$ (2.125)

$E(FS_y) = p_y(1-\beta)\left[E(a^h) + \beta q_o i^h\right]$ (2.126)

El equilibrio del modelo arroja un par de vacantes para cada segmento de la población, dados un vector de parámetros y una distribución estocástica para el stock de capital humano anterior a la contratación[38], pudiendo existir equilibrios múltiples **La discriminación en la búsqueda** puede surgir por distintas razones. **La primera de ellas, a consecuencia de la mera existencia de equilibrios múltiples**. Suponiendo que el total de trabajadores se estructure en dos grupos A y B (cada uno de los cuales a su vez contiene cohortes de jóvenes y viejos) y que la búsqueda pueda realizarse por grupos, aquellos pueden presentar equilibrios de características muy distintas, con altos y bajos niveles de desempleo respectivamente, asociados a un elevado o reducido número de vacantes. Aquel grupo con una tasa de desempleo más baja tendrá un nivel de rentas salariales más elevado a lo largo del ciclo vital, aunque al ser su salario en el primer período dependiente negativamente de sus ganancias futuras (a través de la inversión en capital humano recibida) y ser mayor la probabilidad de ser contratado en el futuro, el salario en dicho primer período podría ser inferior al del grupo con menor empleo.

---

[38] El modelo puede dar lugar a múltiples equilibrios, siendo la razón la existencia de funciones con pendiente positiva $q_o(q_y)$ y $q_y(q_o)$ cuya intersección determinan las probabilidades efectivas de recibir una oferta en equilibrio. La interrelación entre ambas procede del hecho de que ambos mercados, de plazas para jóvenes y viejos, se benefician de un elevado grado de dinamismo en el otro. El primero, porque aumenta el excedente que captará en un cierto porcentaje la empresa; el segundo, porque la productividad del trabajador será mayor si se cuenta con experencia previa. La multiplicidad de equilibrios aparece cuando estas curvas presentan más de un punto de corte. Para evitar este resultado puede exigirse una restricción paramétrica eqivalente a restringir las pendientes para que las curvas no exhiban puntos de inflexión y no se crucen en más de un punto.

La segunda vía que puede dar lugar a discriminación en equilibrio es la realización de inversiones en capital humano por los propios trabajadores en una fase previa a su contratación por la empresa, incrementando su posición en este activo hasta $\hat{a}^h$. Suponiendo que el coste de realización de esta inversión sea constante e igual a c, los individuos decidirán acometerla solamente cuando las expectativas de rentabilidad sean suficientemente importantes. Si además la verdadera productividad del individuo solo es conocida después de la realización de esta inversión, el nivel máximo de coste de la misma que resulta aceptable será:

$$c* = \beta E\left(\hat{a}^h\right)\left[q_y + q_0\right] + \beta q_y q_o i^h \quad (2.127)$$

Ahora bien, a su vez las probabilidades q dependerán de $E\left(\hat{a}^h\right)$, ya que las empresas tenderán a buscar con mayor intensidad cuanto más elevada sea la expectativa del stock de capital humano de los trabajadores; recíprocamente, el coste máximo tenderá a ser más alto cuanto mayores sean las probabilidades de recibir ofertas laborales en ambos períodos. A consecuencia de esta doble relación, pueden aparecer equilibrios múltiples, con uno de ellos en el que la inversión de los trabajadores de un grupo en capital humano es nula, con un número reducido de vacantes destinado al mismo, mientras que el segundo grupo se encontraría en un equilibrio con inversión más elevada y concentraría las vacantes creadas. El resultado es similar al de la primera vía estudiada: el grupo con menor tasa de desempleo se beneficiará de mayores ingresos descontados, por acumular mayor capital humano -en este caso antes y después de su entrada en la empresa- , con un perfil salarial durante su vida de pendiente más pronunciada que el otro grupo.

En suma, la inversión en capital humano juega un papel importante en la generación de la discriminación, por una u otra vía, al ser el desencadenante último de los equilibrios múltiples. Si la formación en el interior de la empresa no existiera, no se produciría un feedback cruzado positivo entre las probabilidades de recibir ofertas para viejos y jóvenes, dado que un aumento de las vacantes en cualquiera de los segmentos conduciría a una disminución de los beneficios en el otro, al reducirse la probabilidad de encontrar un trabajador en este último. Análogamente, si los trabajadores no invirtieran autónomamente como para potenciar su atractivo frente a las empresas, tampoco surgirían equilibrios múltiples del segundo tipo analizado.

Dessy y Pallage (2009) enfocan el problema de la discriminación por géneros desde otro punto de vista, intentando no tanto explicar el origen del fenómeno, sino las consecuencias sobre la formación de capital humano en el seno del hogar. En su modelo existe un agente representativo masculino y otro femenino que viven durante 2 períodos; en el primero se toman decisiones de asignación de tiempo entre ocio y formación, mientras que en el segundo se contrae matrimonio o se permanece soltero y se trabaja en la producción del bien final; en tanto que la inversión en capital humano consituye un elemento de atracción de eventuales parejas a la hora de contraer matrimonio, el modelo se resuelve retroactivamente, desde el segundo período al primero. No se explicita una tecnología de acumulación de capital humano para aligerar matemáticamente el modelo, aunque esta podría incorporarse sin alterar esencialmente los resultados. En su lugar, la decisión de invertir en este activo durante el primer período de vida se sustancia en una variable binaria, con $n^h = 1$ si se decide invertir e =0 al contrario. El tiempo de ocio, por lo tanto, será nulo si decide acumular capital humano.

En cuanto a la producción del segundo período, los hombres y las mujeres solteras ofertan inelásticamente todo su tiempo disponible durante el mismo, pero las mujeres casadas solamente una fracción exógena, tras descontar el tiempo necesario para el cuidado básico de los niños. Por otro lado, las empresas pueden elegir entre dos tecnologías para producir el bien final, cada una de las cuales se basa en trabajo cualificado o no cualificado; el output total vendrá dado por la suma de la producción de las dos. Siendo A la productividad del trabajo, Y el output total y n^w el tiempo total aplicado al mismo:

$Y = A_s n_s^w + A_u n_u^w$ (2.128)

Denotando s las variables relacionadas con la tecnología basada en el trabajo cualificado y u las del no cualificado. Los hombres son remunerados en el segundo período de acuerdo con la productividad marginal de su trabajo (A_s o A_u, según si se formaron o no en el primer período), si bien las mujeres sufren discriminación en el mercado de trabajo, recibiendo parcialmente su productividad ($\lambda_s A_s, \lambda_u A_u;\ \lambda_s, \lambda_u \in (0,1)$). El matrimonio presenta dos rasgos distintivos: es la única vía de engendrar hijos, frente a cuya calidad Q las preferencias de los individuos son sensibles, y además el marido realiza al principio del mismo a la mujer una transferencia de tamaño T para acceder al derecho de custodia compartida de sus hijos futuros[39].

Sea I_m el índice de condición marital, =1 cuando se contrae matrimonio y a 0 en caso contratrio. La calidad de los niños está determinada por la función $Q\left(n^{hF}\right)$, tras la que late

---

[39] El contexto del artículo es el de sociedades con un nivel de desarrollo medio-bajo, aunque lo cierto es que en las sociedades más avanzadas a menudo existen transferencias implícitas del mismo tipo, aunque menos formalizadas, para cerrar el contrato matrimonial.

una tecnología de acumulación de capital humano. Las preferencias de los individuos son separables en la satisfacción obtenida en cada período de vida, de suerte que en el primero esta se deriva del ocio (si alguno) y en el segundo del consumo, la calidad de los hijos y el status matrimonial. Así:

$$U = g\left(1-n^h\right)+\beta z\left(I_m, C\left(I_m, n^h\right), Q\left(I_m, n^h\right)\right) \quad (2.129)$$

Siendo g y z cóncavas y estrictamente crecientes. La maximización de las preferencias se realiza sujeta a las restricciones presupuestarias:

$$C^i\left(I_m, n^{hi}\right) \leq y^i\left(I_m, n^{hi}\right)+I_m T^i;\ i=M,F \quad (2.130)$$

Siendo la transferencia ligada al matrimonio positiva para la mujer y negativa para el hombre. Para explicar a su vez las rentas, hay que tener en cuenta que estas se forman asimétricamente para hombres y mujeres. ya que para aquellas de estas últimas que están casadas, la crianza de los hijos conlleva la asignación de una fracción fija de tiempo v. De este modo:

$$y^i\left(I_m, n^{hi}\right)=\begin{cases} I_m(1-v)h\left(n^{hF}\right)+\left(1-I_m\right)h\left(n^{hF}\right) \\ h\left(n^{hM}\right) \end{cases} \quad (2.131)$$

Supongamos que, al margen del trabajo, existe una alternativa profesional para todo individuo, consistente en convertirse en empresarios autónomos. Para iniciar una actividad de estas características, deberá invertirse todo el tiempo disponible en el segundo período -lo que impide a la mujer casada el desempeño-. La tecnología consiste en combinar una unidad de capital físico (para cuya adquisición se solicita un préstamo a tipo r, que se devuelve al final del período) con los servicios del trabajo, cuyo grado de cualificación dependerá de la asignación del tiempo efectuada en el primer período. El output obtenido será F_s, F_u , según que el trabajo sea cualificado o no. El beneficio para el empresario autónomo podrá escribirse por lo tanto como:

$$S=\begin{cases} F_s-(1+r) \text{ si } n^h=1; \\ F_u-(1+r) \text{ si } n^h=0 \end{cases} \quad (2.132)$$

Para que la opción de la mujer de convertirse en empresaria sea creíble, deberán verificarse las siguientes restricciones:

$$\lambda_s A_s < F_s-(1+r) < A_s;\ \lambda_u A_u < F_u-(1+r) < A_u \quad (2.133)$$

Estas cadenas de desigualdades implican que, para una mujer soltera, prevaleciendo la discriminación salarial en el mercado de trabajo, convertirse en empresaria será siempre la mejor opción. Por el contrario, para un hombre será siempre más rentable asignar su tiempo al mercado de trabajo.

El siguiente paso es la determinación de la transferencia nupcial T, a través de un equilibrio de Nash en el que la mejor alternativa de la mujeres es $B_j-(1+r),\, j=s,u$ y la de los hombres, $h^M\left(n^{hM}\right)$. Si la función de utilidad en el segundo período adopta la especificación z_qQ+z_cC , Z_F es la satisfacción en el segundo período para una mujer casada y, análogamente Z_M lo es para un hombre casado, el programa por el que se extrae T será:

$$Max_T\left\{\left[V_F\left(T,n^{hF}\right)-z_c\left[F_j-(1+r)\right]\right]\left[V_M\left(T,n^{hF},n^{hM}\right)-z_cA_jh^M\left(n^{hM}\right)\right]\right\} \text{ (2.134)}$$

La solución óptima para T es mayor que cuando la opción de la apertura de una empresa no existe para la mujer. En este sentido, T de equilibrio tiene dos componentes: uno fijo, que compensa el tiempo transcurrrido junto a los hijos en el hogar (y está en función de v y λA), y otro variable, que supone una capitalización de esta característica y que surge a consecuencia de la aparición de una alternativa para la mujer superior a la producción doméstica. De esta forma, la disponibilidad de una amenaza más creíble para la mujer eleva la rentabilidad que esta obtiene del matrimonio, al aumentar su poder de negociación y, consiguientemente, reducir sus incentivos al matrimonio. La decisión de la mujer de adquisición de formación procede de la comparación de los costes de esta con los beneficios, tanto domésticos como de mercado. A través de la cadena de desigualdades anteriores, puede apreciarse directamente que $F_s-F_u>\lambda_sA_s-\lambda_uA_u$, por lo que la probabilidad de inversión en capital humano en el primer período se incrementa en comparación con el escenario en que no existe acceso al crédito.

El modelo, por lo tanto, supone una extensión de las conclusiones de Becker y Tomes sobre la consecuencias del acceso al crédito a un ámbito de discriminación en el mercado de trabajo. En efecto, la emergencia de una alternativa profesional ligada al crédito acelera la acumulación de capital humano, tanto de un modo directo, al mejorar los incentivos para la inversión por la mujer, sea la actividad empresarial o el matrimonio su modo de realización personal, como indirecto, a través del canal que supone el efecto externo intra-familiar en el aprendizaje de la próxima generación. Indirectamente, constituye también una explicación sobre el cambio operado en algunos patrones de organización familiar o incluso sobre la dinámica de las relaciones de pareja.

II.4. El capital humano-salud.

El trabajo de Grossman (1972) tiene una gran relevancia en la literatura de capital humano, al ser la primera aplicación formal de las ideas de Becker y Ben-Porath al campo de Economía de la Salud. La contribución de Grossman presentaba algunas notas distintivas, sin embargo, frente a trabajos posteriores. Para empezar, el autor distingue segrega las características del capital humano en dos conceptos diferentes: un conjunto de rasgos que contribuyen a la bienestar fisico y la salud del individuo y un stock de cononocimientos y habilidades; ambos serán activos diferenciados y sujetos a un proceso de acumulación similar; esta separación será un rasgo que perviva en esta corriente. No obstante, el tratamiento de ambos activos reales a^{hH} y a^{hE}, salud y conocimientos respectivamente, es asimétrico desde la perspectiva de las preferencias, que la salud está presente en las preferencias del individuo. Esta presencia no se justifica tanto por un papel de input de las commodities, sino a través del enfoque de bienes de consumo duraderos.

En efecto, de acuerdo con esta última literatura[40] existen determinados bienes de consumo que se caracterizan por prolongar su durabilidad más de un período y generar un flujo de servicios a lo largo de su vida útil. Este flujo de servicios por período suele caracterizarse formalmente de un modo simple, como una constante multiplicada por el stock del bien disponible por período $\phi_s a_s^{hH}$, pudiendo interpretarse este flujo como el número de días por año en los que se disfruta de un buen estado de salud. En este sentido, el capital humano, tanto en su vertiente salud como en otras dimensiones, presenta una doble característica: es tanto una commodity en sí misma como un bien de consumo duradero, salvo que supongamos que su tasa de depreciación es unitaria. Esta doble condición es la que posibilita una modelización mixta, como la aplicada por Grossman. Así pues, la función de utilidad de la que parte su modelo puede escribirse como:

$$U = U\left(a_0^{hH},.....a_T^{hH},C_0,....C_T\right) \quad (2.135)$$

Las funciones de producción capital humano y otras commodities dependen en esencia de inputs de mercado (cuidado médico, en el caso del capital humano) y tiempo dedicado a las respectivas actividades:

$$C_s^j = C^j\left(x_s^j,n_s^{Cj},a_s^{hE}\right) \quad (2.136)$$

$$i^{hH} = i^{hH}\left(x_s^{hH},n_s^{hH},a_s^{hH}\right) \quad (2.137)$$

De un modo genérico, Grossman deja constancia que dichas funciones dependerían también de un vector de otras variables, entre las que se contarían otras commodities, la salud y el propio capital humano-educación; así, condiciones como el tabaquismo o el alcoholismo condicionarían no solo el estado general del individuo, sino la posibilidad de continuar mejorando la salud en el futuro. En este sentido, Grossman llega a hablar de

---

40 Ver capítulo 3 sobre tasas de retorno.

producción conjunta del vector total de commodities, si bien no desarrolla este extremo para preservar la simplicidad analítica del enfoque. Otro elemento de asimetría en el tratamiento de los 2 activos reales es el hecho de que la acumulación de capital humano-educación no se endogeneiza, sino que su nivel se considera exógeno en todas las funciones de producción. Esta voluntad "didáctica" es la que le impide llegar en última instancia a unos resultados análogos a los de Becker y Ghez, aunque como estos últimos autores reconocen el artículo de Grossman fue una fuente de inspiración importante para plantear su modelo[41]. Finalmente, una peculiaridad del modelo -que también influirá la literatura posterior- es la división del tiempo en 4 conceptos: trabajo de mercado, producción doméstica de commodities, producción de capital-salud y tiempo perdido por enfermedad, que depende negativamente del stock de capital-salud. Formalmente:

$$1 = n_s^w + n_s^C + n_s^{hH} + l_s;\ n_s^C = \sum_{j=1}^{N} n_s^{Cj};\ l_s = L\left(a_s^{hH}\right);\ L' < 0 \text{ (2.138)}$$

Dada la interpretación de los servicios del capital-salud como días saludables disfrutados por período, podrá establcerse la igualdad $\phi_s = -\frac{\partial L}{\partial a_s^{hH}}$. Por lo demás, la restricción intertemporal del individuo es estándar y señala la sujección de la corriente descontada de gastos en inputs del capital salud y las commoditie al flujo de ingresos durante el tiempo de trabajo. Ambas corrientes se descuentan al tipo de interés del activo financiero existente y que complementa las carteras, junto con los dos reales ya identificados:

$$\sum_{s=0}^{T} \frac{\sum_{j=1}^{N} p_s^j x_s^{Cj} + p_s^H x_s^{hH}}{\left(1+r\right)^s} = b_0 + \sum_{s=0}^{T} \frac{w_s n_s^w}{\left(1+r\right)^s} \text{ (2.139)}$$

Es de destacar que, a diferencia de los problemas de ciclo vital con capital humano-capacidad, la influencia del capital-salud sobre los ingresos laborales es indirecta. En, dicho stock no conforma la renta laboral en apariencia, aunque lo hace a través de la ecua-

[41] Por otro lado, el modelo de Grossman presenta otra característica propia de la economía de la salud que lo diferencia también del modelo canónico de Becker-Ghez: la endogeneidad de parte del tiempo disponible respecto al stock de capital humano acumulado. En efecto, el tiempo disponible por período se subdivide no solo en ocio, aprendizaje y trabajo, sino que presenta un cuarto componente: el tiempo de indisposición debido a enfermedades. A su vez, esta última fracción de tiempo será una función dependiente negativamente del stock de capital humano. De este modo, entre los beneficios que genera la acumulación del activo se encuentra otro (que correspondientemente formará parte de su tasa de retorno) relacionado con la duración efectiva del tiempo total asignable entre usos productivos por período.

ción del tiempo: siendo todo igual, una disminución infinitesimal del tiempo de enfermedad conduce a un incremento por la misma cuantía del de trabajo.

Las condiciones de primer orden se condensan en una ecuación análoga a las resultantes en el problema de Becker y Ghez, solo que ahora la corriente de beneficios marginales derivados de la inversión incluirá el efecto de esta sobre la utilidad vía servicios de salud, valorado en relación con la utilidad marginal del consumo. Así, siendo π_s el coste marginal de producción de una unidad adicional de capital-salud, δ^{hH} la tasa de depreciación del mismo y λ el valor sombra de la riqueza:

$$\pi_s = \frac{w_s L_s}{1+r_s} + \frac{\left(1-\delta^{hH}\right) w_{s+1} L_{s+1}}{\left(1+r_s\right)\left(1+r_{s-1}\right)} + ... + \frac{u_{hs}\phi_s}{\lambda_s} + \frac{\left(1-\delta^{hH}\right) u_{hs+1}\phi_{s+1}}{\lambda_s} + ... \quad (2.140)$$

En los últimos 20 años las aportaciones a la Economía de la Salud desde el ámbito de la Teoría del Capital Humano han sido continuas y abordarlas en detenimiento requeriría un capítulo completo; Grossman (1972) ofrece una panorámica rica de todas las interrelaciones posibles que se presentan entre ambos núcleos de conocimiento. Baste decir, sin embargo, que los principales ángulos recogidos por estos estudios han sido la relación entre una mejor formación y una prevención y tratamiento más eficiente de numerosas enfermedades -Goldman y Smith (2002), Fletcher y Frisvol (2009)-, entre conocimientos más especializados y la adopción de nuevas tecnologías orientadas al cuidado de la salud -Glied y Lleras-Muney (2008)-, entre nivel de capacitación, status laboral, nivel de vida e idoneidad de las condiciones de trabajo -Cutler y Lleras-Muney (2010)- o simplemente en términos de una valoración más elevada de la salud dentro de las preferencias personales, en comparación con la otorgada a la riqueza -Galama, Van Kippersluis (2010). En sentido contrario, Schneider et. al. (2010) estudian el impacto de una buena salud en las decisiones de inversión en capital humano post-escolar, concluyendo que el efecto sustitución tiende a predominar sobre el efecto renta especialmente entre aquellos individuos de una cualificación más alta[42]. Todos ellos así como la literatura de carácter empírico muestran, en general, una relación de causalidad bidireccional entre acumulación de capital humano-capacidad y capital humano-salud, partiendo del supuesto de que pueden distinguirse estas dos dimensiones del mismo activo. **Galama y Van Kippersluis (2015)**

---

[42] Al mejorar la salud, supuesto que esta tenga un impacto positivo sobre la eficiencia del trabajo en sus servicios de mercado, existe un efecto sustitución que impulsa a invertir en un tipo de entrenamiento de nivel superior y un efecto renta que permite percibir idénticos salarios con una inversión en un tipo de formación dirigido a una cualificación inferior. El trabajo empírico llevado a cabo por estos autores muestra que es el primer efecto el que tiende a predominar.

proporcionan un modelo amplio que da cabida a gran parte de estas consideraciones y, al constituir un trabajo de síntesis que contiene los elementos más característicos de esta rama, nos detendremos para analizar sus rasgos modelizadores fundamentales.

La estructura del modelo, como en general de la mayor parte de la literatura, está claramente influida por la aportación seminal de Grossman, si bien se añaden algunos elementos nuevos para dar cabida a los distintos canales de interrelación entre ambas clases de capital humano. Estas se denotarán como a^{hE},a^{hH} , donde el superíndice E hace referencia a aquel más directamente relacionado con la educación (y por lo tanto con la adquisición de cacidades y conocimientos), mientras que el H denota el capital-salud y las variables asociadas. Las ecuaciones de acumulación de ambos activos son las siguientes:

$$a_{s+1}^{hE} = h^{E}\left(x_{s}^{hE},n_{s}^{hE}\right)+\left(1-\delta^{E}\right)a_{s}^{hE} \quad (2.141)$$

$$a_{s+1}^{hH} = h^{E}\left(x_{s}^{hH},n_{s}^{hH}\right)+\left(1-\delta^{H}\right)a_{s}^{hH} \quad (2.142)$$

Las funciones de inversión bruta, crecientes y cóncavas respecto a cada input -con rendimientos decrecientes, por tanto- se nutren de inputs de mercado específicos de cada tipo de capital humano, así como de tiempo. Las preferencias se estructuran a lo largo de T períodos de vida y en 3 subperíodos: edad de formación escolar (S), edad laboral y retiro (R), siendo los 3 endógenos. Esto es, podrá escribirse la secuencia de funciones de utilidad[43] como:

$$U = \sum_{s=0}^{s=S-1} \beta^{s}u(.)+\sum_{s=S}^{s=R-1}\beta^{s}u(.)+\sum_{s=R}^{s=T}\beta^{s}u(.) \quad (2.143)$$

$$u = u\left(C_{s},n_{s}^{C},a_{s}^{hE}\right) \quad (2.144)$$

Esto es, tanto el consumo, como el tiempo de ocio, como la salud generan una satisfacción directa; la utilidad, como siempre, es creciente y cóncava en todos sus argumentos. Dentro de una interpretación cercana a Becker, puede pensarse que los tres argumentos son inputs de una única commodity que se produce en cantidades variables en todos los períodos y fases de la vida. La restricción presupuestaria flujo, suponiendo la existencia de un activo financiero que devenga un tipo de interés r, es la siguiente, siendo el bien de consumo final el numerario:

$$C_{s} + p_{s}^{E}x_{s}^{E} + p_{s}^{H}x_{s}^{E} + b_{s+1} \leq \left(1+r_{s-1}\right)b_{s} + y\left(a_{s}^{hE},a_{s}^{hH}\right) \quad (2.145)$$

43 El modelo original se encuentra en tiempo continuo, aunque aquí se realiza una adaptación a tiempo discreto.

Los dos tipos de capital humano tienen un efecto simétrico respecto al incremento de la productividad del individuo, tanto en la producción de la commodity con la producción de mercado. Las rentas serán distintas en cada fase de la vida, con:

$$y_s = \begin{cases} T_s,\ 0 \le s < S-1; \\ w\left(a_s^{hE}\right) n_s^w\left(a_s^{hH}\right),\ S \le s < R-1; \\ T_s\left(R\right),\ R \le s \le T \end{cases} \quad (2.146)$$

Durante la fase escolar, la renta consistirá en una transferencia T recibida de los progenitores o del estado; también durante la jubilación se recibirá una transferencia, solo que en ese caso ligada a la duración de este período. Durante la vida laboral, el salario por fracción de tiempo trabajada dependerá de la formación recibida, mientras que el tiempo laboral lo hará de la salud -de manera similar a la propuesta por Grossman-. El modelo se cierra con la restricción de utilización del tiempo por período:

$$1 = n_s^w + n_s^C + n_s^{hE} + n_s^{hH} + i_s\left(a_s^{hE}\right) \quad (2.147)$$

El último término de la ecuación refleja el tiempo consumido por mala salud, que depende negativamente del capital humano ligado a tal concepto. En la etapa escolar y en la vejez pesa una restricción exógena sobre el tiempo de trabajo, tal que $n_s^w = 0$. Finalmente, se considera que el capital humano salud no puede caer por debajo de un cierto nivel mínimo, mientras que no se restringe el alcanzable por el capital humano-educación. El problema se resuelve en el consumo, la distribución del tiempo por usos, la inversión en los dos tipos de capital humano la duración del período de aprendizaje y la edad de jubilación. Las condiciones de primer orden pueden sintetizarse en los siguientes bloques. i) Una relación marginal de sustitución entre consumo y ocio que se iguala al precio relativo de ambos, esto es, el salario real. ii) La igualdad entre el valor sombra del capital humano-educación y el valor sombra de la riqueza, multiplicado por el coste marginal de producción del activo a partir de cualquiera de sus dos inputs; iii) La igualdad entre la tasa de retorno del activo financiero y la del capital humano-educación, incluyéndose en este última el efecto sobre el salario, así como el aumento en la producción marginal del propio activo y del capital humano-salud, estos últimos valorados a los correspondientes precios sombra relativos. iv) y v) Condiciones simétricas a las ii) y iii), solo que referidas al capital humano-salud.

Las predicciones más interesantes del modelo son las concernientes a la evolución de ambos stocks a lo largo del ciclo vital. Para ello, se utilizan dos supuestos típicos en la literatura de ciclo vital: a) No se constriñe el valor terminal del stock de capital humano, si bien para satisfacer la condición de transversalidad correspondiente su valor sombra en T debe hacerse 0[44]. Esta condición, unida a las ccpp ii-iii, implica una dinámica decreciente del valor sombra del capital humano a lo largo de la vida de los individuos. b) Dada la evidencia de una fortaleza física declinante con el tiempo, se impone una condición terminal de que el stock de capital humano-salud iguale a su mínimo en T, circunstancia que será compatible con un valor sombra positivo en el período terminal. La aplicación de análogas ccppo conducirá a un valor creciente del valor relativo del capital salud frente a la riqueza a lo largo de la vida.

Bajo estas hipótesis, el modelo llega a algunas conclusiones interesantes y coherentes con la evidencia empírica. En cuanto a la inversión en capital humano, en los primeros tramos de la vida las conclusiones son similares a las de Ben-Porath y los modelos de ciclo vital de los 70. En la etapa escolar, la ausencia de costes de oportunidad (reforzada por las subvenciones, en este modelo) induce una elevada inversión en capital-educación, especialmente intensiva en tiempo. Este patrón genera consecuencias beneficiosas indirectas sobre el capital-salud, ya de por sí elevado en el momento del nacimiento. En la fase adulta, conforme se eleva el coste de oportunidad de producción de este activo, desciende la inversión y puede llegar un momento en que, por acción de la depreciación, el stock disminuya. La principal diferencia con anteriores modelos llega en la jubilación. En el momento del retiro, ante la mayor disponibilidad de tiempo no sujeto a coste de oportunidad, la inversión experimenta un escalón al alza, y después de este punto, si bien sigue descendiendo, no desaparece por completo, al tener una tasa de retorno positiva dada por el efecto expansivo sobre el capital salud-cuyo valor sombra aumenta.

La trayectoria de las inversiones en capital-salud es, en buena medida, la opuesta. Al principio de la vida, el elevado stock heredado, en combinación con los rendimientos decrecientes, hace más atractiva la inversión en el otro tipo de capital. Esto hace que, al llegar a la edad laboral, la depreciación del stock de salud propicie la reducción de su nivel, lo que incrementa su valor sombra relativo e incentiva un incremento de las inversiones en comparación con la etapa anterior; esta estrategia también es fundamental para aplazar al máximo el punto en el que se alcance el mínimo de capital-salud, momento en el que tiene lugar la muerte. No obstante, el hecho de que las inversiones en capital-educación todavía sean importantes durante un tramo evita que el stock de salud se incremente. El mismo declinar de la salud durante la vida laboral es otro factor detrás de la reducción de las ganancias tras alcanzar un pico durante la edad adulta[45], al dar lugar a

[44] Ver capítulo 3 sobre tasas de retorno.

[45] Aparte de la propia trayectoria decreciente del capital-educación tras alcanzar su máximo durante la edad laboral.

un mayor absentismo laboral por enfermedades. En el retiro, la mayor disponibilidad de tiempo hace factible un nuevo aumento de las inversiones en salud. Si bien en la tasa de retorno de este activo tampoco están presentes las rentas marginales salariales durante esta última fase, hay dos factores que impulsan las inversiones en salud: el hecho de que disminuye la pérdida de tiempo por enfermedad -y con ello mejoran las disponibilidades de tiempo de ocio- y la inclusión del activo salud como argumento de la función de utilidad. **Así pues, la consideración conjunta de las dos dimensiones de capital humano hacen más realistas las predicciones sobre perfil de inversiones en el ciclo vital llegando en algunos extremos a predicciones opuestas a las formuladas por los primeros autores de esta rama, aunque, paradójicamente, estos resultados contradictorios se obtienen sin más que extrapolar modelos de raíz puramente beckeriana.**

II.5. Modelos de aprendizaje (learning by doing)

Frente a una gama de modelos en los que la producción del capital humano se lleva a cabo mediante procesos tecnológicos diferenciados para nutrir los cuales es necesario optimizar algunas decisiones de gasto, otros modelos consideran que la mera permanencia en un cierto puesto de trabajo crea posiblidades de acumulación de este activo a través de la práctica. Aun así, estos modelos no excluyen ninguna vía de producción del activo y de hecho a veces las combinan.

Si bien este tipo de literatura ha tenido su campo fundamental en el campo del equilibrio general con el artículo seminal de Uzawa de 1965, es conveniente hacer referencia a su microfundamentación. Dentro de este área, posiblemente el ejemplo más representativo es el trabajo de **Rosen (1972,1975)**. El objetivo de este último es la endogeneización del mapa de experiencia laboral del individuo a lo largo de su horizonte vital, partiendo del supuesto de que cada trabajo genera unas posibilidades diferentes de acumulación en función de su naturaleza. El punto de partida es, como en Ben Porath (1967), la optimización de la renta laboral descontada del oferente de trabajo, definida como un salario proporcional al stock de capital acumulado menos unos costes de acumulación, los cuales a su vez variarán en función del tipo de trabajo que se desempeñe en el período s. Esto es:

$$y=\sum_{s=0}^{T} R_s\left[e_s a_s^h - c\left(J_s\right)\right] \quad (2.148)$$

Siendo J el trabajo desempeñado y c los costes incurridos por ofertar trabajo en J. En todos los años considerados se supone que la oferta de tiempo “de mercado” es inelástica e igual a la disponibilidad total de tiempo por período; esto es, en la terminología de Weiss, nos encontraríamos en la segunda fase del ciclo vital, o período laboral. A su vez, la inversión en capital humano que posibilita cada tipo de trabajo puede representarse a través una función h , continua, diferenciable, creciente y cóncava en sus dos argumentos,

$$i_s^h = \omega h\left(J_s, a_s^h\right) \text{ (2.149)}$$

siendo ω un conjunto de habilidades innatas en el individuo susceptibles de modificar su caudal de aprendizaje posterior (alternativamente podria pensarse también en la dotación de capital humano con que nace el individuo). Sin más que invertir la función h, se tendrá:

$$J_s = g\left(i_s^h, a_s^h\right);\ \Omega = c \circ g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sum_{s=0}^{T} R_s\left(e_s a_s^h - \Omega\left(\left(a_{s+1}^h - \left(1-\delta^h\right)a_s^h\right), a_s^h\right)\right) \text{ (2.150)}$$

De este modo, la optimización del flujo descontado de ingresos laborales respecto a la posición en s+1 en capital humano proporciona la solución completa al problema, ya que a su vez define la inversión a realizar en el activo, la tipología de trabajo a desarrollar y los costes asociados a este último. Por último, la secuencia de posiciones en capital humano permitirá también deducir la senda de ingresos laborales.

El anterior modelo tiene implicaciones importantes desde la óptica del mercado de trabajo en su conjunto. Teniendo en cuenta la totalidad de alternativas laborales disponibles en el mismo, en equilibrio la aportación de todas ellas a los ingresos laborales tenderá a igualarse para impedir la aparición de oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, la aportacion de los distintos trabajos a los ingresos netos de los individuos deberá ser la misma. Esta condición se cumplirá en tanto en cuanto aquellos empleos que permitan una acumulación de capital mayor (esto es, para una tasa de depreciación del capital humano una inversión bruta más elevada) deberán ir ligados a un salario menor por unidad de capital humano. Recogiendo esta idea, **Rosen (1976)** formula una función salarial en función del stock acumulado de capital humano hasta un determinado momento -o, si la medición se realiza al inicio de la vida laboral, de la dotación inicial de este activo-, así como de la inversión bruta en capital humano siendo la derivada parcial de la función salarial creciente respecto al primero de estos argumentos y decreciente respecto al segundo de ellos. Esto es, siendo B un parámetro de productividad en el aprendizaje:

$$y_s = e a_s^h \left[1 - \frac{i_s^h}{B^2}\right] \text{ (2.151)}$$

A partir de esta especificación, es posible maximizar la renta vital como la suma descontada de las rentas laborales desde el período s hasta el final de la misma respecto a la senda de posiciones en capital humano en cada período, partiendo del hecho de que la inversión bruta en este activo dentro de la función de renta puede sustituirse por la diferencia entre la posición y el valor neto de depreciación de la posición en el período anterior. La forma funcional resultante para la renta vital descontada guarda cierto paralelismo con la utilizada por Becker y Chiswick (1966), que expresa dicha renta como la suma de la generada por la capacidad actual del individuo, rentabilizable de modo inmediato incluso sin emprender nuevas inversiones en capital humano, más la suma de las sucesivas tasas de retorno de las inversiones futuras. La equivalencia entre las dos formulaciones surge cuando se considera que, en el marco de Rosen, las tasas de retorno futuras son decrecientes respecto al tamaño de la inversión[46], mientras que Becker y Chiswick no las endogeneizan.

Las cpo proporcionan una ecuación en diferencias en la posición en capital humano cuyas soluciones dependen del signo de uno de los coeficientes, pero la solución más plausible es coherente en esencia con los perfiles arrojados por la mayor parte de los modelos de ciclo vital y comentados anteriormente: una trayectoria monótona decreciente para la inversión bruta y perfiles del stock de capital humano con un primer tramo creciente y uno segundo decreciente a causa de la acción de la depreciación, partiendo de una ordenada en el origen tanto más elevada cuanto mayor sea la dotación inicial del activo. Incluso a partir de un sustrato teórico distinto, el signo negativo de la inversión en capital humano coincide con aquellos modelos de ciclo vital en los que aquella estaba sujeta a costes de ajuste, aspecto que refuerza la reducción de los beneficios marginales de la inversión a medida que transcurren los períodos de vida.

Becker y Stigler (1977), sobre la base de Becker y Michael (1973), construyen un modelo de learning by doing en el seno del hogar, en el que el incremento de la productividad del trabajo en la tecnología de ciertas commodities se logra a partir de una acumulación de capital humano, posibilitada a su vez por el consumo previo de la commodity (teoría de las adicciones). En efecto, siendo C_i una commodity incluida en la función de utilidad (el ejemplo que mencionan los autores es la audición de música), esta se produce por medio de una tecnología que depende del tiempo de ocio dedicado a la misma, así como del capital humano, entendido en este caso en su vertiente de conocimientos y habilidades sensitivas que permiten disfrutar de la música. Esto es:

[46] De hecho, como se verá en el capítulo sobre tasas de retorno, estas son decrecientes incluso fuera de un modelo de learning-by-doing respecto al tamaño de la inversión siempre que la función de inversión bruta presente rendimientos decrecientes en el input específico.

$C_{is} = C\left(n_s^i, a_s^h\right)$ (2.152)

Al mismo tiempo, la acumulación de capital humano se logrará en este caso por la propia producción de la commodity en períodos anteriores (esto es, se desarrolla la capacidad de disfrutar de la música escuchándola previamente). Por tanto, la función de acumulación de capital humano reviste en esta ocasión la forma retardada:

$a_s^h = h\left(C_{s-1}^i, C_{s-2}^i, \ldots \omega\right)$ (2.153)

En la función de acumulación, su último argumento denotaría la educación recibida por el individuo que permite disfrutar de la música (podríamos pensar en una dotación o stock de capital humano inicial); las derivadas parciales respecto a la producción pasada de la commodity tendrían signo positivo en todos los casos. Por tanto, el problema del individuo consiste en optimizar una función de utilidad dependiente del conjunto de commodities, entre las cuales figura la de referencia, sujeto a la restricción presupuestaria flujo habitual con asignación de tiempo entre diferentes finalidades (ocio en la producción de cada una de las commodities, i entre ellas, así como tiempo de trabajo) y a la función de acumulación de capital humano a través del efecto adicción. Así pues este tipo de planteamiento retomaría la idea de producción conjunta de Grossman comentada en el apartado de Economía de la Salud, solo que lo haríá secuencialmente y no simultáneamente en el tiempo, de suerte que la producción de una commodity sirve, indirectamente, como input para la producción de una commodity, que en este caso es la misma solo que algunos períodos después.

Este tipo de adicciones se califican como "beneficiosas", en la medida en que la acumulación de producción permite reducir su coste futuro, gracias a una rápida acumulación de capital humano que permite mantener el consumo de un cierto nivel de la commodity aplicando una menor fracción de tiempo a su producción. Por el contrario, cuando la derivada parcial del consumo pasado de una commodity sobre la producción de capital humano es negativa, se habla de adicciones "perjudiciales". Siguiendo con los ejemplos propuestos por Becker y Stigler, sería el caso del consumo de heroína: si bien esta produce una euforia momentánea, su ingesta prolongada va erosionando el capital humano que posibilitaba en el pasado su disfrute (en otras palabras, se debilita la resistencia física).

En el mismo trabajo Becker y Stigler realizan una primera aproximación al planteamiento de un modelo dinámico basado en estas premisas[47]. Se parte de una función de utilidad en el que hay dos commodities, Z y C, solo la segunda de las cuales lleva asociada un efecto adicción. El tiempo se reparte en el empleado en la producción doméstica de ambas y de trabajo de mercado y la suma descontada de los gastos en los inputs a lo largo del ciclo vital se iguala a la suma de los ingresos. La combinación de las cpo respecto al consumo de las commodities conduce a la igualación entre su relación marginal de sustitución y su coste sombra de producción relativo, como en el modelo beckeriano tradicional de asignación de tiempo. La diferencia estriba en la composición del coste marginal de producción de la commodity que conlleva adicción. Este está compuesto por dos elementos: uno, común a Z, dado por la pérdida de renta salarial a causa de un incremento marginal en el tiempo destinado a la producción de C; este vendrá dado tanto por el coste de oportunidad (el saario real de mercado) como por la inversa de la productividad marginal de la tecnología de producción de C. El segundo elemento, verdaderamente diferencial, es la suma descontada de ahorro de input hasta el final del horizonte conseguido gracias a la acumulación de capital humano por medio del aumento de la producción de C. Cuando la adicción es beneficiosa, este elemento tiende a reducir el coste marginal de producción, mientras que cuando es perjudicial lo incrementa.

La realización de algunas hipótesis sobre la evolución de los componentes de esta cpo permite alcanzar algunas conclusiones sobre el perfil de la adicción a lo largo del ciclo vital. En la juventud, la adición de capital humano implicará importantes aumentos de la producción en la tecnología de C, por lo que descenderá el primer componente del coste marginal. El ahorro futuro de tiempo también descenderá a medida que transcurren los años, aunque proporcionalmente es todavía bajo en los primeros años de la vida. Esto hace más probable que el coste marginal descienda en una etapa inicial, lo que fomenta el consumo de C frente al de Z. En etapas posteriores nada puede afirmarse a priori sobre la senda del coste marginal, aunque debería ser creciente con mayor probabilidad hacia el final de la vida. En cualquier caso, debe diferenciarse decrecimiento del coste marginal de C y aumento del tiempo dedicado a su producción: cuanto mayor sea la productividad del

---

[47] Becker y Murphy (1988) formalizan de un modo más riguroso la dinámica del modelo, aunque conceptualmente la esencia no varía respecto al trabajo de 1977 de Becker y Stigler. Bajos supuestos habituales sobre las preferencias y la tecnología de acumulación del capital humano, se concluye la existencia de dos posibles estados estacionarios, solo uno de los cuales es estable y en el que la inversión bruta en capital humano (o “capital de consumo”, como se redenomina a este conjunto de rasgos que determinan la predisposición al disfrute de la commodity) se limita a la reposición del mismo.

capital humano dentro de su tecnología y menor sea la elasticidad de su demanda ante descensos en su coste relativo, tanto más probable será que una producción de C en expansión no vaya vinculada a aumentos del tiempo, o estos sean menos que proporcionales.

A pesar de que la teoría sobre adicciones racionales está conectada en su nacimiento en mayor medida con el enfoque de learning by doing, era de esperar que pronto sería incorporada al ámbito de la Economía de la Salud, siendo numerosos los trabajos que la han insertado en un marco más amplio en el que el capital humano, en una o varias dimensiones, juega un papel fundamental. **Jones et al. (2014)** integran la adicción racional en el modelo de Grossman, identificando tipos de capital: el capital-salud (a_s^{hH} , manteniendo la nomenclatura anterior) y el capital-adicción (a_s^{hA}). Para simplificar la tecnología de producción, se introduce en la función de utilidad dos bienes de adquisición directa en el mercado, Z y C, el segundo de los cuales es el que produce adicción. De esta manera se tiene:

$U = u\left(Z_s, C_{s,} a_s^{hH}, a_s^{hA}\right)$ (2.154)

El proceso productivo de la salud también se simplifica, pasando a producirse solamente con un input de mercado (cuidados médicos). La restricción presupuestaria, en la que la asignación del tiempo no juega ningún papel, queda así:

$y_s = Z_s + p_s^C C_s + p_s^H x_s^H$ (2.155)

La ecuación de acumulación de la adicción se plantea à la Becker-Stigler, con:

$a_{s+1}^{hA} = h^A\left(C_s\right) + \left(1-\delta^A\right) a_s^{hA}$ (2.156)

La interacción entre la adicción y la salud se manifiesta también en la ecuación de acumulación de la segunda, de suerte que la primera influye negativamente:

$a_{s+1}^{hH} = h^H\left(x_s^H\right) + \left(1-\delta^H\right) a_s^{hH} + G\left(a_s^{hA}\right);\ G' < 0;\ G'' < 0;\ G(0) > 0$ (2.157)

Esta repercusión negativa sobre la salud sustituye a la derivada negativa de capital-adicción en Becker-Stigler, toda vez que en este modelo $U_A > 0$ a pesar de que se trata de una adicción perjudicial. El hecho de que G(0)=0 ayuda a explicar beneficios en la salud de aquel que nunca ha acumulado adicción, evidencia que parece sustentar la mayor parte de la literatura biomédica; también permite mostrar los beneficios de abandonar la adicción por un período de tiempo prolongado, hasta que el stock positivo desaparezca. En sentido contrario, la inversión bruta en adicción nula no implica que esta desaparezca, dado el stock acumulado anteriormente. El problema de maximización de las preferencias, sujeto a la restricción presupuestaria y las ecuaciones de acumulación se resuelve en las cantidades consumidas de ambos bienes de consumo, así como el nivel de aplicación del input propio del capital-salud.

Cuando la inversión en los dos activos presenta soluciones interiores, las dos tasas de retorno se igualan, si bien los autores no llegan a derivar las tasa de retorno propiamente dichas. El hecho de que la renta sea completamente exógena, a diferencia de Grossman y los modelos de adicción racional, hace que ambas tasas de retorno no contengan un componente de renta en un sentido tradicional. Antes bien, los pagos están formados en ambos casos por la utilidad marginal (corregida, en el caso de la adicción, por el impacto indirecto sobre la acumulación de capital-salud) y expresada en términos relativos respecto a la utilidad marginal de la riqueza, mientras como es habitual los costes de inversión se imputan a través de los costes de producción unitarios respectivos[48].

II.6. On the job training (OJT).

Becker[49] (1962,1964,1975) identifica el OJT como una vía complementaria a la escolarización para acumular capital humano; la principal diferencia entre ambas es el proveedor de los servicios que permiten aumentar el stock del activo: mientras en el primer caso se trata de una institución o sector productivo especializado, en el segundo caso es el propio ámbito de prestación de los servicios de trabajo. Por otro lado, desde el primer momento Becker apunta al OJT como una actividad onerosa para el empresario, lo que permitiría distinguir esta vía de aprendizaje de otras que resultan de la mera coexistencia

---

[48] Ver en el capítulo 3 sobre tasas de retorno la problemática de este tipo de tasas. La derivación de las tasas en este caso particular, que resulta paradigmático de estas dificultades, se realiza en el mencionado capítulo.

[49] La aparición del concepto es prácticamente simultánea en trabajos de Becker y Mincer (1962), si bien este último desde un ángulo empírico. Mincer articula perfectamente esta vía de acumulación de capital humano como una inversión, al entrañar un sacrificio inicial de recursos -salarios más bajos durante el período de entrenamiento- a cambio de una mayor productividad futura; sobre esta base evalúa empíricamente la tasa en Estados Unidos a partir de datos censales. La perspectiva, sin embargo, es opuesta a la de Becker en cuanto al agente que decide el volumen de inversión óptima: mientras en Mincer es el trabajador, en Becker es la empresa. Esta dicotomía será un rasgo “genético” de la teoría de OJT, inclinándose la mayor parte de la literatura por el enfoque beckeriano debido a la “incontratabilidad” de la formación en el momento de la oferta de la empresa al trabajador; este factor dará lugar a distintas ineficiencias dependiendo de los autores.

entre trabajadores con diferentes habilidades o de la producción conjunta con el stock de capital físico, elementos que pueden constituir también fuentes de adquisición de habilidades, aunque bajo la forma de “learning by doing”.

Los principales aspectos del problema según la visión de Becker son los siguientes: i) OJT constituye para la empresa una inversión en un activo que no es de su propiedad, por tanto idealmente el contrato de prestación de servicios con los propietarios de tal activo debería poder suscribirse sobre una base multiperiódica; de lo contrario solo sería posible para la empresa realizar unos desembolsos pero no podría percibir los pagos de la inversión efectuada. ii) Los costes se presentan en forma de gastos de formación, así como de posibles pérdidas de tiempo de trabajo no compensadas por reducciones en el salario durante aquellos períodos en los que el individuo reciba formación. iii) Los beneficios se sustanciarán en la corriente descontada de diferencias entre la productividad marginal del trabajador y su salario real; se supone que la primera habrá sido acrecentada debido al proceso de aprendizaje.

De este esquema se deduce inmediatamente que una empresa que opere en un entorno de competencia perfecta no tendría incentivos para proporcionar OJT salvo que no afrontara costes, puesto que aquella fija salarios conforme a la regle óptima de igualación entre estos y la productividad marginal del trabajo. Esta conclusión sería válida en tanto en cuanto se tratara de formación general, sujeta a transferibilidad entre empresas, de manera que una vez recibida la formación el trabajador pudiera desarrollar su productividad acrecentada bien en la propia empresa que lo entrenó, bien en cualquiera de sus competidoras.

Existen sin embargo otras alternativas, fuera del entorno estricto de los modelos de competencia perfecta y sin necesidad de apelar a estructuras de competencia imperfecta para explicar la existencia de OJT en la realidad. La principal de las apuntadas por Becker es la provisión de entrenamiento específico a los trabajadores, entendiendo por este uno que está dirigido a trabajar solamente en ciertas actividades particulares del proceso productivo de dicha empresa y por tanto no presenta transferibilidad. Esta solución implica, no obstante, quebrar uno de los supuestos tradicionales de la competencia perfecta, como es la igualdad entre las tecnologías productivas de todas las empresas que operan en un cierto mercado, aunque esta desviación no necesariamente tiene por qué traducirse en una asignación de equilibrio diferente de la de competencia perfecta en el mercado de producto. Mediante la especialización en la formación, las empresas logran un doble objetivo: a) En la medida en que la tecnología a que va dirigida la formación no sea replicable por los competidores o lo sea solamente por un pequeño número de ellos, se reduce la probabilidad de rescisión futura del contrato por el trabajador en un mundo en el que existe libertad de entrada y salida de factores en las unidades productivias. b) La adquisición de estas habilidades por el trabajador extrae la formación salarial de las reglas de competencia perfecta, al crear un entorno de oligopolio bilateral en la que el empresario es el único (o uno de los pocos) demandantes de ciertos servicios del trabajador (tanto más cuanto más se profundiza en la formación específica) y el trabajador es uno de los pocos oferentes que están en condiciones de prestar dichos servicios, cuya disposición a trabajar ha sido además contrastada. Esta situación dota de poder de negociación a ambos, de suerte que la probabilidad de abandono de la empresa ha disminuido para el trabajador, lo que tiende a reducir sus futuros salarios reales por debajo de su productividad marginal acrecentada tras la formación; al mismo tiempo, sin embargo, el gasto de formación incurrido al invertir en el trabajador constituye un coste hundido para la empresa, que caso de perderle debería iniciar el proceso de selección de otra persona y volver a formarla. En general, cuanto más replicable sea la tecnología por otras empresas del sector, tanto menor será la corriente descontada que recoge la diferencia entre el flujo de productividades marginales y salarios reales del trabajador.

A partir de esta aportación, las ramificaciones dentro de la literatura son muy variadas. Una línea intenta justificar la inversión positiva en formación general -parcialmente a cargo de la empresa- mediante fricciones en el mercado de trabajo, tanto de movilidad como asimetrías informativas, incertidumbre en los procesos de búsqueda o imperfecciones inherentes a las estructuras de los contratos de trabajo. Otra, cada vez más extendida, intenta explicar simultáneamente la creación de carteras de inversión simultánea a partir de formación general y específica mediante como reflejo de estrategias de competencia imperfecta en los mercados de producto, complementariedades tecnológicas de ambos tipos de capital humano en la función de producción o de la interdependencia entre las empresas en los mercados de trabajo. Finalmente, otra rama más reciente pone en cuestión la diferenciación entre capacidades generales y específicas, para reducir el problema a la elección de un vector de diferentes capacidades transferibles cuyas intensidades de utilización en las diferentes empresas del mercado es variable; además desplaza el foco del problema desde la empresa al trabajador, procurando explotar todas las similitudes posibles con los modelos de schooling pero un contexto de elección con riesgo en el contexto de las alternativas futuras de empleo.

En cualquier caso, como veremos a continuación la estrategia modelizadora de OJT es enormemente heterogénea. Frente a la fundamentación analítica del schooling, que a comienzos de los años 70 tenía ya un armazón microeconómico sólido, la aproximación de Becker y Mincer al OJT, aun definiendo algunos de los elementos básicos del problema, dejaba abiertas importantes cuestiones tanto en el plano teórico como empírico que han ido siendo cubiertos durante los 40 años siguientes. Esta atención fue menor en parte porque la teoría del capital humano fue concebida en un principio con un carácter unitario y el vehículo a través del cual el individuo podía realizar la acumulación (producción doméstica, escuela, o centro de trabajo) tenía un carácter secundario frente al conjunto de proposiciones fundamentales. La mejor prueba de ello es que los primeros modelos de ciclo vital con capital humano intentaron integrar todas las posibles modalidades de formación de un individuo dentro de una misma lógica.

La manera de abordar las cuestiones no resueltas por el legado beckeriano no ha sido uniforme, sino que se ha servido de estructuras analíticas muy distintas (Economía Industrial, Teoría de la Búsqueda, Economía de la Información), lo que ha impedido la consolidación de un modelo canónico sobre el que efectuar variaciones. Es más, desde un punto de vista dinámico, mientras la inserción del capital humano en los modelos de ciclo vital proporcionó el vehículo a través del que explicar procesos de inversión continua durante todo el horizonte de planificación de los individuos, la mayor parte de los modelos que abordaremos son capaces de explicar una decisión de inversión aisladamente, pero no un continuo de decisiones óptimas, ya que el aparato analítico que utilizan es sensiblemente más complicado que los modelos de schooling y su utilización en un sentido dinámico muy poco operativos muchos de estos planteamientos. Esta también es una razón por la que la utilización de OJT ha sido discontinua y poco frecuente fuera del ámbito de los modelos de equilibrio parcial.

Siendo un enfoque se sustenta sobre la existencia de fricciones, la visión de OJT ha oscilado entre la modelización mediante instrumentos neoclásicos y marcos conducentes a resultados neokeynesianos. Quizá debido a esta ambigüedad de origen, esta rama ha estado buscando su identidad propia durante mucho tiempo; posiblemente todavía no la ha encontrado. Por todas estas razones, el salto a los modelos de equilibrio general, como veremos en el capítulo 3, ha sido mucho más tardío y menos prolijo que el enfoque de schooling: tampoco hubo una contribución tan decisiva como la de Lucas-Uzawa que extrajera los elementos esenciales del enfoque de equilibrio parcial para insertarlos en un marco de crecimiento, posiblemente porque el magma de visiones de equilibrio parcial dificultaba enormemente entresacar un común denominador suficientemente estilizado y por el carácter netamente neoclásico de los modelos de crecimiento en equilibrio general dinámico.

Consecuencia de esta problemática es que resulta difícil intentar vestir con los mismos ropajes del schooling las principales aportaciones de OJT. Se ha procurado a lo largo de este capítulo extrapolar en la medida de lo posible los elementos básicos de la modelización de schooling al OJT, primero para poner de relieve que ambas líneas de trabajo parten de un tronco común y obedecen a líneas de razonamiento similares -aunque los elementos accesorios puedan variar sensiblemente de uno a otro enfoque- y segundo, por una razón más práctica, para evitar una proliferación excesiva de notación y la pérdida de una mínima coherencia expositiva en este trabajo. Sin embargo, ello implica muchas veces sacrificar elementos originales de algunos trabajos, dejar reducidos otros a su mínima expresión o emplear la descripción cualitativa de los resultados con más profusión de la deseable. Comenzaremos pues a desgranar las principales aportaciones suscitadas por las reflexiones originales de Gary Becker.

Algunos trabajos a finales de los años 70 y principios de los 80 tienden a dar continuidad y profundidad analítica al trabajo de Becker más que a buscar un cambio de dirección sustancial en la modelización del fenómeno. En este sentido, **Hashimoto (1981**) refuerza la visión beckeriana del OJT como una inversión centrada en las habilidades específicas como móvil de provisión de formación a través de un modelo de reparto del excedente entre trabajadores y empresa. En concreto el autor interpreta este tipo de inversiones como un modo de superar un entorno laboral post-formación en el que se presentan costes de transacción considerables para ambas partes derivados de una resolución contractual que no es excluible. Para evitarlo, se produce un acuerdo a priori consistente, para el trabajador, en la percepción de un salario inferior al que recibiría en otras empresas a cambio de ganar un salario superior a medio plazo del que recibiría sin dicha formación específica. Simétricamente para el empresario, a corto plazo remuneraría al trabajador por encima de su productividad marginal, mientras que a medio plazo le pagará por debajo de su productividad marginal. Se trataría, por tanto, de una solución à la Coase, en la que cada una de las partes debería sacrificar una parte de sus rentas presentes como vía de internalización de las externalidades que generan aquellos elementos más inciertos de la ejecución contractual.

Para ilustrar esta idea, propone un sencillo modelo en el que el valor de un trabajador viene dado por el capital humano que este ha acumulado en un cierto período de tiempo, tras el que subyace implícitamente una capacidad productiva lineal respecto a dicho stock de capital humano. En un primer momento y antes de entrar en la empresa, el trabajador dispone de un stock de habilidades generales a^{hg} . El proceso de OJT le proporcionará unas habilidades específicas a^{hf} conforme a una función de costes C (dada la tecnología de aprendizaje y los precios de los inputs que esta utiliza) creciente y convexa. La homogeneización entre ambos stocks fuerza a la imposición de un precio relativo entre ambos, m. De este modo, en el segundo período de permanencia del trabajador en la empresa el valor de este vendrá dado por $V = a^{hg} + ma^{hf}$. De aquí se deduce que el retorno de la formación para el trabajador será ma^{hf} . El salario que recibirá en el segundo período vendrá dado por $a^{hg} + \alpha ma^{hf}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Desde el punto de vista del empresario, su valor neto será igual a la diferencia entre el valor del trabajador y su retribución o, equivalentemente, $(1-\alpha)ma^{hf}$. Nótese que esta asignación resulta efectiva para cualquier valor de la proporción de reparto de excedente entre cada una de las partes: si $\alpha = 0$, el trabajador será indiferente a permanecer en la empresa, pero el empresario preferirá su permanencia, al apropiarse de la integridad del excedente; por el contrario, si es igual a la unidad, la situación será la opuesta.

Se supone que existen algunos competidores en el mismo mercado que están dispuestos a pagar una prima de remuneración a cambio de las habilidades específicas adquiridas en la empresa de referencia. Por esta razón pueden definirse probabilidades de abandono voluntario o despido de la empresa en función del tamaño de esta remuneración alternativa y de un componente estocástico -y por tanto inobservable a posteriori- del incremento de su productividad tras la formación. En este sentido, siendo η un shock estocástico de media 0 sobre la capacidad final del trabajador tras la formación, el valor para la empresa del trabajador al final del OJT será $a_s^{hg} + (m+\eta)a_s^{hf}$. Además, el valor para la empresa competidora del mismo trabajador será $V' = a_s^{hg} + \varepsilon a_s^{hf}$, donde ε es otro parámetro aleatorio de esperanza nula. De esta manera, la separación desde un punto de vista colectivo debería producirse cuando el valor para la empresa que forma del trabajador sea menor que para la rival, esto es, $m \leq \varepsilon - \eta$; sin embargo, cuando hay costes de transacción para alcanzar esta solución entran en funcionamiento trigger individuales. Para el trabajador, habrá incentivos de abandono voluntario cuando su salario presente sea menor que el valor para la otra empresa, esto es, $\varepsilon \geq \alpha m \equiv \varepsilon^*$. Simétricamente, el empresario tendrá incentivos para despedir cuando su pago de la inversión sea menor que 0, esto es, $\eta \leq -(1-\alpha)m \equiv \eta^*$. La existencia de las referidas variables aleatorios y los trigger testimonia las fricciones asociadas a la movilidad del trabajador y justifica en última instancia la provisión de formación específica. Esto es, pese a que la formación específica genera un valor para la competencia, la estocasticidad de este y el hecho de que solamente un intervalo del mismo desencadene la decisión de abandono de la empresa hace posible una inversión positiva en la misma.

La determinación del equilibrio se produce secuencialmente. En primer lugar, se maximiza el excedente conjunto mediante la elección del nivel de capital humano específico a adquirir, así como del salario que el trabajador percibirá en su segundo período en la empresa. El excedente esperado del trabajador (WS) será igual a la diferencia entre un excedente bruto descontado (al percibirse en el segundo período) y la participación del trabajador en los costes de formación. A su vez, el primero, dadas unas probabilidades de salida voluntaria de la empresa (q) y de despido (d), será la suma de varios términos: i) el salario esperado en la empresa en la que se recibe formación caso de que no se produzca despido ni abandono voluntario; ii) la remuneración alternativa, cuando se hay abandono de la empresa bien debido a despido o voluntariamente; iii) (menos) el capital humano general de partida, que en cualquier caso hubiera generado una retribución a percibir igualmente de no realizarse la inversión. Esto es, con ψ denotando el porcenje de costes de formación a cargo del trabajador:

$$NWS = \frac{WS}{(1+i)} - \psi C$$

$$WS = (1-d)(1-q)E(w) + (1-d)qE[V' | \varepsilon > \varepsilon^*] + dE[V'] - a^{hg} \quad (2.158)$$

El excedente neto de la empresa viene dado por la fracción del valor captada por la empresa esperada en caso de que no haya despido ni abandono voluntario (excedente bruto), descontado al tipo de interés vigente, menos su participación en los costes de financiación del entrenamiento:

$$NFS = \frac{FS}{1+i} - (1-\psi)C;$$

$$FS = (1-d)(1-q)E[V - w | \eta > \eta^*] \quad (2.159)$$

El sistema de 2 cpo[50] que resulta del problema de optimización permite obtener el par de equilibrio $a^{h,f}, \alpha$ .En una segunda fase del problema se decide el reparto del excedente a través del parámetro de participación en los costes de formación, aplicando la condición de que todos los excedentes netos deben ser igual a cero a largo plazo. El resultado refleja una participación de los trabajadores en dichos costes igual a la proporción que constituyen su excedente bruto dentro del excedente bruto final.

Carmichael (1983) critica los resultados de Becker-Hashimoto en cuanto que la maximización del excedente a posteriori proporciona un resultado ineficiente, al tener en cuenta parcialmente pero no mitigar todo lo posible el impacto de las características del contrato sobre la contraparte. Por ejemplo, un salario alto en el segundo período puede

[50] Hay que tener también en cuenta que las probabilidades de abandono o despido son endógenas, al existir un trigger en función del tamaño de los retornos para el trabajador y la empresa, respectivamente.

ser coherente con la maximización del excedente neto conjunto, pero esto no obsta para que incremente las probabilidades de despido, dado el carácter estocástico de la variación total de la productividad del trabajador tras la formación[51]. En otras palabras, la naturaleza endógena de las probabilidades no se explota adecuadamente. A consecuencia de esta incapacidad del contrato para contener adecuadamente los riesgos, este puede tener una naturaleza inestable.

Para solventar este problema introduce el factor de la promoción durante el segundo período de estancia en la empresa. Este se subdivide exógenamente en dos subperíodos, durante cada uno de los cuales se ejecutan trabajos diferentes, accediéndose al segundo por un criterio de *seniority*. El salario será superior en el desempeño del segundo de estos trabajos; en la medida en que esta última fase profesional va asociada a un mayor salario que se conseguirá con mayor probabilidad -por el mero transcurso del tiempo-, el trabajador estará menos inclinado a dejar la empresa durante el comienzo de este segundo subperíodo. Al mismo tiempo y a diferencia de los resultados de Hashimoto, la empresa también será menos proclive a despedir al trabajador durante esta última fase de su carrera, ya que otro sustituto “junior” ocuparía el lugar del despedido con el mismo salario. La introducción de este tercer colectivo (los junior), que se beneficiará de una rescisión contractual, será el elemento esencial para equilibrar los objetivos de los agentes que intervienen en la configuración óptima ex ante de los contratos.

El modelo se estructura de esta manera en dos bloques. El primero de ellos está informado de un planteamiento no muy lejano al realizado por Hashimoto. En él se introducen dos variables estocásticas que influyen en las ganancias de los agentes, cuyos valores solamente son cognoscibles a posteriori, una vez se desvela el resultado del proceso de formación al final del primer período: un parámetro aleatorio de productividad en el trabajador, que puede hacer que el incremento de esta se sitúe por encima o debajo del valor que se espera proporcione la formación interna, y otro de satisfacción del trabajador. Si denominamos η y θ a estas dos variables, existirán valores críticos de las mismas (η^*, θ^*) determinados endógenamente, tal que si ex post ambas se revelan inferiores

---

[51] En la derivación de las cpo de maximización del excedente conjunto en el artículo de Hashimoto, se considera el impacto que cada una de las variables de control tiene sobre las probabilidades de abandono y despido, pero se asume un riesgo incremental hasta donde permite la igualdad de costes y beneficios marginales. Así, por ejemplo, la cpo del coeficiente que marca el reparto de la productividad incremental tras la formación establece la igualdad entre la disminución de q y el incremento de d, adecuadamente ponderados, al variar α .

a los primeros, se producirá una rescisión contractual, por el empresario si es la productividad la que presenta un nivel deficiente y por el trabajador en el caso de que la satisfacción laboral sea insuficiente. Estos umbrales permiten construir la probabilidad de despido (d, con función de densidad ϕ^d) y abandono (q, con función de densidad ϕ^q) como:

$$q = \int_{-\infty}^{\theta*} \phi^q(\theta)\, d\theta;\ d = \int_{-\infty}^{\eta*} \phi^d(\eta)\, d\eta \ (2.160)$$

La determinación de los umbrales se realiza mediante la optimización del excedente neto conjunto de trabajadores y empresarios, entendiendo este como el incremento en la productividad de los primeros debido al proceso de entrenamiento, más la satisfacción alcanzada, menos los costes de entrenamiento C. En términos formales:

$$NS = (1-q)(1-d)\left\{\left(a^{hf} - a^{hg}\right) + E\left[\eta | \eta > \eta *\right] + E\left[\theta | \theta > \theta *\right]\right\} - C \ (2.161)$$

El resultado del problema de optimización permite definir los siguientes umbrales óptimos:

$$\theta^* = -\left[\left(a_s^{hf} - a_s^{hg}\right) + E\left[\eta | \eta > \eta^*\right]\right] \ (2.162)$$

$$\eta^* = -\left[\left(a_s^{hf} - a_s^{hg}\right) + E\left[\theta | \theta > \theta^*\right]\right] \ (2.163)$$

Esta solución refleja la internalización total de los costes de la contraparte en la determinación del umbral de rescisión contractual y constituye una versión de la endogeneización de las probabilidades de despido y abandono obtenidas por Hashimoto en la que se depuran las externalidades que en esta versión contaminaban la fijación de los umbrales.

El segundo pilar del modelo es, como anticipamos, la escala de categorías profesionales. Si en el segundo período la información fuera simétrica y cada uno de los signatarios del contrato conociera los triggers de la contraparte, el problema estaría resuelto. Pero en la realidad la información es simétrica y costosa de intercambiar, por lo que el modelo necesita cerrarse mediante un sistema de revelación de preferencias. Este será la introducción de la promoción. Durante el segundo período de permanencia en la empresa, una vez se ha finalizado el período de entrenamiento, se supone que los trabajadores ocuparán consecutivamente dos puestos que no requieren diferente nivel de productividad, pero que llevan asociadas diferentes tareas y por tanto distintos sueldos. De esta forma, durante la primera parte de este segundo período se desempeña el primero de estos trabajos, con un salario de partida y cuando se alcanza la seniority en dicho puesto se asciende al superior, con un salario adicional. El propio contrato suscrito entre trabajadores y empresa contiene el número de puestos de este segundo tipo que se crearán por período. Si denominamos w1 al salario del primer período, w2 al del primer subperíodo tras el entrenamiento y w2+B al del segundo subperíodo, accesible tras la promoción profesional, la nómina total para la empresa vendrá dada por el total de empleados en cada situación por sus salarios:

$W_s = N_{1s}w_1 + N_{2s}w_2 + N_{22s}B$ (2.164)

Siendo N_{22s} el tamaño del colectivo, incluido en N_{2s} , de aquellos trabajajadores que desempeñan los cometidos más elevados y perciben un sueldo diferencial. Si la empresa decide rescindir el contrato con un integrante de este último grupo, ahorrará únicamente un salario w2, pero no w2+B, ya que el despedido será reemplazado al período siguiente. Esta consideración permite resolver un par de valores óptimos (w2,B), compatibles con las cpo derivadas antes para los umbrales de satisfacción y productividad. En efecto, por un lado el empresario despedirá siempre y cuando:

$a_s^{hg} + \left(a_s^{hf} - a_s^{hg}\right) + \eta < w_2 \Rightarrow \eta^* = -a_s^{hf} + w_2$ (2.165)

Por lo tanto, el valor óptimo de w2 podrá despejarse de la ecuación:

$-\left[\left(a_s^{hf} - a_s^{hg}\right) + E\left[\theta \middle| \theta > \theta^*\right]\right] = -a_s^{hf} + w_2$ (2.166)

Análogamente para el trabajador, este abandonará su trabajo voluntariamente cuando se cumpla:

$\theta^* = -\left[\left(w_2 - a_s^{hg}\right) + \frac{N_{22s}B}{N_{2s}}\right];\ N_{2s} = (1-q)(1-d)\left(N_s - N_{1s}\right)$ (2.167)

Enlazando, con la segunda cpo de la maximización de la ganancia conjunta, podrá despejarse B de la ecuación:

$-\left[\left(a_s^{hf} - a_s^{hg}\right) + E\left[\eta \middle| \eta > \eta^*\right]\right] = -\left[\left(w_2 - a_s^{hg}\right) + \frac{N_{22s}B}{N_{2s}}\right];\ N_{2s} = (1-q)(1-d)\left(N_s - N_{1s}\right)$ (2.168)

Como conclusión, todos los componentes del contrato tienen solución, dando lugar a una estructura que amplía su estabilidad respecto a la propuesta por Hashimoto, por internalizar más directamente las pérdidas cruzadas de la rescisión, y simultáneamente es compatible con la maximización conjunta de las ganancias.

OJT y selección adversa. Una línea de modelos que arranca a finales de los años 80 se concentra en un elemento particular de la línea beckeriana tradicional, al iluminar los condicionantes de la inversión en formación general debidos a los problemas informativos sobre las características del trabajador, el entrenamiento recibido, los métodos de revelación de tal información y el grado de difusión de la misma en el mercado de trabajo. Al aplicar este tipo de supuestos se ponen de manifiesto barreras a la rotación de trabajadores no contempladas por Becker y que pueden explicar diferencias en algunas de las predicciones de su modelo, como el reparto de la financiación de los costes de formación entre empresa y trabajador o la aparición de incentivos a la inversión en capital humano general a consecuencia de dichas barreras a la movilidad. Es más, dependiendo del grado de asimetría informativa se puede tener un abanico de resultados, de los cuales el análisis de Becker correspondería a un equilibrio en un entorno de asimetrías nulas.

Katz y Ziderman (1990) son algunos de los primeros autores en enriquecer el análisis beckeriano de OJT con el factor de la informacion asimétrica entre trabajador y empresa. El punto de partida del artículo es el hecho de que la falta de trabajadores formados en las empresas en muchas ocasiones no está relacionado con un alta especificidad del entrenamiento apropiado, sino que puede explicarse sobre la base de incertidumbre sobre el valor del trabajador con experiencia previa para la empresa que lo recluta. Este hecho se apoya en los dos elementos que integran el valor de la inversión OJT realizada en previos empleos: su componente general y el valor de las opciones que confiere al trabajador dicha inversión. Mientras este segundo componente es verdaderamente difícil de conocer para la empresa que lo recluta y ya de por sí implica que el valor del trabajador para ella sea inferior al de la empresa que lo entrenó, la estimación de la formación general del trabajador implica un tiempo de observación del mismo en la realización de sus cometidos en el nuevo puesto; a su vez este proceso de control entraña costes para la empresa que lo contrata.

Consciente de esta insuficiencia informativa, la empresa diseñará su estrategia óptima como un juego en el que el trabajador contratado puede tener un entrenamiento general o no, y a su vez ella puede confiarle tareas que requieran un entrenamiento general o no. El resultado óptimo con información perfecta sería una combinación de un trabajador entrenado en tareas que requieran entrenamiento, ya que este iría asociado a una elevada productividad del contratado. Sin embargo, un individuo escasamente entrenado en un puesto que requiera un nivel de entrenamiento sensible arroja las peores pérdidas para la empresa. Para evitar este resultado, el gestor se decantará habitualmente por una solución maximin, esto es, colocar al trabajador en un puesto que no requiera entrenamiento previo, y someterlo a observación durante este período para inferir sus verdaderas habilidades.

Por su parte, el trabajador entrenado declinará estos puestos, al estar peor pagados y ser prolongado el proceso de verificación de su capacidad, mientras que el trabajador no capacitado estará indiferente ante una oferta de este tipo. Este equilibrio reduce la movilidad de trabajadores entre empresas, incluso aunque los conocimientos asociados con las vacantes sean de tipo general. En este contexto el conocimiento para una empresa reclutadora de la probabilidad de que un trabajador tenga un entrenamiento general apropiado podría dinamizar el mercado de trabajo, o como subóptimo la información accesible sobre el programa general de entrenamiento de un competidor, incluso aunque no vaya acompañada de información individual sobre los trabajadores. Sin embargo, la disponibilidad de esta información puede llevar a la empresa que entrena a infraproveer de formación a sus empleados, al objeto de reducir la probabilidad de éxito en la contratación para otros competidores y bloquear o dificultar su abandono.

Sobre la base de estos supuestos es posible endogeneizar las características del contrato suscrito por la empresa y el trabajador para proporcionar a este segundo entrenamiento general. Denominando VT al valor total del trabajador de un trabajador entrenado, VN al valor efectivo del trabajador para una empresa que recluta con diversos grados de información asimétrica sobre su entrenamiento previo y L=VT-VN a la pérdida de valor que experimenta un trabajador formado a consecuencia de las deficiencias informativas, aquella es creciente a medida que estas últimas se hacen más severas. En efecto, la falta de transparencia sobre el nivel real de capital humano del trabajador impide que muchas de las opciones laborales a que da lugar su entrenamiento no puedan cuantificarse. En consecuencia, cuanto mayor sea la pérdida de valor reconocible, tanto mayor será el esfuerzo de entrenamiento a financiar por la empresa que desea contratar al trabajador. Cuando la información es tan escasa que la pérdida de valor reconocido es total (L=VT), el valor del trabajador formado es imposible de distinguir de aquel del trabajador no cualificado, por lo que la empresa debera cubrir íntegramente los costes de entrenamiento. En el extremo opuesto, cuando la información es perfecta VN=VT y L=0, con lo que la empresa contratante no estará dispuesta a sufragar ninguna inversión adicional en el trabajador y toda ella correrá a cargo de este -este podría ser un caso similar al planteado por Becker (1962), cuando planteaba que las empresas nunca estarán dispuestas a financiar la inversión en capital humano general de sus empleados-. En los casos intermedios en que existe co-financiación, siendo T al coste del entrenamiento, la mínima cantidad de coste de entrenamiento que se solicitará sufrague el trabajador será T-L (siempre que T sea mayor que L); en un entorno perfectamente competitivo, VT=T y la ganancia neta de abandonar la empresa que lo formó sería entonces nula (el excedente al permanecer sería L, el mismo valor que para una empresa rival). Esta solución límite implicaría que la empresa se haría cargo, como máximo, de L/T del coste total del entrenamiento. Esta solución será la que se aplique en la práctica, ya que el trabajador no estará dispuesto a cubrir una fracción superior del coste. **En resumen**, **a mayores costes de verificación de la cualificación, menores incentivos a la movilidad y menor participación del trabajador en la financiación del OJT**.

Una consecuencia importante de este modelo tiene lugar en el ámbito de las restricciones de liquidez del trabajador. Cuando estas se plantean e imposibilitan la financiación del entrenamiento en la cuantía exigida por la empresa dado un nivel de asimetría informativa, o bien el entrenamiento es divisible, de modo que pueda ser financiado por el trabajador en varios tramos, o si no puede no haber entrenamiento, con la consiguiente subinversión respecto al nivel óptimo para la empresa. Los entornos con información perfecta o escasas asimetrías son aquellos en los que el problema tiene más probabilidades de presentarse, al deber el trabajador financiar una mayor proporción de los costes del entrenamiento. Sin embargo, a medida que se incrementan las deficiencias informativas, el problema puede perder relevancia, al absorber la empresa una fracción creciente del entrenamiento. Hay que subrayar que podrá perder relevancia en tanto que las restricciones de crédito afecten solamente al trabajador y no sean generalizadas, en cuyo caso es muy probable que se produzca igualmente subinversión.

El análisis de Katz y Zidermann también puede utilizarse para evaluar algunas instituciones típicas del mercado de trabajo, como los **salarios mínimos**. Es un resultado tradicional de modelos con información simétrica que la existencia de dichos salarios bloquea la provisión de entrenamiento general por las empresas si el nivel es tal que impide a la empresa recuperar su participación en los costes de entrenamiento del trabajador. Con información asimétrica, este efecto puede quedar parcialmente diluido. En efecto, dado un nivel de salario mínimo exógeno, a mayor asimetría en la información, mayor participación de la empresa en los costes formativos y por tanto mayor el salario que estaría dispuesta a pagar al trabajador durante el entrenamiento. Con una deficiencia nula (entorno beckeriano), todos los costes del entrenamiento corren a cargo del trabajador, por lo que su salario máximo debería igualarse a su coste de oportunidad externo; con un salario mínimo por encima de este, no se impatirá entrenamiento alguno. Por tanto las distorsiones impuestas por el salario mínimo dependerán en última instancia del grado de asimetría informativa.

Chang y Wang (1995) introducen la selección adversa en la modelización de las inversiones en capital humano en el entorno laboral. Partiendo de un intento de explicación de las diferencias en rotación laboral entre países, llegan a la conclusión de que estas pueden deberse bien a distintos parámetros de un modelo clásico de OJT entre países (por ejemplo, diferentes costes de formación laboral en el seno de las empresas) o bien a una configuración que conduzca a equilibrios múltiples, en los que coexistan soluciones de alta y baja rotación; en una línea similar cabría situar trabajos anteriores de Prendergast (1989) y Glaeser (1991). En cualquier caso se trata de un modelo que no es contradictorio con las tesis beckerianas, sino que ilustra uno de los casos en que las fricciones a la movilidad (en este caso, relativas a la identificación de la tipología de trabajadores) conducen a una inversión general positiva.

En su modelo el contacto de los agentes con el mercado laboral dura dos períodos, pudiendo trabajar en empresas diferentes en cada uno de ellos. Los agentes son de dos tipos, competentes e incompetentes, existiendo una probabilidad constante y conocida de que pertenezcan a cada grupo (b será la de incompetencia). Cada trabajador posee una dotación inicial de capital humano al iniciarse el primer período y acceder a la empresa y puede ampliarlo en el seno de esta durante el mencionado primer período a un cierto coste creciente y convexo en el nivel de formación. Tras esta inversión, la productividad final del trabajador será igual a su stock inicial de capital humano más el incremento esperado asociado a la formación más una variable estocástica η que puede tomar valores positivos o negativos dentro de un cierto rango. La eficiencia de un trabajador tras recibir la formación a su entrada en la empresa será $y_1 = y_2 = a_1^h + \eta$, explicando la formación el incremento en el componente determinístico de dicha eficiencia a partir del capital humano atesorado al comienzo del horizonte: $i^h = a_1^h - a_0^h$.

La empresa que contrata en el primer período solo puede hacer inferencias sobre la tipología del trabajador al final del primer período y observar su productividad. Dado que en el momento de la contratación es imposible concluir al respecto, todos los trabajadores recién incorporados recibirán el mismo salario inicial. La productividad de un incompetente será nula, no importa cuál haya sido su inversión en OJT. Los oferentes de trabajo serán neutrales al riesgo y su función de utilidad dependerá de los salarios percibidos en cada período menos los costes de entrenamiento en el primer período: $U = w_1 - w_2 - C\left(i_1^h\right)$. Tendrán además un cierto nivel de utilidad de reserva ($\overline{w}$) por debajo del cual no podrá situarse el salario inicial; aquel se considera exógeno en el modelo.

Si los trabajadores deciden abandonar la empresa en el segundo período laboral cobrarán un salario que es determinado endógenamente (w_2'). Si, por el contrario, deciden permanecer en la empresa, recibirán una retribución w_2 basada en la productividad esperada en el segundo período, que será la misma que la observada al final del primero, y negociada con la empresa; es posible demostrar que si el resultado de esta negociación es un equilibrio de Nash, el salario del segundo período será la media de su productividad esperada y el umbral salarial que les movería a abandonar la empresa (w^q). Esto es:

$$w_2 = \begin{cases} \dfrac{\left(y_2 + w^q\right)}{2}, \text{ si } \mathrm{y}_2 \geq w^q \\ w^q, \text{ si } \mathrm{y}_2 < w^q \end{cases} \quad (2.169)$$

Teniendo en cuenta las diferencias de productividad entre trabajadores de cada grupo (conociendo los extremos del intervalo en los que se distribuye el shock estocástico de productividad) y que el excedente del salario recibido en el segundo período sobre la productividad no puede ser negativo si se decide abandonar la empresa inicial, es posible derivar una probabilidad 1-b de que el trabajador que se lanza al mercado en el segundo período sea competente. Conocida la anterior y teniendo en cuenta que las empresas operan en competencia perfecta, el salario que se percibe si se abandona la empresa será igual a la productividad esperada: $w^q = (1-b)\left(a_0^h + i_1^h\right)$. Un equilibrio será entonces un vector de valores de este último salario, el salario del primer período y la inversión en OJT tal que se maximice la utilidad de los trabajadores, la empresa maximice su beneficio y el salario del segundo período se corresponda con la productividad esperada.

La maximización de la utilidad esperada del trabajador se realiza con respecto a la formación a adquirir en el primer período. En cualquier caso, incurrirá en el coste de formación y, sea cual sea su habilidad innata, recibirá el mismo salario en el período de entrada a la empresa. Si el trabajador pertenece al grupo de los competentes, su abandono o no de la empresa dependerá de si su productividad ex post en el primer período es inferior al salario alternativo en el mercado, ya que si se quedara percibiría una cantidad inferior a este. Por tanto se estimará la probabilidad de este suceso, al que se asignará una remuneración igual a aquel y del contrario, en cuyo caso, como se comentó antes, la retribución vendrá dada por la media aritmética de la productividad del primer período y el salario externo. Finalmente, si el trabajador es incompetente, dando lugar por tanto a una productividad nula en el primer período, será expulsado de la empresa por el manager y percibirá el salario alternativo en el segundo período. Todos estos elementos se condensan en el siguiente programa de maximización de su excedente respecto a la inversión en formación, sujeto a la restricción de que este no sea inferior a su utilidad de reserva:

$$Max_{i^h}\ WS = \mathrm{w}_1 + (1-b)\int_{w^q}^{\zeta + a_0^h + i_1^h} \left[\frac{y_2 + w^q}{2}\right] d\mathrm{N}\left(y_2 - a_0^h - i_1^h\right) + N\left(y_2 - a_0^h - i_1^h\right) w^q + bw^q - C\left(i_1^h\right)$$

$$s.a: WS \geq \bar{u} \quad (2.170)$$

Donde ζ es el extremo superior del intervalo dentro del que distribuye el shock de productividad y N es la función de distribución de este. En cuanto a la maximización de beneficios esperados de la empresa, el problema será básicamente el simétrico: en cualquier caso desembolsará el salario de entrada (no inferior al de reserva) y solo si el trabajador es competente le pagará el sueldo de equilibrio, sujeto a la probabilidad correspondiente de que este no abandone la empresa. Puesto que en el momento de la contratación la tipología del trabajador no es conocida, el salario del primer período no puede hacerse contingente a ella. Asi pues, para calcular el nivel óptimo de este se estructura en dos partes: una constante y otra proporcional a la expectativa de la productividad del trabajador que sea capaz de retener la empresa a lo largo de la duración de la relación. De este modo, la empresa optimiza:

$$Max_{w_1,\, i^h}\ \mathrm{FS} = -w_1 + (1-b)w_1 \left[E\left[y_1 \middle| i_1^h \right] + \int_{w^q}^{\zeta + a_0^h + i^h} \left[\frac{y_2 - w^q}{2} \right] d\mathrm{N}\left(y_2 - a_0^h - i^h \right) \right] \quad (2.171)$$

En equilibrio, el resultado principal del modelo es que, si se cumplen las condiciones de segundo orden del problema del trabajador, a mayor salario “de mercado” w^q en el segundo período, menor será la inversión interna en formación durante el primero y mayor la tasa de rotación. En la medida en que la rotación depende de que la productividad realizada en el primer período supere a dicho salario alternativo, cuanto mayor sea este tantas mayores probabilidades de abandono. En el fondo esta proposición está soportada por el supuesto de que la inversión en formación del trabajador durante su permanencia en la empresa no es observable por las competidoras de aquella; por tanto, el salario que estas pueden contraofertar no puede recoger sino una conjetura sobre la formación adquirida. Si por el contrario este esfuerzo en formación fuera observable, el salario de la competencia lo reflejaría y la probabilidad de rotación dejaría de ser un condicionante de la adquisición de capital humano.

El segundo resultado clave es que, para valores suficientemente bajos de la probabilidad de incompetencia, dependiendo de la relación entre varios parámetros del modelo pueden existir dos equilibrios, uno de baja y otro de alta rotación, o bien solamente un equilibrio de alta rotación. En efecto, cuando dicha probabilidad es reducida, la situación es tanto más parecida a una en que no existe la selección adversa, por lo que siempre existe un equilibrio de alta rotación, al aproximarse el salario alternativo de mercado al que se percibiría en la propia empresa; esto sucede con independencia del número de equilibrios. Ahora bien, cuando además la incertidumbre sobre la productividad es pequeña (o dicho de otro modo, los extremos de la distribución uniforme del shock estocástico sobre la productividad están próximos entre sí) puede encontrarse un equilibrio autorrealizable de baja rotación. Supongamos que, en estas circunstancias, se espera que los trabajadores que abandonan su puesto sean incompetentes: la consecuencia será que el salario alternativo que se ofrece a quien cambia su puesto en el segundo período es bajo. Por tanto los trabajadores competentes, por miedo a perder su trabajo, eligen una formación elevada y tienden a permanecer en su empresa, generando por tanto una mayor proporción de incompetentes entre los que rotan; esta estrategia de diferenciación tendrá tantas más probabilidades de éxito por cuanto que la varianza del shock aleatorio sobre la productividad no es importante bajo este supuesto. En suma, la probabilidad de tener múltiples equlibrios dependerá negativamente de la amplitud de los márgenes de variación de la productividad y positivamente del nivel de capital humano diferencial entre competentes y no competentes en el momento de entrada a la empresa en el primer período.

Acemoglu y Pischke (1998) utilizan también las posibilidades de la selección adversa como fricción en el mercado de trabajo capaz de explicar la provisión de entrenamiento general en el seno de las empresas y apunta más concretamente al monopsonio informativo del manager, a medida que observa al trabajador en su comportamiento laboral, como el principal factor detrás de esta inversión. El instrumento elegido es un horizonte de dos períodos, en el que los trabajadores reciben en el primero formación y en el segundo trabajan, siendo tanto ellos como el empresario neutrales al riesgo. La función de producción es lineal respecto al número de trabajadores y cada uno de ellos genera una producción que depende a través de una función f, creciente y cóncava, del capital humano recibido en la primera fase, así como -multiplicativamente respecto al primero- de su habilidad innata a través de una interacción multiplicativa con la primera. La dotación innata de habilidades es estocástica y se distribuye conforme a una cierta función en un cierto intervalo entre 0 y un umbral superior. En el segundo período el trabajador puede tener incentivos a abandonar la empresa si se materializa un cierto shock con función de distribución definida, que le reportará una desutilidad negativa y evitable si cambia de empresa; esta puede entenderse en clave de insatisfacción con su trabajo o el entorno del mismo.

La secuencia de acontecimientos en el modelo es la siguiente: en el primer período la empresa decide a cuántos trabajadores contrata y qué formación les proporciona, si bien todavía no puede distinguir su dotación de habilidades. Al final de este mismo período será el momento en que podrá ya discernirlas. Al comienzo del segundo período la empresa determina el número de trabajadores a los que despide y ofrece un sueldo creciente respecto al entrenamiento recibido a aquellos que se quedan. Por su parte, estos últimos conocerán el valor de su shock de desutilidad y a la vista del mismo decidirán si se quedan o permanecen en la empresa. Por último y también en el transcurso del segundo período, los competidores harán una oferta salarial -positivamente correlacionada también con su entrenamiento- a los trabajadores en el mercado de segunda mano, si bien no puede saber si han llegado a él por propia voluntad o al haber sido descartados por su empresa original. Por último, se impone la condición de libre entrada de empresas en todo período, por lo que sus beneficios serán siempre nulos. Indirectamente este supuesto implica que todo trabajador recibirá un salario en el primer período durante el período de entrenamiento, incluso aunque su productividad sea nula; dicho salario será la única vía a través de la que las empresas competirán por los trabajadores en el mercado, ya que el nivel de entrenamiento proporcionado solamente se decidirá una vez que el trabajador haya sido reclutado.

En primer lugar se plantea un equilibrio con información simétrica en el mercado de trabajo. Esto significa que, una vez la habilidad innata del trabajador se revele al final del primer período, esta es conocida por todas las empresas competidoras, de manera que su oferta salarial será contingente a la habilidad de cada trabajador. En los restantes aspectos el funcionamiento perfecto del mercado de trabajo también es perfecto, por lo que no existen restricciones al abandono de la empresa por el trabajador y por tanto el empresario deberá ofrecerle un salario igual a su productividad marginal en el segundo período, que igualaría el que recibiría en cualquiera de las empresas de la competencia. En cuanto al salario de entrada, caben dos posibilidades. Una, que no existan restricciones crediticias, en el sentido de que el salario pueda tener cualquier signo (esto es, si fuera negativo el empleado puede pedir un crédito para sufragarlo). En tal caso, si la función de costes del entrenamiento coincidiera con el propio nivel acometido y denominamos ω a la dotación innata, el nivel óptimo de entrenamiento sería el que maximizase la siguiente función objetivo (construida para un tipo de descuento nulo):

$$a_1^{h*} = \arg\max \int y\left(a_1^h\right)\omega \, dF(\omega) - a_1^h \quad (2.172)$$

El salario óptimo en estas circunstancias sería $w = -a_1^{h*}$, esto es, el trabajador pagaría íntegramente el coste de la formación, al recibir ya su productividad marginal en el segundo periodo, en la línea del argumento original de Becker. Si hay restricciones de crédito para el trabajador y el salario de este en el primer período debe ser positivo o nulo, su entrenamiento sería cero. En ninguno de los dos casos el empresario asume, pues, el coste del entrenamiento.

Con información asimétrica y selección adversa se supondrá que la habilidad innata del trabajador no es observada por los competidores a la conclusión del primer período. El equilibrio perfecto bayesiano se caracterizará por la existencia de una serie de funciones de comportamiento, mutuamente compatibles: el trabajador tendrá una probabilidad óptima de abandono de la empresa, a la vista del salario que tanto esta como sus competidoras le ofrecen. En concreto, decidirá marcharse si la diferencia entre el salarios más que compensa el shock de desutilidad que sufre si permanece.

$w_1{}' - w_1 + \theta \geq 0$ (2.173)

Dada esta condición y conocida la función de distribución $G(\theta)$, será posible endogeneizar $q(w_1, w_1{}')$. La empresa, a la vista de esta probabilidad, formulará un umbral crítico de habilidad innata observada que desencadenará el despido, así como un salario dependiente del entrenamiento proporcionado y seleccionará también el propio nivel de entrenamiento. Si q es la probabilidad de abandono del empleado, w es el salario de la empresa en la que se encuentra, w´ es el de la competencia y $\hat{\omega}$ es el umbral de habilidades observadas que desencadena el despido, el programa de la empresa será el siguiente:

$$Max_{\tilde{\omega}, w_1(a_1^h), a_1^h} \left[1 - q(w_1, w_1{}')\right] \int_{\tilde{\omega}}^{\infty} \left[y(a_1^h)\omega - w_1 \right] dF(\omega) - a_1^h - w_0 \quad (2.174)$$

Finalmente, la competencia, a la vista de todos estos parámetros, determinará también el salario óptimo dependiente del entrenamiento realizado por el trabajador, como su productividad marginal esperada. A su vez esta se compondrá de una productividad en caso de abandono voluntario de la empresa previa dado por el entrenamiento recibido y la dotacción innata esperada y por la productividad media esperada en caso de que el abandono se hubiera producido a causa de un despido (esto es, de habiidad innata comprendida entre cero y el umbral crítico de equilibrio). Por la regla de Bayes esta probabilidad se transcribe como:

$$w{}'_1(a_1^h) = \frac{q\left[w_1 * (a_1^h), w_1{}'(a_1^h)\right] y(a_1^h) E(\omega) + \left\{1 - q\left[w_1 * (a_1^h), w_1{}'(a_1^h)\right]\right\} \int_0^{\bar{\omega}(a_1^h)*} y(a_1^h) \omega dF(\omega)}{q\left[w_1 * (a_1^h), w_1{}'(a_1^h)\right] + \left\{1 - q\left[w_1 * (a_1^h), w_1{}'(a_1^h)\right]\right\} F\left(\bar{\omega} * (a_1^h)\right)} \quad (2.175)$$

Además se impondrá la condición de beneficios nulos. El nivel de entrenamiento de equilibrio será siempre positivo, aunque inferior al resultante con información simétrica y ausencia de restricciones de crédito. Será positivo porque la información asimétrica restringe el interés de los trabajadores por la movilidad y por tanto permite al empresario apropiarse de parte de las rentas de la formación; será sin embargo menor que la solución competitiva sin fricciones porque existe una probabilidad positiva de abandono del trabajador formado, lo que impide al empresario formador apropiarse de la totalidad del excedente.

Por último, puede demostrarse que el modelo puede presentar múltiples niveles de entrenamiento de equilibrio. Ello es debido a que, por una parte, el salario que oferta la competencia es creciente, para un cierto nivel de entrenamiento, con la probabilidad de rotación laboral; por otra, esta última es también creciente respecto al salario que se recibiría en el mercado de segunda mano. Por lo tanto el entrenamiento de equilibrio se determinaría mediante la confluencia de estas dos curvas, crecientes, que podrían cortarse en más de un punto dependiendo de los valores de los parámetros de la funciones de comportamiento. Si esto sucede habrá dos equilibrios, uno de bajo entrenamiento y alta rotación y otro de elevado entrenamiento y baja rotación. Cuál de los dos es superior en un sentido paretiano es ambiguo: por una parte, dado que el entrenamiento es siempre inferior que en el óptimo no restringido, aumentarlo sería beneficioso; pero al mismo tiempo, a mayor entrenamiento, menor probabilidad de rotación, por lo que los trabajadores tenderían a evitarla para recibir un salario inferior, incluso a pesar de haber experimentado un shock de utilidad negativo. En este sentido, un mayor entrenamiento distorsiona de algún modo las decisiones de movilidad de los trabajadores y ejerce un efecto de sentido negativo sobre el bienestar global.

En última instancia el móvil de la inversión en capital es el mismo que en el modelo de Chang y Wang visto antes: las fricciones de movilidad creadas por los diferenciales salariales que surgen a consecuencia de la información imperfecta. En Acemoglu y Pischke, sin embargo, no existe un salario de mercado alternativo conocido que permita negociar un solución de Nash para el salario del segundo período. En su lugar, cada empresa competidora realiza una oferta salarial diferente y sobre ella el trabajador solo pueden establecerse conjeturas, cuya distribución permite conformar una probabilida de abandono de la empresa y determinar conjuntamente salario del segundo período y formación.

OJT y teoría de la búsqueda en el mercado de trabajo. Las dos primeras décadas de desarrollos sobre OJT dejaron patente una importancia central de los problemas informativos a la hora de explicar fricciones de movilidad que justificaran la realización de inversiones específicas. Por esta razón la formación específica puede proporcionar un excedente conjunto de cuya maximización se extraen los parámetros principales de la inversión en capital humano. A lo largo de ls 70 empiezan las primeras aportaciones fundamentales dentro de la teoría de búsqueda en el seno de la empresa, que incorporan elementos como la probabilidad de llegada de ofertas como elemento básico de la rotación laboral o el conocimiento a posteriori de la calidad del matching; trabajos importantes en este sentido son los de Wilde (1969), Lucas y Prescott (1974), Johnson (1978), Mortensen (1978) y Viscus (1979).

Partiendo de estos precedentes, **Jovanovic (1979a, 1979b)** realiza la primera integración completa de las teoría de OJT y la movilidad laboral en un contexto de búsqueda dentro de la empresa y por medio de un lenguaje con resonancias a los padres de la teoría -aunque en tiempo continuo- como vía para fundamentar el signo positivo que la antigüedad en la empresa suele presentar en las ecuaciones salariales. La base lógica sobre la que pivota la explicación serán las habilidades específicas que integran la formación de un trabajador en su centro laboral: cuando el emparejamiento entre empresario y trabajador es el adecuado, este es el inicio de una relación duradera que incluye la acumulación de capital transferible y no transferible (o general y específico). La formación específica será el principal factor tras el diferencial salarial registrado por el trabajador en la empresa y fuera de ella, toda vez que el capital humano transferible genera el mismo salario cualquiera que sea su centro productivo de aplicación. A la vez la provisión de esta formación específica va asociada con una rotación menor, tanto porque se provee a medida que se verifican características positivas del trabajador como porque, como hemos comentado, genera un ancla en la propia empresa que la proporciona. Más tarde, como veremos, otros autores proporcionarán explicaciones alternativas haciendo más énfasis en la adquisición de capital humano general, bien gracias a imperfeccciones de formación que se reflejan en el proceso de búsqueda, bien mediante la teoría de las habilidades ponderadas (o cartera de habilidades generales) de Lazear.

Desde un punto de vista formal, los trabajos de Jovanovic descansan sobre el artículo empírico de Jovanovic y Mincer (1979), que contaba con un sencillo desarrollo puramente heruístico para proporcionar una fundamentación teórica a las regresiones llevadas a cabo, encaminadas a verificar el signo positivo de la variable antigüedad en las ecuaciones salariales. A partir de este precedente, el autor realiza una construcción teórica mucho más completa en los otros dos artículos publicados el mismo año. El modelo parte de una asignación del tiempo libremente disponible de los individuos dentro de la empresa entre on-the-job searching (OJS) y OJT (n_s^s y n_s^h). El primero se destinará a explorar las posibilidades del mercado en busca de oportunidades laborales mejor remuneradas, mientras que el segundo se traducirá en una acumulación de capital humano específico (no se contempla la formación de tipo general). Denominaremos el capital humano procedente de la formación específica a_s^{hf} , que evolucionará conforme a la siguiente ecuación de acumulación:

$$a_{s+1}^{hf} = a_s^{hf}\left[\left(1-\delta\right)+\phi\left(n_s^h\right)\right] \quad (2.176)$$

La productividad efectiva del trabajador en la empresa (a_s^{hT}), sin embargo, es un concepto más amplio que comprende tanto su capital específico como la calidad del matching μ . Así:

$$a_s^{hT} = \mu_s + a_s^{hf} \quad (2.177)$$

La productividad del trabajador determina su salario real, de modo que:

$\left[1-n_s^s-n_s^h\right]a_s^{hT}=w_s$ (2.178)

La probabilidad de llegada de ofertas cuando se está asignando parte del tiempo a OJS es $\lambda\left(n_s^s\right),\lambda'>0$. La probabilidad de que la oferta recibida contenga con un salario superior al que se está disfrutando en la actualidad viene dada por la función de distribución $Q\left(a^{hT}\right)$. La probabilidad instantánea de recibir una oferta con un salario superior al actual será $h=\lambda\left(n^s\right)Q\left(a^{hT}\right)$. La rotación se produce por la perspectiva de obtener un matching de gran calidad, cuya aportación a la productividad sea superior a la productividad de que se dispone en cada instante, toda vez que en el tránsito entre empresas la productividad debida al capital humano específico se destruye. Sobre esta base podemos definir R como la probabilidad de que hasta un determinado punto del tiempo se haya producido abandono de la empresa a causa de la recepción de una oferta más atractiva, como (planteando a partir de aquí las variables en tiempo continuo:

$$R(t)=1-\exp\left[-\int_{t_0}^{t}h(y)dy\right] \quad (2.179)$$

Contando con estos elementos ya puede formularse el problema de optimización del trabajador. La función de valor de la productividad en un instante s será:

$$V\left[a^{hT}(s),s\right]=Max_{\left\{n^S(s),\,n^h(s)\right\}}\int_s^T e^{-r(\tau-s)}\left\{\begin{array}{l}\left[1-R(s)\right]w(\tau)+\\+R(s)\int\limits_{a^{hT}(s)}^{\infty}V(y,\tau)\left\{f(y)/Q\left[a^{hT}(\tau)\right]\right\}dy\end{array}\right\}d\tau \quad (2.180)$$

Esto es, la función objetivo se construye como el valor descontado del flujo de rentas esperado si no se abandona la empresa en la que se ha recibido formación (el salario correspondiente a la productividad marginal) más aquel asociado a la contingencia de abandono (el valor esperado de la futura productividad, adecuadamente construido sobre la función de densidad de productividades futuras y descontado). Sobre esta función se seleccionan los valores óptimos del tiempo de OJS y OJT. A partir de estas ecuaciones de comportamiento puede apreciarse la complementariedad entre formación específica y probabilidad de permanencia, en ambas direcciones. En primer lugar, como se infiere a partir de la propia definición de probabilidad de llegada de una oferta salarial más ventajosa, a mayor formación específica, para una calidad del emparejamiento dada, menor probabilidad de llegada de una oferta con un salario superior. Por otro lado, a partir de la propia función de valor formulada antes se observa la relación contraria: a mejor emparejamiento, mayor inversión en capital humano específico. En efecto, la calidad del matching, siendo todo lo demás igual, eleva la productividad alcanzada en la empresa y reduce las probabilidades de rotación, dando más peso al término del salario actual en la función objetivo; de ahí que la maximización de la renta pase en ese caso por una asignación de más tiempo a OJT que a OJS.

En definitiva: el modelo de Jovanovic traslada el esquema de asignación óptima del tiempo de Ben-Porath al interior de una empresa y resuelve el problema, como no podía ser de otra forma, en función de los retornos de cada asignación, cada uno de los cuales está afectado de factores aleatorios ligados a la calidad de las decisiones pasadas y la fluidez del mercado de trabajo. La principal diferencia radica en que el tiempo de schooling se entiende en este contexto en inversión en formación específica y se añade una fracción adicional destinada a explorar el mercado, lo que equivale a utilizar de manera lo más eficientemente posible la información disponible para que el tiempo destinado a trabajar reporte unos ingresos los más elevados posibles.

Fu (2011), siguiendo la estela de algunos trabajos anteriores[52], combina también la teoría de la búsqueda en el mercado de trabajo con la del capital humano, en este caso para explicar la compatibilidad entre la provisión de formación general y una alta rotación de trabajadores, hechos que en el análisis beckeriano tradicional no serían compatibles. A pesar de que el objetivo último del modelo sería similar al de Acemoglu y Pischke (1998), la formalización se inserta contempletamente en la teoría de la búsqueda y el origen de la inversión se sitúa más en las viscosidades de movilidad que crea la formación que en una asimetría informativa sobre las características del trabajador.

La idea central del modelo es que las empresas realizan ofertas a los trabajadores para cubrir sus vacantes, las cuales se componen de un salario y eventualmente de entrenamiento general. Aquellas que incluyen entrenamiento presentan un mayor valor para el trabajador, al permitirle una promoción dentro de la empresa y la perspectiva de un mayor crecimiento salarial; por estos motivos este tipo de ofertas resultan más atractivas. Desde la perspectiva de la empresa, las mayores probabilidades de retener al trabajador por medio de un esquema como este a su vez aumentan los incentivos de ofrecer el entrenamiento general, incluso aunque las fricciones a la movilidad de los trabajadores no sean sustanciales. Desde un punto de vista empírico, este tipo de resultados serían coherentes con la correlación positiva que a menudo se encuentra entre crecimiento salarial y duración de la permanencia del trabajador en la empresa.

---

[52] Principalmente Postel-Vinay y Robin (2002), Rubinstein y Weiss (2007) y Burdett, Carillo-Tudela y Coles (2009).

En cuanto al enfoque de modelización empleado, se parte de un mercado con trabajadores y empresas neutrales al riesgo. Cada trabajador posee al comienzo del horizonte 1 unidad de capital humano, que va ampliando a una tasa de crecimiento constante cada vez que acepta una oferta de formación. El valor del stock es conocido una vez se produce la contratación, aunque a priori solo es posible calcular una esperanza en relación al nivel de capacidades de los desempleados. Las empresas derivan una producción a partir de cada unidad de capital humano que emplean; por otra parte, la mera oferta de trabajo llevará consigo un salario por unidad de capital humano y si además esta incluye entrenamiento general, habrá una remuneración adicional por unidad acumulada del mismo activo. Cada trabajador atribuirá un valor a cada oferta laboral recibida, dado su stock de capital humano. Este valor será igual a la renta salarial recibida, más el valor esperado de la oferta que se reciba al período siguiente (que puede rechazarse o aceptarse) para una determinada probabilidad de llegada de la misma[53], más el valor esperado de pasar a una situación de desempleo -a partir de la correspondiente probabilidad exógena-, más un valor esperado de continuidad caso de no retirarse -también hay una probabilidad exógena de salida del mercado-. De esta manera, si la inclusión de formación en la oferta es binaria (representada por los variable t, que toma los valores 0 ó 1), e es el salario por unidad de capital humano, q la probabilidad de recibir una nueva oferta, g la tasa de crecimiento del capital humano tras recibir la formación en la empresa, d la probabilidad de ser despedido y r la de salir del mercado, el valor de un trabajo sin formación será:

$$V\left(e,0,a^h\right)=ea^h+qE_{(e',t')}\max\left[V\left(e,0,a^h\right),V\left(e',t',a^h\right)\right]+dVU\left(a^h\right)+$$
$$+(1-r-d-q)V\left(e,0,a^h\right) \quad (2.181)$$
$$V\left(e,1,a^h\right)=ea^h+qE_{(e',t')}\max\left[V\left(e,1,a^h(1+g)\right),V\left(e',t',a^h(1+g)\right)\right]+dVU\left(a^h(1+g)\right)+$$
$$+(1-r-d-q)V\left(e,1,a^h(1+g)\right) \quad (2.182)$$
$$VU\left(a^h\right)=ua^h+qE_{(e',t')}\max\left[VU\left(a^h\right),V\left(e',t',a^h\right)\right]+(1-r-q)VU\left(a^h\right) \quad (2.183)$$

El valor del desempleo (VU), por su parte, se determinará mediante el valor de la producción doméstica a que dará lugar la disponibilidad de tiempo (que se supone inferior a la producción dentro de una empresa), más el valor esperado de una nueva oferta más la continuidad de dicho valor si no se produce una salida del mercado. En este contexto, el valor de las ofertas con y sin formación es diferente, al llevar asociadas corrientes de remuneración distintas. Esto significa que, al comparar dos ofertas, una con y la otra sin formación, la segunda genera un valor adicional para el trabajador, de modo que este estará dispuesto a sacrificar parcialmente este excedente por medio de un salario más bajo a cambio de tener la oportunidad de recibir más formación.

En cuanto a las empresas, maximizarán su beneficio esperado en el valor de la oferta realizada a los trabajadores. Una vez determinado dicho valor, se concretarán sus parámetros óptimos en cuanto a la inclusión de entrenamiento general. Para resolver este programa, se opera sobre la base de una función de distribución de las ofertas de mercado según su valor. Haciendo uso de la anterior y como paso previo a la maximización del beneficio, se calculará el nivel esperado del capital humano que puede captarse en el mercado mediante la realización de una oferta de cierto valor. Dada una tasa de desempleo en estado estacionario, este será el capital humano esperado entre los desempleados, ponderado por la probabilidad de que el valor del desempleo sea inferior al ofertado por la empresa, más el capital humano observado de aquellos trabajadores captados por otra empresa, ponderado por la probabilidad de que el valor de su anterior puesto sea inferior al ofertado. Una vez estimada esta variable, así como la probabilidad de separación (igual a 1 - la suma de probabilidad de destrucción del puesto de trabajo más la probabilidad de abandono del mercado más la probabilidad de que el empleado acepte una oferta en la competencia), se procede a la maximización del beneficio. Este útimo se formula como el sumatorio de los pagos netos por unidad de capital humano contratado a lo largo del tiempo en un horizonte inifinito. El capital humano inicial es el estimado que puede captarse en el mercado para cada valor, creciendo a una tasa constante en cada período caso de que la oferta incluya formación. Estos pagos netos se expresan en cada período en términos esperados, ponderados por la probabilidad de no separación. La probabilidad de abandono será decreciente en la formación, lo que constituye un incentivo en este sentido para la empresa. Para concretar formalmente esta estructura, v denotará por el valor V de una oferta por unidad de capital humano acumulado y u será la tasa estacionaria de desempleo, por lo que el capital humano esperado por los managers de la empresa y la función de beneficio para la empresa serán:

$$E\left(a^h\right)=q\left[uI\left(v\geq v_u\right)E\left(a^h\middle|u\right)+(1-u)E\left(a^h\middle|v'<v\right)\right] \quad (2.184)$$

$$s(v)=d+r+q\left(1-Q(v)\right) \quad (2.185)$$

$$\pi(v)=\max_{\{e,t\}}\left\{E\left(a^h\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(1-s(v)\right)^j(p-e-ct)(1+g)^{tj}\right\}t.q:$$

$$\max_v \pi(v)=\max_v\left\{\pi(t=0,v),\pi(t=1,v)\right\}(2.186)$$

La restante notación del problema incluye la función I, que es igual a 1 de verificarse la desigualdad que incluye entre paréntesis, Q como función de distribución de probabilidad de que una oferta con valor v sea inferior al valor de la oferta aceptada inicialmente en otra empresa, p es la productividad diferencial generada por la formación, s la probabilidad de separación de la empresa por uno u otro motivo (despido, retiro o recepción de una oferta, ponderada a su vez por la probabilidad de que sea suficientemente atractiva) y g la tasa de crecimiento inercial del capital humano tras la formación.

Las fricciones informativas existentes en el mercado de trabajo hacen factible que el empresario remunere al trabajador por debajo de su productividad marginal, o lo que es lo mismo, obtenga una parte del excedente generado por su formación. A su vez esta es la base en la que se fundamenta la disposición de la empresa a asumir los costes de formación. Esto es, la decisión de proporcionar la formación se tomará sobre un reparto del excedente y de los costes de la misma; esta consideración está implícita en la formulación de la función de beneficio del empresario en estado estacionario, al estar sujeta a la definición de valor del trabajado en un entorno incierto. El excedente será la suma de las cantidades máximas que las dos partes estarán dispuestas a pagar por la misma: la empresa, la diferencia entre la productividad marginal con formación y el salario que proporciona cualquier empresa rival del mercado a los no cualificados, ponderada por la probabilidad relativa de abandono y permanencia del trabajador para el valor del puesto; el trabajador, la diferencia entre dicho valor y el salario ofertado por la competencia a los no cualificados. Puede demostrarse que la solución óptima salarial para el empresario y el reparto de los coste del entrenamiento supone un reparto de este excedente. Adicionalmente el equilibrio de mercado resultante es capaz de explicar el fenómeno de la dispersión salarial para los mismos niveles de capital humano en estado estacionario a partir de recortes salariales que el trabajador está dispuesto a aceptar en la transición entre empleos, a cambio de mejores perspectivas de formación que eleven el valor del trabajo.

Esta explicación constituye una diferencia con otros modelos sobre dispersión salarial en estado estacionario, como el de **Postel-Vinay y Robin (2002**): en él, también centrado en procesos de búsqueda, los oferentes de trabajo son heterogéneos en cuanto a sus habilidades innatas, como también lo son en lo referente a la productividad del trabajo que pueden generar. Cuando se está en una empresa, el atractivo de una oferta aleatoria radica en la estimación que el trabajador realiza de la productividad de esta última; dicha estimación es posible por competir las demandantes de trabajo à la Bertrand y estar correlacionados positivamente sus productividades con los salarios que están dispuestas a pagar. En este contexto la dispersión salarial surge a consecuencia de la expectativa de encontrar una empresa de elevada productividad, incluso aunque esta no ofrezca la perspectiva de acumular más capital humano.

Berger et. al (2006) utilizan la base analítica de Postel-Vinay y Robin para introducir acumulación de capital humano vía learning-by doing. Conforme este se acumula de manera exógena, la experiencia del trabajador le lleva a esperar mejores ofertas en el futuro, que constituyen un umbral inferior a las que alternativas de otras rivales. Por tanto esta acumulación de experiencia actúa determinísiticamente sobre los salarios de equilibrio para los trabajadores de cierta antigüedad a través de dos vías: una directa, al incorporarse directamente a su remuneración en la medida en que incrementa su productividad y otra indirecta, al hacer al trabajador más selectivo en cuanto a las ofertas alternativas que pueda aceptar y, por tanto, la productividad esperada de la empresa a la que pueda dirigirse. Cuando además los procesos de learning-by doing están sujetos a shocks aleatorios de estructura autorregresiva, la propia persistencia de estos pueden generar una dependencia en las soluciones no determinísticas del problema entre el umbral inferior de la productividad de nuevos demandantes de trabajo y la senda de su capital humano.

Burdett et al. (2011) siguen un esquema similar para derivar una ecuación explicativa del salario à la Mincer ofrecido a un individuo de una de las cohortes que coexisten en el mercado de trabajo, revelando un fundamental triple: la productividad intrínseca del trabajador, las características de la empresa demandante de trabajo y la experiencia del trabajador, que interactúa con un término aleatorio relacionado con el tipo de ofertas recibidas en su proceso de búsqueda. Desde esta óptica pueden encontrarse diferencias salariales en equilibrio debidas tanto a la pertenencia a diferentes cohortes (y por tanto a la diferente acumulación de capital humano debida a la experiencia), así como a los acontecimientos aleatorios que hayan movido a un trabajador a encontrar empresas más productivas en el pasado. Este tipo de marco ayudaría a explicar por qué, en ausencia de factores aleatorios, existe una correlación positiva entre una alta rotación y unos bajos salarios para los miembros de las cohortes más jóvenes, mientras que la dispersión salarial de equilibrio entre miembros de la misma cohorte es mayor a medida que aumenta su período de actividad.

Stevens (2012) utiliza también un marco de búsqueda en el mercado de trabajo para combinar soluciones óptimas positivas en la cantidad de entrenamiento general y específico (a diferencia de los trabajos precedentes comentados, que se referían solamente a uno de los dos tipos de capital humano) y demuestra la posible existencia de equilibrios múltiples, incluso -aspecto que también la distingue de otros autores- cuando no existe asimetría informativa, restricciones de crédito o ineficiencias a consecuencia de la propia estructura contractual.

La estructura del modelo, en tiempo continuo, es la siguiente. Se trata de una economía poblada por trabajadores y empresas neutrales al riesgo; el tamaño de la masa de trabajadores se considera fijo, compensándose con nuevas entradas las salidas a causa de la jubilación o enfermedad. Los trabajadores inician su vida laboral carentes de formación, general o específica. La inversión en capital humano de uno u otro tipo se decide inmediatamente, tras la incorporación del empleado a su empresa y se normaliza a la unidad el coste de acumulación del capital humano dentro de la misma, sea general o específico. Las empresas pueden ofertar vacantes para personal con y sin formación, aunque solamente habrá una vacante por empresa. La creación de una vacante de cualquier tipo tiene un coste fijo asociado, que captura las fricciones de funcionamiento de la contratación. Se distinguen dos segmentos del mercado: uno para no cualificados y otro para trabajadores con formación, al que pueden acudir aquellos que ya se encuentran empleados y han recibido entrenamiento como los desempleados, afectados por un shock aleatorio que ocasiona la destrucción de su plaza con probabilidad constante.

Cuando un trabajador que ha recibido entrenamiento general y específico entra en el mercado de plazas para formados, su stock de capital humano específico perderá automáticamente todo su valor y solamente subsistirá el capital humano de tipo general que ha acumulado. Si denominamos $V\left(a^{hg},a^{hf}\right)$ al valor para el trabajador de un matching que le permite alcanzar tales niveles de capital humano general y específico, dada la posibilidad de negociar este será óptimo. Si el nivel inicial de capital humano general -esto es, el poseído por el trabajador al entrar en la empresa- es a_0^{hg} y el coste de la formación es lineal en los propios niveles adquiridos, esto es, $C\left(a^{hg}-a_0^{hg},a^{hf}\right)=a^{hg}-a_0^{hg}+a^{hf}+\theta$, siendo este último el shock idiosincrásico que se deriva del emparejamiento, entonces el valor potencial del emparejamiento para el trabajador será:

$$V_0\left(a_0^{hg},\theta\right)=Max_{a^{hg}\geq a_o^{hg},\,a^{hf}}\left[V\left(a^{hg},a^{hf}\right)-C+\theta\right] \text{(2.187)}$$

Dentro de la empresa que proporciona formación, la productividad que genera el capital humano de cada tipo es aditiva (esto es, no existe interacción tecnológica entre la formación general y específica), creciente en cada uno de los stocks y cóncava: $y^g\left(a^{hg}\right)+y^f\left(a^{hf}\right)$. La estancia en el desempleo genera un flujo de productividad constante y^u , si bien esta es inferior a cualquiera de que puede dotar la permanencia en el seno de una empresa. Todo trabajador buscando en el mercado para formados encontrará una oferta en cada instante con una cierta probabilidad constante de llegada, existiendo una probabilidad diferente para el mercado de individuos sin entrenamiento $\left(q_0\right)$ que para aquellos con contrato en vigor (q). La rotación tiene lugar porque cada emparejamiento de empresa y trabajador genera unos beneficios -o costes- idiosincránsicos solo reconocibles a posteriori que siguen una funcion de densidad logarítimico cóncava y cuyo rango de valores a priori puede adoptar cualquier valor negativo y llegar, como máximo, a una cierta cota positiva. Cuando llega el momento, tras el contrato, de consumar el emparejamiento (esto es, de decidir la permanencia en la empresa) se valorará tanto este beneficio aleatorio como la productividad que puede proporcionar el trabajador tras el entrenamiento y los costes de provisión del mismo.

Las condiciones contractuales se negocian de modo que costes y beneficios del emparejamiento se reparten. Puesto que esta negociación se lleva a cabo en un entorno de información perfecta -excepto sobre las variables estocásticas-, el resultado de aquella deberá considerarse eficiente desde un punto de vista privado. La negociación se configura del siguiente modo: cuando el trabajador desempleado recibe una oferta, el salario se determina conforme a un equilibrio de Nash, en que la amenaza del trabajador es la permanencia en el desempleo. Cuando el individuo se encuentra dentro de una empresa, si el valor conjunto del empleo ofertado es inferior al valor para el trabajador de su actual ocupación nada sucede. Si es superior al valor para el trabajador de su actual empleo, pero inferior al valor conjunto, el empleador actual se ve presionado para dar al trabajador un salario tal que el valor para este del contrato en ejecución se iguale al del ofertado por la competencia. Finalmente, si el valor conjunto de este último es superior al valor conjunto del actual, entonces habrá una rotación, negociándose de nuevo el salario mediante un equilibrio de Nash en el que la amenaza del trabajador es la permanencia en su empleo. Formalmente la decisión de permanencia puede caracterizarse como $V\left(a^{hg},a^{hf}\right)>V'\left(a^{hg},a^{hf'}\right)$, siendo las variables afectadas con una tilde los relativos a la nueva oferta externa (estocásticas, sobre las cuales se establece una expectativa), $\bar{a}^{hf}$ el umbral de formación específica que desencadena el abandono de la empresa actual (y su concepto equivalente en desempleo, $\hat{a}^{hf}$) y $\widehat{a}^{hf}$ el extremo superior de la distribución de la formación específica que cabe esperar recibir en la competencia. Si el cambio se produce, el valor obtenido por el trabajador en esta secuencia de acontecimientos será $V\left(a^{hg},a^{hf}\right)+\beta\left[V'\left(a^{hg},a^{hf}{}'\right)-V\left(a^{hg},a^{hf}\right)\right]$, donde β como de constumbre es la tasa de preferencia intertemporal. Por último, la probabilidad de destrucción del puesto de trabajo es d y el valor obtenido durante la estancia en el desempleo, dado un nivel de capital humano general, $V^{u}\left(a^{hg}\right)$. Definidos estos términos, puede formularse ya de un modo completo el valor asociado a una estancia en una empresa y en el desempleo:

$$V\left(a^{hg},a^{hf}\right)=y^{g}\left(a^{hg}\right)+y^{f}\left(a^{hf}\right)+$$
$$+q\beta\int_{\bar{a}^{hf}}^{\hat{a}^{hf}}\left[V_0'\left(a^{hg},a^{hf'}\right)-V\left(a^{hg},a^{hf}\right)\right]dQ\left(a^{hf}\right)+d\left[V^{u}\left(a^{hg}\right)-V\left(a^{hg},a^{hf}\right)\right] \quad (2.188)$$

$$V^{u}\left(a^{hg}\right)=y^{u}\left(a^{hg}\right)+q\beta\int_{\bar{a}^{hf}}^{\hat{a}^{hf}}\left[V_0'\left(a^{hg},a^{hf'}\right)-V^{u}\left(a^{hg}\right)\right]dQ\left(a^{hf}\right) \quad (2.189)$$

$$V_0'\left(a^{hg},\bar{a}^{hf}\right)=V\left(a^{hg},a^{hf}\right);V_0'\left(a^{hg},\hat{a}^{hf}\right)=V^{u}\left(a^{hg}\right) \quad (2.190)$$

Para determinar las inversiones óptimas en capital humano general y específico, se maximiza el valor potencial del emparejamiento V_0 , como V menos los costes de formación más su beneficio idiosincrásico. Puesto que este problema se repite siempre en los mismos términos para cada empresa, cabe concluir que si el nivel inicial de capital humano general es inferior al óptimo, se proporcionará este; si por el contrario el trabajador ya está dotado de este nivel, solo se invertirá en formación específica, siempre en la misma cuantía cualquiera que sea la empresa con la que se suscriba el contrato.

Al analizar las soluciones óptimas del problema para la inversión en cada clase de capital humano se observan dos propiedades esenciales. Primera, las soluciones interiores no tienen por qué ser únicas en ninguno de los dos casos: incluso aunque la función de productividad es cóncava, existen rendimientos crecientes en ambos tipos de capital a causa de los cuales no es posible garantizar una función objetivo cóncava. En el caso del capital humano específico, cuanto mayor sea el nivel de este tanto más difícil será que se acepte una oferta exterior, ya que mayor será el valor para el trabajador del puesto que ocupa actualmente. En cuanto a la cpo del capital humano general, un fenómeno similar ocurrirá en cuanto al salario de reserva en el desempleo, ya que este será inferior cuanto mayor sea el nivel de formación general adquirido previamente. Segundo, ambos fenómenos dependerán de la magnitud de la probabilidad de llegada de una oferta[54]: en la cpo del capital humano general los rendimientos crecientes se acentuarán cuanto mayor sea esta probabilidad, mientras que en la del capital humano específico lo mismo sucederá cuanto menor sea dicha probabilidad. Tercero, a mayor probabilidad de llegada de ofertas el valor óptimo del capital humano general tenderá a ser mayor, ya que aumentará el pago esperado de este tipo de inversión; por el contrario, un valor elevado de esta variable desincentiva la inversión en formación específica, al reducir la duración esperada del contrato.

[54] Para construir funciones de los valores óptimos respecto a la probabilidad de llegada de ofertas, en el caso de múltiples soluciones se toma siempre el nivel inferior de inversión asociado a cada nivel de la probabilidad.

El modelo se cierra con la condición óptima de creación de vacantes para las empresas, que en útima instancia determina el valor óptimo del ritmo de aparición de ofertas. Respecto a la primera, esta igualará el coste de creación de la vacante con la tasa de retorno para la empresa derivada de esta, que depende a su vez positivamente del nivel de capital humano general (los trabajadores más formados son más productivos), negativamente del específico (por la menor proclividad de los empleados con este tipo de habilidades a aceptar ofertas) y negativamente de la probabilidad de llegada (efecto competencia), en la medida en que una mayor probabilidad de recibir una oferta suele afectar a trabajadores que ya disponen de un empleo, con un mayor salario de reserva. Sin embargo, como acabamos de ver, la probabilidad de llegada afecta positivamente a la inversión en formación general. Cuando el efecto competencia predomina sobre el efecto inversión, la pendiente de la tasa de retorno respecto a la probabilidad de llegada será estrictamente negativa, lo que a través de la igualación con los costes de creación dará lugar a un equilibrio único y estable: a menores costes de creación de la vacante, se observarán mayores rotaciones laborales. Sin embargo, cuando el efecto inversión es el predominante, tendremos una pendiente de la tasa de retorno positiva al menos para algunos valores de la probabilidad, por lo que pueden aparecer varios equilibrios en estado estacionario. Como siempre en este tipo de análisis, cuando son dos al menos uno de ellos será estable. En cualquier caso aquellos con una alta rotación se caracterizarán por una acumulación de capital humano general y viceversa.

Modelos de competencia imperfecta en el mercado de productos y/o de trabajo. Otra gama de modelos se han dirigido a explicar la existencia de entrenamiento general en equilibrio partiendo de estructuras de mercado diferentes a la competencia perfecta. De esta manera, la existencia de un poder de mercado en el demandante de mano de obra le permitiría, en sus negociaciones salariales con el trabajador, extraer un cierto excedente entre su nueva productividad marginal y el salario pagado; este fenomeno es compatible, sin embargo, con una posible subinversión dependiendo de la presión competitiva a la que se pueda verse sometida la empresa y que implicaría, en última instancia, la posibilidad de perder parte de los pagos de la inversión acometida.

Acemoglu y Pischke (1999a) constituye un clásico sobre el papel de la competencia imperfecta en el mercado de trabajo a la hora de explicar la inversión de las empresas en capital humano. El artículo desarrolla en mayor medida que otros de los mismos autores el denominado régimen de “compresión salarial”, microfundamentado por estructuras no competitivas en el mercado de trabajo y que se caracteriza por el hecho de que, para un nivel de capital humano general, la productividad marginal del trabajador es mayor que el salario que le ofrecen las empresas competidoras. Siendo f[55] la función que relaciona la producción del trabajador con su nivel de entrenamiento general: $f'(a^{hg}) > v(a^{hg})$. Esta desigualdad da lugar a un excedente que empresa y trabajador pueden compartir en tanto se prolonga su relación y que va a convertirse en un canal a través del que la primera estará dispuesta a proporcionar un nivel de formación general positivo. Se supondrá que el reparto de este excedente se determina por un procedimiento de negociación asimétrica de Nash, de suerte que el salario a percibir por el trabajador durante su segundo período de estancia en la empresa será el siguiente (tras haber normalizado a 0 la mejor alternativa exterior de la empresa, o amenaza creíble en el proceso de negociación):

$$w(a^{hg}) = v(a^{hg}) + \beta\left[f(a^{hg}) - v(a^{hg})\right] \quad (2.191)$$

Donde β , como es notación habitual, se encuentra comprendido en el intervalo $[0,1]$ y representa el poder negociador del trabajador. Siendo q de nuevo la probabilidad de abandono voluntario del trabajador, la empresa determinará unilateralmente la inversión óptima en capital humano general a partir de la maximización de la siguiente función de beneficio, que comporta su asunción de los costes derivados del entrenamiento:

$$\pi = (1-q)\left[f(a^{hg}) - w(a^{hg})\right] - C(a^{hg}) =$$
$$= (1-\beta)(1-q)\left[f(a^{hg}) - v(a^{hg})\right] - C(a^{hg}) \quad (2.192)$$

La optimización de esta última versión del beneficio respecto a la inversión en capital humano general proporciona la siguiente cpo:

$$(1-\beta)(1-q)\left[f'(a^{hg}) - v'(a^{hg})\right] - C'(a^{hg}) = 0 \quad (2.193)$$

Puesto que los costes marginales de una inversión bruta nula en capital humano son nulos, cuando el poder negociador y la probabilidad de abandono sean estrictamente menores que 1 y $f'(0) > v'(0)$ se invertirá en entrenamiento general. Esta solución presenta algunas implicaciones importantes. En primer lugar, dado un nivel de capital humano general, cuanto menor sea el salario exterior asociado al mismo tanto más elevada será la inversión en formación de la empresa, ya que menor será el coste de oportunidad del trabajador cualificado frente al no cualificado y mayor será el excedente a repartir. Este es un

---

[55] El artículo utiliza la función f para denotar indistintamente producción y productividad marginal. De hecho esta condición se formula en el artículo como $f > v$ y se lee como productividad marginal, cuando la misma función f se utiliza en la definición de beneficio en el sentido de producción total. Se adapta por lo tanto f y su primera derivada a su uso habitual.

resultado crítico dentro de este enfoque y que lo opone a los resultados tradicionales de schooling, con tasas de retorno crecientes en el salario de mercado ya desde los primeros trabajados de Becker a comienzos de los 60. El hecho de que la compresión salarial favorezca la inversión en este activo, no obstante, no es original de Acemoglu y Pischke aunque sí se haya dado a conocer para muchos a través de sus aportaciones, ya que está presente en el trabajo seminal de Becker sobre tasas de retorno de 1962. En general esta relación se verifica siempre que es la empresa la que debe decidir el nivel óptimo de entrenamiento, lo que sucede en la inmensa mayoría de trabajos en esta rama.

Además, el anterior resultado implica que la distorsión en la estructura salarial puede conllevar un aumento del bienestar. Dado que el reparto del excedente se realiza a partir de un proceso de negociación que no internaliza las consecuencias para terceras partes, la introducción de otra ineficiencia -mercado de trabajo- puede mejorar la situación global. En efecto, el paso de un equilibrio inicial a otro en el que existe una cuña todavía mayor entre la productividad marginal del trabajador y los salarios externos implica una mayor inversión en capital humano sin dañar el margen de ningún agente del mercado. Esto no quiere decir, sin embargo, que la existencia de fricciones no pueda dañar la asignación desde otros puntos de vista, como la generación de desempleo involuntario. Finalmente, la relación entre probabilidad de abandono y nivel de formación de equilibrio es negativa, como puede apreciarse a partir de la cpo de la empresa. Dicho esto, dicha probabilidad no es el único factor que lleva a proporcionar la formación. Este es un resultado común a la mayor parte de autores comentados en esta sección, bien tratándose de formación general y específica. Es más, en aquellos modelos que presentan una estructura dinámica -no es el caso de este-, como los basados en los procesos de búsqueda, la relación entre ambas variables es bidireccional: baja rotación incentiva a acumular capital humano dentro de la empresa y, simultáneamente, conforme este stock crece hay menos incentivos para abandonar la empresa, particularmente en el caso de la formación específica aunque también puede suceder con la formación general bajo compresión salarial.

Dustmann y Schönberg (2012), en el marco de un modelo de determinación de OJT à la Acemolgu y Pischke, proporcionan un soporte teórico al fenómeno de la compresión salarial basado en los efectos de la reputación de la empresa diferente a la propia estructura del mercado. En efecto, el modelo subraya la importancia de la credibilidad del compromiso a proporcionar entrenamiento para que la inversión en capital humano resultante constituya un óptimo social, en el sentido de maximizar el excedente conjunto de trabajador y empresa. Por el contrario, cuando el compromiso no es creíble, solo se proporciona formación en una cuantía tal que maximice el excedente aislado de la empresa. La secuencia de acontecimientos es también la familiar en la rama de modelos con información asimétrica sobre las características del trabajador: en el primer período, la empresa decide un sueldo para los aprendices y oferta un entrenamiento general; al final del primer período, la habilidad innata del trabajador es conocida por la contratante[56], si bien no por las competidoras, que solamente tienen acceso a una distribución de probabilidad; sobre esta base informativa, aquellas hacen su oferta. Posteriormente el trabajador conoce la realización del shock de utilidad y decide si permanecer en la empresa que le ha proporcionado el entrenamiento o abandonarla.

Cuando el entrenamiento es verificable por el trabajador, la elección óptima del volumen de inversión en capital humano general viene dado por la maximización de la utilidad del trabajador (como salario en el primer período más la utilidad esperada en el segundo período) sujeto a la restricción de beneficio nulo para la empresa. A su vez esta establece que el salario en el segundo período, en un entorno de tasa de descuento nula, es igual al beneficio empresarial en el mismo menos el coste creciente y convexo de proporcionar la formación. Así, la cpo igualará la suma de beneficio de la empresa y utilidad del trabajador en el segundo período a los costes marginales, revistiendo así un carácter de óptimo social. Siendo w_1 el salario a recibir durante la fase de entrenamiento:

$$Max\ U = w_1 + v_2\left(a_2^h\right) \text{ s.a. } \mathrm{FS}\left(a_2^h\right) - w_1 - C\left(a_2^h\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow FS'\left(a_2^h\right) + v_2'\left(a_2^h\right) = C'\left(a_2^h\right) \quad (2.194)$$

Sin embargo, cuando la intensidad o la calidad del entrenamiento no es verificable por el trabajador, con independencia de cuál sea el compromiso contractual de la empresa, el único nivel de inversión creíble para este será uno que maximice el beneficio privado de aquella. Esto es, en términos marginales, que iguale su beneficio a su coste marginal. Es más, en esta segunda situación el entrenamiento provisto solamente será positivo si el beneficio marginal es creciente en el entrenamiento (dado que el coste marginal lo es también), lo que sucederá, por ejemplo, en marcos de compresión salarial.

Dejando de lado el fenómeno de la compresión salarial y desde una óptica diferente, **Stevens (1994)** plantea un modelo de competencia imperfecta en el mercado de producto, realizando además una clasificación más completa de las modalidades de formación. Así, entre los conceptos de entrenamiento general (que elevaría la productividad en todas las empresas por igual, apuntando a una estructura de competencia perfecta en el mercado de trabajo) o de formación específica (que configuraría un monopsonio en el

[56] La productividad del trabajador formado en el segundo período dependerá tanto de la formación recibida como de su habilidad innata y no observable en el momento de la contratación.

mismo) se elabora el concepto de entrenamiento transferible, que apunta a la posibilidad de que la formación proporcione pagos a la empresa que organiza y el entrenamiento y a alguna(s) más en grado variable[57]. Dentro de esta última variedad podrían encontrarse múltiples situaciones: desde un impacto positivo del entrenamiento en varias empresas con la misma intensidad (oligopsonio en el mercado de trabajo), hasta un desbordamiento positivo a todas las competidoras aunque en distinta proporción, escenario que podría ir asociado a una constelación de empresas, cada una de las cuales con diferentes necesidades de capacitación laboral.

Partiendo de esta distinción, Stevens construye un modelo para endogeneizar el reparto de los retornos cuando la formación es transferible, verificando la existencia de un equilibrio en estas condiciones y analizando las consecuencias de una externalidad de este tipo. El análisis se circunscribe a dos períodos. Al comienzo del primero los trabajadores están carentes de cualquier cualificación y su productividad es nula para cualquier empresa. Una empresa determinada decide entonces cuánto OJT proporcionarles y cómo se reparte su coste. Tras el entrenamiento, los trabajadores experimentarán un incremento en su productividad que se divide en dos componentes: uno general, para cualquier empresa del mercado a_s^{hg} y en el caso de la empresa que forma, un incremento adicional en la productividad a_s^{hf} , que puede estar relacionado con la adquisición de conocimientos específicos o simplemente con ciertas políticas que tienen por objeto aumentar los costes de movilidad. En el segundo período, los trabajadores ya formados decidirán en qué empresa ofertan sus servicios, con libertad para elegir -según cuál le pague el mayor salario- entre la que le formó o cualquiera de sus competidores. En este sentido, se supondrá que la fijación del salario se produce dentro de una configuración de competencia imperfecta y que la interacción entre las empresas instaladas se concreta en competencia à la Bertrand, siendo los trabajadores sensibles a cualquier diferencia entre los salarios disponibles.

El valor del trabajador, dado por su productividad, será conocido por todas las empresas que compiten en el mercado, sin que existan asimetrías informativas. Este tipo de diseño incluye, como casos particulares, tanto una formación totalmente específica (en la línea de Becker-Hashimoto) como una puramente general, cuando el componente adicional para la empresa que entrena es nulo. Ex post el valor de la productividad será diferente para la empresa que invirtió en la formación del trabajador en el primer período y en las rivales beneficiadas por la transferibilidad de las inversiones específicas. Dicho

---

[57] Este concepto, como se verá más adelante, será recogido por Lazear en el enfoque de las habilidades ponderadas.

valor tendrá dos componentes, uno determinístico y el otro estocástico. El primero será $a^{hg} + a^{hf}$ para la empresa que contrata en el primer período; para las demás, a^{hg} . El estocástico, que afectará tanto a la una como a las otras, es un shock independiente e idénticamente distribuido de media 0 y soporte $[-1,1]$; esta variable estocástica sigue una distribución igual para todas las empresas del mercado, como reflejo de la diferente orientación en la capacidad requerida por cada una.

El problema para la empresa formadora en el primer período será la elección de las variables de formación general y específica tales que maximicen su beneficio conforme a la siguiente ecuación estándar:

$$FS = I\left(a_s^{hg}, a_s^{hf}, N\right) - C\left(a_s^{hg}, a_s^{hf}, \omega\right) \quad (2.195)$$

Donde C es la función de costes del entrenamiento, creciente en sus dos primeros argumentos y convexa y N es el número de empresas competidoras. La variable ω recoge la facilidad con que cada trabajador puede ser entrenado (podemos pensar también en una dotación exógena de capacidad de absorción de conocimientos) y la función de costes es decreciente respecto a este argumento, que se encuentra distribuido uniformemente entre los trabajadores desde el comienzo del primer período. También hay que señalar que los ingresos recogen los pagos de la inversión esperados a lo largo de dos períodos. Puesto que existen efectos desbordamiento en la formación de tipo general, la tasa de retorno privada de la inversión en OJT (que comprende la tasa para la empresa formadora más la del trabajador) diferirá en general de la tasa social, que incluye también la tasa para los competidores. El problema de maximización del beneficio se plantea desde un punto de vista privado.

Para calcular los retornos privados deben hacerse algunas consideraciones. En primer lugar, dada la estructura de competencia salarial à la Bertrand, en el segundo período el trabajador contratará con aquella empresa para la que tenga mayor valor y por un salario igual al ofrecido por aquel competidor para el que tenga el segundo mayor valor. Además, desde el momento en que una empresa tiene una probabilidad positiva de tener el mayor valor, esta compartirá una fracción mayor que cero del retorno esperado de la inversión. Sea V_0 el valor del trabajador para la empresa que forma y $V_1,...V_N$ para las restantes que se benefician de la transferibilidad de las inversiones específicas. Sean también U_1, U_2 los mayores valores de anterior vector de N elementos. Los retornos definidos (R) por Stevens[58] aparecen más abajo, donde la notación empleada ha sido la siguiente: TR es el retorno social total, WR_0 el del trabajador en la empresa que forma y contrata en primer lugar, que eventualmente puede ser ampliado con WR´ en el caso de que en el segundo período sea atraído por un rival de la primera. Entre las empresas, R_0 es el retorno de la que contrata en primer lugar y R´ el de la que logra adquirir los servicios del trabajador en el segundo período. Debe verificarse además, teniendo en cuenta las externalidades del problema, $TR = WR + R_0 + R'$.

$$TR = E\left[\max\left\{V_0, U_1\right\}\right] \quad (2.196)$$
$$WR = WR_0 + WR_1 \quad (2.197)$$
$$WR_0 = E\left[U_1 \middle| V_0 > U_1\right]\Pr\left[V_0 > U_1\right] \quad (2.198)$$
$$WR' = E\left[U_2 \middle| U_2 > V_0\right]\Pr\left[U_2 > V_0\right] + E\left[V_0 \middle| U_1 > V_0 > U_2\right]\Pr\left[U_1 > V_0 > U_2\right] \quad (2.199)$$
$$R_0 = E\left[V_0 \middle| V_0 > U_1\right]\Pr\left[V_0 > U_1\right] - WR_0 \quad (2.200)$$
$$R' = E\left[U_1 \middle| U_1 > V_0\right]\Pr\left[U_1 > V_0\right] - WR' \quad (2.201)$$

Capturando además la probabilidad de los shocks mediante una determinada función de distribución, es posible reexpresar las anteriores tasas de retorno como esperanzas matemáticas de variables continuas, aunque los elementos esenciales quedan recogidos más arriba. Hechos estos preámbulos, pasaremos a estudiar el signo de las derivadas parciales de la función de ingresos con respecto a cada uno de sus argumentos. Comenzando por el capital humano general proporcionado por la formación, la parcial de los ingresos privados respecto a esta variable será nula, al ser la información sobre la misma generalizada entre empresas; por el contrario, la parcial para los ingresos de los trabajadores es unitaria, ya que este componente de su valor será plenamente capturado por estos últimos.

En cuanto al signo de la derivada parcial del beneficio privado respecto a la formación específica, el primero será igual a la probabilidad de que el trabajador permanezca en la empresa formadora, ya que si este cambia de empleo en el segundo período este entrenamiento específico se diluirá. Por otro lado, la probabilidad de que el trabajador abandone la empresa será decreciente con el nivel de entrenamiento específico y si este es suficientemente alto -tal que no pueda ser compensado por el componente aleatorio en el segundo período-, entonces la salida estará completamente bloqueada. Además, si la empresa que forma es aquella para la que el valor del trabajador es máximo, le ofrecerá

[58] En este artículo el uso de la palabra retorno por la autora no es propio; más apropiadamente podría usarse el término excedentes.

un salario igual a aquel propuesto por el rival para que el valor fuera mayor: esto significa que la captación del beneficio privado será total para la empresa que forma. En consecuencia, el signo de la parcial sobre el rendimiento privado de la empresa será positivo (e igual a 1 si la salida se bloquea). Mientras, el trabajador se beneficia indirectamente de le reducción del beneficio externo a medida que aumenta la formación específica (al aumentar el rendimiento para la empresa que forma y tener mayores probabilidades de recibir una formación genérica mejor). Esto hace posible que el retorno social coincida completamente con el retorno privado de la empresa, al ser iguales en módulo y de signo opuesto los retornos del trabajador y el de las empresas externas.

Por último, el beneficio privado empresarial respecto al grado de transferibilidad del entrenamiento es negativo, ya que aumenta la probabilidad de abandono por el trabajador y en general también será negativa la parcial del retorno social, con la acotación que se hará a continuación. La formación específica será decreciente, consiguientemente, respecto al grado de transferibilidad. La parcial del retorno privado para el trabajador puede ser positiva o negativa, dependiendo de la magnitud de la cuña entre productividad marginal y salario en el segundo período a que conduzca una mayor transferibilidad. Por otro lado, es posible demostrar que el retorno social óptimo puede alcanzarse para cualquier nivel de transferibilidad igual o mayor que 1; es más, dado un número de empresas que se beneficien del entrenamiento general, siempre habrá un nivel de formación específica tal que haga que la transferibilidad óptima sea mayor que dicho número. Por tanto un aumento de la competencia no necesariamente mejora el retorno social, ya que, para una formación específica dada, puede disminuir sensiblemente las probabilidades individuales de captación del trabajador en el segundo período y de ahí la participación en el retorno total esperado.

Hechas estas precisiones, puede resolverse el problema de optimización del beneficio privado y social. Puesto que la tasa de retorno privada del entrenamiento específico es mayor a la social, las empresas tenderán a sobreinvertir en este tipo de capital humano en comparación con la inversión óptima social. Por otro lado la estructura de mercado puede atemperar o agravar esta sobreinversión: si existe una importante competencia en el mercado de trabajo, que viene acompañada de una transferabilidad amplia, la inversión en habilidades específicas tenderá a disminuir. Por el contrario, conforme nos movemos hacia estructuras de mercado más oligopolizadas, con fricciones en el tránsito de los trabajadores entre empresas, la inversión específica tiende a aumentar, creando este hecho a su vez barreras a la movilidad de los trabajadores y acentuando el poder de mercado de determinados operadores en el mismo. En comparación con otros trabajos previos comentados, la ausencia de costes de transacción justifica la falta de contratos a largo plazo del tipo descrito por Hashimoto (1981); es más, la simetría informativa entre empresas es la base del contrato "take it or leave it" ofertado al trabajador. Esta simetría determina también que sea el grado de transferibilidad de la formación, la estructura del mercado y la distribución de las perturbaciones aleatorias sobre habilidades demandadas las que conformen la probabilidad de abandono del trabajador, frente a los modelos de selección adversa en que, al depender la cuantía de la inversión del propio trabajador, el salario alternativo estaba principalmente conformado por la probabilidad estimada de pertenencia a la categoría más productiva de trabajadores.

Gersbach y Schmutzler (2003) proponen un marco distinto, en el que las empresas compiten en un régimen de competencia imperfecta tanto en mercados de factores como de producto y, por tanto, la demanda de trabajo y su entrenamiento es influida por los efectos directos y estratégicos (sobre los competidores en los mercados de productos) de tal conducta. La modelización se estructura dentro de un horizonte de 3 períodos: en el primero, las empresas deciden cuántos trabajadores desean entrenar; en el segundo, se compite a través de ofertas salariales por los trabajadores entrenados, decidiendo los trabajadores en función del salario más alto y en el tercero se compite en el mercado de productos dentro de una configuración oligopólica. El tipo de formación que se ofrece es general. En general los beneficios de una empresa dependerán positivamente del número de trabajadores formados que se logre retener; aunque esta dependencia no se endogeneiza, se supone que la productividad de la empresa aumentará, así como la calidad de sus productos y su capacidad para extraer márgenes de su venta. Por análogas razones, los beneficios propios dependerán negativamente de la cantidad de trabajadores cualificados que logre atraer la empresa rival. Los salarios de los trabajadores no cualificados se normalizan a cero y se identifican con los salarios-reserva de los cualificados. Se supone también que el coste del entrenamiento es el mismo para todas las empresas, así como la calidad del mismo, de manera que desde el punto de vista del beneficio empresarial entrenar a un trabajador en la propia empresa o contratar a otro entrenado por la competencia son perfectamente sustitutivos.

Un último supuesto clave en la resolución del modelo es el de rendimientos decrecientes en la atracción de trabajadores cualificados: dado un número de trabajadores formados en plantilla de la empresa, el beneficio marginal de incorporar uno más es decreciente. Esto significa que los trabajadores formados se distribuirán a partes iguales entre las empresas competidoras. Así, cuando se haya alcanzado la igualdad el valor marginal de un trabajador adicional para cualquiera de ellas será inferior al valor de retenerlo para aquella que lo tiene en nómina. En cuanto al mecanismo de ajuste hacia esta equiasignación, cuando se parte de una distribución desigual de trabajadores cualificados al comienzo del segundo período, las empresas que cuenten con menos de ellos estarán dispuestas a ofertar salarios mayores, al tener un mayor valor marginal aquellos.

Para calcular el equilibrio perfecto del subjuego, para el conjunto de decisiones del modelo, hay que tener en cuenta que el beneficio de cada una de las empresas del mercado se descompone en la suma de tres elementos: i) el ingreso en la tercera fase derivado del propio vector de entrenamientos elegido y del vector escogido por los rivales; ii) menos los pagos salariales a los trabajadores, que a su vez estan vinculados al incremento marginal neto de ingresos que produce el trabajador entrenado (el cual, a su vez, es el ingreso propio bruto menos los ingresos ajenos brutos marginales) iii) menos los costes de entrenamiento. Se tendrá un equilibrio sin entrenamiento cuando la diferencia entre el beneficio así calculado y el beneficio derivado de un entrenamiento generalizado nulo sea menor que cero para cualquier valor de la formación proporcionada. Sin embargo, para determinados valores de los parámetros de la función de ingresos también existirá un equilibrio con formación positiva e igual para todos los participantes en el mercado. Dicha igualdad se debe tanto a la equidistribución de trabajadores en todas las empresas durante la segunda fase como a la simetría en su poder de mercado y, consiguientemente, en las derivadas parciales de sus ingresos respecto al número de trabajadores entrenados y contratados.

Cuando este modelo se adapta a diversas configuraciones de competencia entre empresas en el mercado de bienes, se aprecia en general que, a menor intensidad de la misma, mayores incentivos a la formación y, por tanto, tanto menos restrictiva resultará la combinación de parámetros que conduce a una solución con entrenamiento positivo. Esto se debe a dos efectos: a menor competencia, mayor tamaño del mercado y mayor producción; el hecho de que esta se retribuya a un ingreso marginal decreciente aumenta el atractivo del entrenamiento como vía para reducir los costes marginales y, consiguientemente, atender en mayor medida la cuota de mercado potencial. Un segundo efecto alude a la capacidad de negociación de los trabajadores: cuanto menor es la competencia en el mercado de bienes, menor suele ser esta, por lo que los trabajadores entrenados pueden ser retenidos a costes más bajos. En el marco del modelo, esto se traduce en una mayor sensibilidad de los costes al incrementarse el número de trabajadores entrenados, lo que induce también la inversión en su capital humano. Esta, en definitiva, es una aplicación de la compresión salarial de Acemoglu y Pischke en un marco analítico ligeramente distinto.

Cuando el análisis de bienestar se realiza para toda la economía, sin embargo, será necesario considerar además de los beneficios empresariales el excedente del consumidor, medido como la integral de la demanda de mercado entre el nivel de precios asociado al reparto de trabajadores formados e infinito. Este bienestar total es mayor en un equilibrio con entrenamiento, debido al peso favorable sobre los costes marginales (e, indirectamente, sobre los precios de equilibrio) de los trabajadores formados y, por esta causa, de un mayor excedente del consumidor, que compensa la diferencia entre beneficios empresariales en ambas situaciones. Como consecuencia de este resultado, se justifica la intervención del gobierno para facilitar la solución con entrenamiento, bien a través de actuaciones financieras (subvencionando la formación en el interior de las empresas) o en el ámbito de la regulación, promoviendo la importancia de la variable entrenamiento en las negociaciones salariales (por ejemplo, reconociendo la validez y portabilidad de la formación en una empresa del sector a sus restantes competidores). Frente al anterior modelo de Stevens, por tanto, la existencia de un solo tipo de formación (general), sin costes de ajuste entre empresas y sin perturbaciones aleatorias en la demanda de capacitación genera un entorno absolutamente homogéneo en que son estrictamente las condiciones de competencia en el mercado de bienes las que determinan la viabilidad de un equilibrio con entrenamiento.

Modelos de OJT basados en complementariedades tecnológicas del capital human general y específico. La teoría tradicional beckeriana no proporcionaba argumentos que permitieran compatibilizar los dos tipos de inversión en capital humano. Cuando las fricciones en la movilidad del trabajador entre puestos eran lo suficientemente importantes, la inversión en capital general era la predominante, mientras que cuando aquella no era viable las inversiones específicas constituían una vía para "atar" al trabajador a la empresa y generar pérdidas en su excedente en caso de abandono. Algunos modelos, sin embargo, sin abandonar el paradigma beckeriano resaltan posibles complementariedades de distinto origen entre ambos tipos de inversión, bien tecnológicas (al ser su incidencia cruzada positiva sobre la productividad marginal del trabajador) o sencillamente negando una distinción esencial entre unos y otros tipos de habilidades.

En esta línea, **Casas-Arce (2004)** combina en un modelo la provisión de entrenamiento general y específico, en la línea de Stevens (2004), si bien en lugar de fundamentar la explicación en competencia imperfecta en los mercados de bienes, la basa en las fricciones propias de la contratación de capita humano. Estas dan lugar a una relación de complementariedad entre los dos tipos de formación, de suerte que la empresa en equilibrio estará dispuesta a pagar formación general para posibilitar la adquisición de habilidades específicas.

La imperfección principal de los contratos de servicios del capital humano radica en que estos no pueden estipular los pagos contingentes a la situación futura del empleado en la empresa y, particularmente, al hecho de si continuará en ella o no. En este contexto la secuencia de acontecimientos del modelo es la siguiente: primero se firma el contrato de trabajo, después de deciden los niveles de inversión, tanto específica como general y más tarde se reparte entre empresario y trabajador ex post el excedente de tales inversiones, como diferencia entre la renta incremental que generan y el resultado alternativo (extracontractual) para las dos partes. El resultado de la negociación responde a un equilibrio de Nash.

Entrando en la estructura del modelo, la producción futura del trabajador dependerá de ambos tipos de formación mediante una función creciente, cóncava y con productividades marginales positivas, indicando la complementariedad entre ambos tipos de formación.

$$Y_s = F\left(a_s^{hg}, a_s^{hf}\right); \ \frac{\partial F}{\partial a_s^{hg}\,\partial a_s^{hf}} > 0 \text{ (2.202)}$$

Existe competencia perfecta en el mercado de trabajo, en el sentido de que la formación general será igualmente productiva dentro de la empresa que la proporcionó que en sus restantes competidores. Esta competencia se traduce en la existencia de un salario básico de mercado para cada nivel de formación general[59] w_g , igual a la productividad marginal del trabajo para ese entrenamiento. La adquisición de cualquier tipo de entrenamiento conlleva costes C_g y C_f , evaluados mediante funciones crecientes y convexas.

El sistema de determinación de las inversiones óptimas es de inducción retroactiva: para un nivel de inversión general, el trabajador maximiza respecto al nivel de inversión específica su fracción del excedente, definida como el salario básico, más la fracción del excedente adquirido gracias al entrenamiento específico (que a su vez es igual a la producción del trabajador tras la inversión menos el salario básico), menos los costes de la inversión específica. Es decir, siendo β la fracción del excedente que es capaz de captar el trabajador mediante su poder de negociación:

$$Max_{a^{hf}} \ WS = w_g + \beta\left[F\left(a^{hg}, a^{hf}\right) - w_g\right] - C\left(a^{hf}\right) \text{ (2.203)}$$

En un paso previo, el empresario determina el nivel óptimo de formación general maximizando su beneficio, dado por su fracción del excedente menos los costes de formación general.

---

59 Como en numerosos modelos de OJT, se usa una remuneración sobre el total de unidades de capital humano general acumuladas, en el entendimiento de que la jornada laboral es exógena.

$$Max_{a^{hg}}\ FS=(1-\beta)\left[F\left(a^{hg},a^{hf}\right)-w_g\right]-C\left(a^{hg}\right)\ (2.204)$$

Como caso límite, el modelo es capaz de explicar el resultado de Becker que apunta a que, en ausencia de formación específica, la solución óptima de provisión de formación general será nulo. En efecto, en este caso el excedente se anula, con lo que también lo hace la fracción capturada por el empresario. Por ello, ante la reducción del beneficio a costes de formación, la solución óptima deviene cero.

La concatenación de estos dos problemas permite concluir que el supuesto de complementariedad entre ambas clases de formación es clave para que la formación general sea distinta de cero: en efecto, de no ser así (y ser nula la productividad marginal cruzada entre ambas clases de formación), la cpo del empresario establece la igualdad a cero de los costes marginales de esta formación[60], lo que le sitúa en un equilibrio esquina. Si los dos tipos de formación fueran sustitutivos, la formación general también se anularía en equilibrio: en este caso en la cpo del beneficio empresarial solo aparecían términos negativos (los costes marginales, como antes, más la productividad marginal positivda de la formación específica multiplicada por el efecto inducido de la formación general sobre la específica, en este caso negativa; la consecuencia sería otra vez un efecto esquina. En conclusión, solamente la complementariedad entre ambos tipos de inversiones puede dar lugar a la elección de cantidades estrictamente positivas de las dos.

Kessler y Lülfessman (2000,2006) desarrollan un modelo similar para resaltar la interdependencia entre la formación general y específica incluso en entornos de competencia perfecta en mercados de producto y de trabajo. Las principales diferencias con el anterior trabajo proceden de la separabilidad de la función de producción respecto a cada tipo de entrenamiento, así como el hecho de que es la empresa la que decide en un momento del tiempo la cantidad a invertir en cada clase de formación.

La estructura del modelo es algo más elaborada. El trabajador está caracterizado por un cierto parámetro aleatorio que define sus habilidades innatas y cuyo valor solamente es observable tras firmar el contrato. Durante el primer período de estancia en la empresa, se genera una cierta producción fija propia del no cualificado, retribuida por un salario inicial. Al final del primer período, cuando la realización del parámetro es observable, se deciden los dos tipos de entrenamiento por la empresa y el salario del segundo período, conforme a una proporción fija de reparto de la productividad, que se divide en

[60] Al detraerse, por la separabilidad consiguiente de la función de producción de los servicios del trabajador, el salario básico de la productividad marginal del trabajador, variables que en equilibrio son iguales y quedar solamente en la cpo el coste marginal.

dos partes perfectamente identificables, correspondiendo cada una a la productividad generada por cada inversión, general y específica. Ambas productividades serán función no solamente de la inversión recibida, sino del valor del parámetro aleatorio. Además se supone que en este proceso el salario derivado de la productividad por inversión en conocimientos generales siempre está garantizado, lo que evita el reparto del excedente completo por medio de una negociación de Nash. En concreto, si la fracción asignada al trabajador es inferior al salario que obtendría en el mercado (por ser no ser la tipología del trabajador lo suficientemente adecuada), se otorga al trabajador la posibilidad de optar por este; como este salario se igualará a la productividad causada por la inversión general, la empresa se apropiará de la productividad de la inversión específica. Con estas condiciones, el beneficio esperado de la empresa, a maximizar, se compondrá de la diferencia entre el salario inicial y la producción en el período de no cualificación, más la fracción de la productividad del segundo período -en caso de reparto-, más la productividad de la inversión específica que percibirá íntegramente la empresa cuando no haya reparto. Teniendo en cuenta que el trigger del pago con el salario de mercado es una realización de la característica no revelada dentro de un cierto conjunto de valores ($\theta \in \Theta$), la maximización del beneficio puede formalizarse como sigue:

$$Max_{a^{hg},\, a^{hf}}\ E[FS] = y_1 - w_1 + \int_{\theta\in\Theta} (1-\beta)\ y_2\left(a^{hg}, a^{hf}, \theta\right) dG(\theta) +$$

$$+ \int_{\theta\notin\Theta} \left[y_2\left(a^{hg}, a^{hf}, \theta\right) - y_2\left(a^{hg}, \theta\right) \right] - C\left(a^{hg}\right) - C\left(a^{hf}\right) \quad (2.206)$$

Lazear (2009) propone una explicación de las decisiones de OJT basadas en el denominado skills-weighted approach (SWA). Su trabajo parte de la dificutad de conciliar los resultados empíricos en cuanto al impacto de la antigüedad en el puesto de trabajo sobre el salario (que suele presentar signos positivos y una elevada significatividad) con la evidencia de que existen pocos conocimientos puramente específicos a un puesto de trabajo. En este contexto de primacía de los conocimientos generales, la rotación entre empresas debería ser elevada y la provisión de entrenamiento específico, en tanto que intercambiable, bajo. Lazear entiende sin embargo la acumulación de capital humano en el trabajo como la adquisición de un vector de habilidades generales cuyos pesos en las diferentes empresas o sectores productivos son diferentes. Cuanto más denso sea el mercado de trabajo (en el sentido de existencia de una gradación rica de empresas con características similares en la transición de una a otra) y además los costes de búsqueda son bajos, un trabajador tendrá más probabilidades de encontrar otro empleo que requiera de habilidades similares a las adquiridas en la última empresa que lo contrató. Por el contrario, cuando el mercado de trabajo carece de densidad y los costes de búsqueda son altos, entonces puede primar la estrategia de reducir la rotación y permanecer durante períodos de tiempo prolongados en un empleo, lo que conferiría a través de procesos de

OJT o incluso learning-by-doing un signo positivo a los coeficientes de la antigüedad en las ecuaciones salariales.

Desde la perspectiva de la modelización, el modelo como es habitual se estructura en dos períodos; en todo el mercado existen dos habilidades relevantes A y B que reciben diferentes ponderaciones en cada empresa. En el primero el trabajador contrata con una empresa y decide qué cantidad de dichas habilidades adquiere, con unos costes asociados al entrenamiento. En ese momento el trabajador solamente conoce los pesos de dichas habilidades generales en la empresa i que lo contrata en particular, λ_i y $1-\lambda_i$, pero respecto a las demás tan sólo conoce una distribución de probabilidad dada por la función de densidad $g(\lambda)$. Su función de ingresos en la empresa i puede expresarse por lo tanto en función de los niveles alcanzados en los stocks de capital humano de tipo A y B:

$$w_i = \lambda_i a^{hA} + (1-\lambda_i) a^{hB} \quad (2.207)$$

En el segundo período, el trabajador decidirá si se queda en la empresa o rota, según la función de densidad comentada, así como de la probabilidad 1-p de rotar. Es de destacar la diferencia en este punto con la mayor parte de la literatura, al corresponder habitualmente al manager de la empresa la decisión de formación al trabajador (si bien, dependiendo de las fricciones existentes, sobre la base de la maximización del excedente común). La función objetivo (ganancias netas) a maximizar será por tanto la siguiente:

$$p\left[\lambda_i a^{hA} + (1-\lambda_i) a^{hB}\right] + (1-p)\int_0^1 \left[\lambda a^{hA} + (1-\lambda) a^{hB}\right] g(\lambda) d\lambda - C\left(a^{hA}, a^{hB}\right) \quad (2.208)$$

Las cpo son las siguientes:

$$p\lambda_i + (1-p)E(\lambda) = C_A \quad (2.209)$$

$$p(1-\lambda_i) + (1-p)E(1-\lambda) = C_B \quad (2.210)$$

La inversión vendrá determinada, a la luz de estas condiciones, por una media ponderada de los pesos esperados de estas habilidades o dimensiones de capital humano, siendo las probabilidades de abandono las ponderaciones. Las implicaciones sobre el coeficiente de la antigüedad en la inversión salarial dependen del valor de la probabilidad de permanencia p. Para demostrarlo basta comparar en la remuneración en el segundo período de un trabajador que permanece en la empresa inicial (que denominaremos 1) y otro que rota a otra empresa 2. Calculados los valores óptimos de sus inversiones, sus salarios serán:

$$\lambda_1 a^{hA*} + (1-\lambda_1) a^{hB*} \quad (2.211)$$

$$\lambda_2 a^{hA*} + (1-\lambda_2) a^{hB*} \quad (2.212)$$

Por tanto el efecto de la antigüedad, que denotaremos como Δ podrá escribirse como
$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)(a^{hA*} - a^{hB*})$

Y su valor esperado:

$$E(\Delta) = \int_0^1 \int_0^1 (\lambda_1 - \lambda_s)(a^{hA*} - a^{hB*}) g(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$\int_0^1 (\lambda_1 - E(\lambda))(a^{hA*} - a^{hB*}) g(\lambda_1) d\lambda_1 \quad (2.213)$$

Para ver que el signo de las ganancias incrementales salariales por antigüedad depende positivamente de p, habrá que diferenciar la anterior expresión, de suerte que:

$$\frac{dE(\Delta)}{dp} = \int_0^1 (\lambda_1 - E(\lambda)) \left(\frac{\partial a^{hA*}}{\partial p} - \frac{\partial a^{hB*}}{\partial p} \right) g(\lambda_1) d\lambda_1 =$$

$$= \int_0^1 (\lambda_1 - E(\lambda))^2 \left(\frac{1}{C_{AA}} + \frac{1}{C_{BB}} \right) g(\lambda_1) d\lambda_1 > 0 \quad (2.214)$$

Expresión que debe su signo positivo a la convexidad de la función de costes. Es, por otra parte lógico, que a mayor probabilidad de permanencia en la empresa tanto más marcado sea el sesgo de elección del trabajador de la formación que pondera más la tecnología de dicha empresa. Desde ste mismo enfoque podría explicarse también por qué cuando la probabilidad de movilidad es menor las empresas tienden a hacerse más específicas, esto es, más diferentes de las demás en las ponderaciones de las habilidades generales, al reforzar esta estrategia las ganancias marginales de la antigüedad para el trabajador. Otro corolario sería que, a medida que las ponderaciones de las habilidades tienden a hacerse más idiosincrásicas, los trabajadores están menos dispuestos a financiar la formación, incluso aunque esta tenga un carácter general, al disminuir el valor de la rotación. En suma, el hecho de que la decisión última de la formación recaiga en el trabajador cambia el enfoque de las variables que inciden en la misma, perdiendo peso factores como la competencia en los mercados de producto o las ineficiencias que los contratos de trabajo generan para las empresas y ganándola otros como las características del mercado de trabajo -que en última instancia inciden en p- o el grado de diferenciación esperable en la tecnología del mercado. Otro rasgo diferencial importante frente a otros modelos es que la decisión de inversión del trabajador es eficiente dada la estructura del mercado de trabajo.

Morita y Noone (2014) introducen algunas modificaciones en el planteamiento de Lazear que de nuevo permiten explicar ineficiencias en las decisiones de inversión. En particular, el vector de inversiones brutas en las diferentes habilidades generales no se determina mediante la maximización de los excedentes conjuntos, sino por el trabajador y la empresa vía optimización no cooperativa de sus respectivas funciones objetivo. Además, la estructura del segundo período se simplifica, ya que λ_2 se hace determinístico y se asume que siempre $\lambda_2 < \lambda_1$. El problema tiene siempre un único equlibrio perfecto de Nash del subjuego; en él, bajo ciertas condiciones paramétricas que ligan los coeficientes λ_j , el trabajador permanecerá en el período 2 en la empresa que lo contrató repartiendo a medias con el empresario la producción incremental derivada de la ausencia de rotación. En este sentido, el salario del trabajador durante el segundo período será $w_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) + y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

En este caso, se producirá subinversión en la adquisición de la habilidad A en comparación con la asignación dada por la maximización conjunta del excedente, de manera análoga a lo que sucede en otros modelos en que la cantidad de inversión no forma parte del contrato inicial y los salarios se determinan tras la formación mediante negociación. En esta versión del modelo, la subinversión en la habilidad A viene explicada tanto por los incentivos de la empresa como por los del trabajador. En cuanto a los primeros, el trabajador se quedará en la empresa en el segundo período si su output en esta es superior al que obtendría en la competencia; de cumplirse esta condición cuando ciertas combinaciones de parámetros lo permiten, el excedente entre los dos outputs se reparte a la mitad gracias a la solución de Nash alcanzada. Como vimos al desarrollar el modelo de Lazear, dicho output incremental depende positivamente de la inversión realizada en la habilidad A frente a la B cuando los peso de esta en la empresa 1 es mayor. Por tanto, la empresa contratante en el período 1 tiene un incentivo a invertir en la habilidad A, pero dado que solo puede capturar la mitad del excedente se subinvierte. Otra vía de subinversión es el hecho de que, al incrementarse el output del segundo período, aumenta también el salario con el que remunerar al trabajador, mientras que este efecto se cancelaría si la maximización del excedente abarcara el de los dos agentes. Respecto al trabajador, al ser su salario en el segundo período la media de los outputs en las dos empresas y poner la segunda de ellas menos peso en la habilidad A, incurre también en subinversión en esta última. Desde la óptica del empresario, la severidad de la subinversión en A será decreciente en el grado de especificidad de la habilidad A, ya que cuanto mayor sea este mayor deberá ser también el salario de retención a proporcionar al trabajador. Al contrario, a mayor especificidad de A mayor será la subinversión del trabajador, ya que tanto menor será el impacto de una determinada inversión en A sobre el output generado dentro de la empresa competidora.

Modelos sobre efectos externos en la inversión OJT. Otros autores prefieren destacar las imperfecciones que surgen en torno a las inversiones óptimas privadas en capital humano en el centro de trabajo, sin proporcionar una explicación realmente original para las mismas. Es el caso de los trabajos de Acemoglu y Pischke y Felli y Harris, que se comentarán a continuación, el primero centrado en las inversiones en formación general y el segundo en las de tipo específico. Los efectos externos aparecen en el primer modelo a consecuencia de la no inclusión en la maximización del excedente conjunto de los intereses de terceros trabajadores que puedan eventualmente reemplazar a una de las partes o de las empresas de la competencia, que puedan beneficiarse o quedar perjudicadas a través de distintos canales por las inversiones específicas llevadas a cabo en una rival. Por lo demás, los móviles de la inversión no se diferencian sustancialmente de otros modelos revisados antes y van desde fricciones de movilidad ligadas a información imperfecta a estrategias para privar a empresas rivales de mano de obra cualificada en un contexto de competencia imperfecta.

Acemoglu y Pischke (1997,1999b) se concentran en las externalidades que la incertidumbre asociada a los procesos de búsqueda en el mercado de trabajo provocan en la suscripción de los contratos de OJT, que modeliza en un contexto de learning-by-doing y endogeneización de la adopción de nuevas tecnologías. En el primero de estos artículos se subraya el problema del diferente cómputo de los rendimientos futuros del trabajador formado en un mercado laboral no competitivo, que lleva a este a asumir un coste de la formación inferior al que desearía transferirle el empresario que proporciona dicha formación, creando las condiciones adecuadas para la subinversión. Esta externalidad, a diferencia de otras típicas (como imperfecciones en los mercados de crédito o costes de transacción en la movilidad) no es solventable mediante acuerdos contractuales -en este caso con los futuros patronos del trabajador-, ya que el proceso de búsqueda hace que la identidad de estos sea incierta. El foco del modelo se desplaza desde las condiciones de abandono de la empresa por el trabajador -que en este caso son esencialmente exógenas y desencadenadas por un shock- o la negociación del salario -sobre el que no se establece ninguna competencia entre empresas- a la determinación óptima del nivel de entrenamiento en el referido entorno de incertidumbre y búsqueda.

El modelo se basa en un mercado de T períodos en el que las empresas poseen una tecnología de tipo Leontieff, tal que para producir y unidades de output necesitan 1 trabajador. Este volumen de producción puede ser incrementado mediante inversión en capital, de dos tipos: capital físico, con un coste fijo por máquina y capital humano mediante OJT, con una función de costes en términos de output por cada nivel de formación acometido, creciente y convexa; se supone que ambas clases de inversiones serían perfectamente sustituvas. Además el carácter de la formación es general, por lo que resulta utilizable en cualquier otra empresa. No existe ninguna restricción tecnológica ni externalidad tecnológica o de demanda. En cada período de duración del contrato entre la empresa y el trabajador existe una probabilidad constante de experimentar un shock de matching negativo, a consecuencia del cual la producción que el segundo sería capaz de generar en la primera devendría 0 a partir de este momento, razón por la cual las dos partes estarían dispuestas a buscar otro emparejamiento. Con estos supuestos puede formularse la producción del trabajador i en la empresa j en cualquier período posterior al inicial como $y+\psi\left(K_j,a_i^h\right)$. La variable K, que mide la adquisición de capital físico, tiene un carácter binario, pudiendo tomar solamente dos valores, 0 ó 1, según si realiza la adquisición de una máquina en el primer período o no. El problema a resolver será el de maximización del excedente conjunto respecto a la inversión en maquinaria y la formación del trabajador. Dado que la productividad del trabajador no se materializará hasta el período siguiente a aquel en que se realizan las inversiones correspondientes, se capitalizan los gastos efectuados en el primer período para obtener una corriente de excedente homogénea, que adoptaría la siguiente forma:

$$FS=\psi\left(K,a^h\right)-\left(1+r\right)\left[C\left(a^h\right)+p^kK\right] \quad (2.215)$$

Teniendo en cuenta que se define:

$$\psi\left(0,a_s^h\right)=\psi_1 a_s^h;$$

$$\psi\left(1,a_s^h\right)=\psi_2 a_s^h;\ \psi_1,\psi_2 \text{ constantes t.q. } \psi_1\leq\psi_2$$

La solución al problema en el capital humano a proporcionar pasará por la igualación entre la productividad marginal de este (en cada escenario de inversión en capital fisico) y su coste marginal. En estas condiciones el equilibrio walrasiano existe cuando pueden derivarse dos funciones del capital humano adquirido por el trabajador: una de ellas proporciona el salario acordado desde el primer período que percibirá el trabajador dentro de la empresa a cambio de recibir una cierta cantidad de entrenamiento (o de alcanzar cierto nivel de capital humano, equivalentemente) y la otra, el salario que recibirá en el mercado a partir del segundo período un trabajador que ya ha recibido un determinado nivel de entrenamiento. Cuando no existen fricciones en el mercado de trabajo, el equilibrio walrasiano existe e implica la realización de la inversión en maquinaria por todas las empresas instaladas, al tiempo que la provisión de un entrenamiento positivo para los trabajadores. Además esta solución es socialmente eficiente.

La introducción de fricciones en el mercado de trabajo se realiza a través de un proceso de búsqueda, con un emperejamiento aleatorio que tiene como principal consecuencia que los salarios de equilibrio ya no reflejarán el coste de oportunidad de ambos agentes fuera del contrato. En su lugar, los salarios se negociarán de manera que comporten el reparto del excedente fruto de la relación contractual, de modo que trabajador y empresario capten una fracción fija del mismo. En este contexto es posible demostrar que el modelo genera subinversión (desde un punto de vista social) por la empresa en capital humano. Para llevar a cabo el análisis, se supone para simplificar que la inversión en maquinaria es irrelevante y por tanto la constante que liga proporcionalmente la productividad del trabajador con su nivel de entrenamiento es única.

En este contexto de shocks de matching, los contratos suscritos en el período 1, antes del comienzo de la formación, deberán incluir no solamente el volumen de esta, sino también el salario durante el primer período, durante el segundo, cuándo terminar la relación contractual y la cuantía de una posible transferencia indemnizatoria cuando esto sucede; si es un shock el que determina el final de la relación, deberá ser el trabajador el que pague a la empresa la indemnización. En caso de que se produzca dicho shock, el trabajador percibirá con certeza una fracción de su productividad marginal en la nueva empresa para la que trabaje. La empresa que contrata en el primer período, sin embargo, percibirá una fracción de la productividad esperada para la formación proporcionada al trabajador que reemplace al saliente, construyéndose dicha esperanza a partir de la muestra conocida de trabajadores en búsqueda. Cuando no hay shock, empresa y trabajador seguirán trabajando juntos y no habrá lugar a ninguna transferencia. Bajo estas premisas, es posible reformular la definición de excedente conjunto esperado -teniendo en cuenta también la distribución de probabilidad del shock de matching- y maximizar esta función objetivo respecto a las variables relevantes. Así, siendo q la probabilidad de ocurrencia del shock, β la participación del trabajador en el excedente conjunto y A la función de distribución de capital humano entre los trabajadores potencialmente contratables, la función objetivo o excedente conjunto a maximizar respecto a la formación proporcionada será[61]:

$$TS = \frac{(1-q)\left(y_1+\psi a_1^h\right)+q\left[\beta\left(y_1+\psi a_1^h\right)+(1-\beta)\left[y_1+\psi\int a^h\,dA\left(a^h\right)\right]\right]}{1+r}-C\left(a_1^h\right) \quad (2.216)$$

El equilibrio resultante de este ejercicio de optimización es único, aunque en comparación con el nivel óptimo para el planificador social refleja subinversión en capital humano,

[61] El salario y la indemnización no forman parte del excedente conjunto, al tratarse de simples redistribuciones de renta entre las partes contractuales.

a causa de esta incertidumbre sobre la identidad del futuro trabajador que reemplace al que abandone la empresa. En efecto, mientras en el equilibrio sin fricciones el excedente conjunto recoge todo el valor del trabajador tras el entrenamiento, cuando la búsqueda entraña incertidumbre tan solo se computa una fracción de aquel, lo que conduce a la subinversión. Este problema se eliminaría si las rentas de esta tercera parte se incluyeran en la función objetivo, pero esto es imposible al desconocerse quién será este.

Cuando se amplía el modelo con búsqueda para incluir inversión en maquinaria, puede demostrarse que surgen equilibrios múltiples. El elemento diferencial en la formulación del excedente conjunto, partiendo del hecho de que la empresa que proporciona el entrenamiento puede invertir en tecnlogía (aunque también presentar un equilibrio esquina en la misma), será la probabilidad estimada de adopción de la nueva tecnología por los competidores (λ); la consideración de esta distribución de probabilidad llevará a expresar la fracción de la renta futura del trabajador en otra empresa -caso de que ocurra un shock de matching- en términos esperados, al ser mayor esta para un cierto nivel de entrenamiento en aquellas empresas que han invertido en tecnología. Siendo I la variable binaria que recoge la eventual adopción de tecnología por la empresa (cuando es igual a 1 se entiende que hay innovación), el excedente conjunto, a maximizar respecto a la inversión en capital humano e I, será:

$$TS = \frac{(1-q)\left[y_1 + \psi_0 a_1^h + I(\psi_1 - \psi_0)\right] + q \begin{Bmatrix} \beta\left[y_1 + (1-\lambda)\psi_0 + \lambda\psi_1\right] + \\ (1-\beta)\left[y_1 + (1-I)\psi_0 + I\psi_1\right]\int a^h \, dA\left(a^h\right) \end{Bmatrix}}{1+r} - \left[C\left(a_1^h\right) - p^k\right]$$

(2.217)

Existen dos estrategias puras simétricas como resultado de este problema: una en la que ninguna empresa invierte en tecnología (ni siquiera la de referencia) y otra en la que todas invierten, con un nivel superior de entrenamiento para el trabajador en el segundo de los casos. Dependiendo de la combinación de parámetros del modelo de que parta el problema, el problema puede derivar hacia 3 posibles situaciones: una de equilibrios múltiples en que ambas estrategias lo sean, dependiendo de la probabilidad estimada de adopción de tecnología por la competencia, u otras dos en que cualquiera de las dos estrategias, individualmente consideradas, constituye el único equilibrio del mercado. La razón es la siguiente: la renta del trabajador, cuando hay separación de su empresa, depende positivamente de la probabilidad de adopción tecnológica por el resto de empresas rivales. Por otro lado, el entrenamiento que están dispuestos a proporcionar los empresarios también depende positivamente de la productividad esperada que estén en condiciones de dispensar los trabajadores, la cual será mayor a su vez si las otras empresas incorporan nuevas tecnologías. Por tanto, si la probabilidad estimada es unitaria, el entrenamiento elegido por la empresa de referencia será mayor y en general esta situación se producirá en el resto de la economía, lo que animará también a la inversión. De aquí que esta expectativa sobre el comportamiento del resto determine en qué tipo de equilibrio acabará el mercado cuando ambos sean paramétricamente racionales.

Felli y Harris (1996, 2006) centran su atención, al contrario que la mayor parte de la literatura anterior, en la adquisición de entrenamiento específico y más concretamente en la relación de este con el fenómeno de la movilidad laboral y, por ende, en la eficiencia de las decisiones sobre rotación y acumulación de capital humano específico a la empresa. Si la adquisición de habilidades específicas fuese pasiva, el trabajador podría sopesar eficientemente el trade-off entre rotación y adquisición de dichas habilidades. Sin embargo, en la práctica la decisión sobre formación específica es activa, de manera que la competencia entre las empresas para atraer trabajadores se produce mediante la oferta salarial, mientras que la decisión de ubicación dentro de las mismas (en un puesto ordinario o en formación) corresponde estrictamente a la empresa, sin que esta pueda ser influenciada por el trabajador. De aquí que la eficiencia de la movilidad y la formación específica no deba darse por sentada. De hecho, existen efectos externos en torno a su provisión que pueden tener origen variado: o son consecuencia de la mejora de la base informativa común que la formación trae consigo, o bien están conectados con el poder de mercado en la negociación salarial que confiere a la empresa que forma; en cualquiera de los casos surgen al no internalizar la solución óptima el excedente de la empresa que no llega a contratar. Este último aspecto es común con gran parte de la literatura anterior, aunque la estructura de los efectos externos y la caracterización de los incentivos es original[62].

Para analizar este problema Felli y Harris proponen un modelo estocástico en tiempo continuo en **dos versiones**, en cada una de las cuales el capital humano específico reviste un contenido distinto. **En la versión denominada informaciona**l, este consiste en información sobre el matching realizado. Existen dos empresas y un trabajador involucrados en un juego cuya mecánica se itera indefinidamente. El trabajador puede pertenecer a una doble tipología que todos desconocen a priori; cada una de las posibilidades es más indicada para una de las empresas del mercado en términos de la productividad a que puede dar lugar. Al principio del juego, cada empresa le ofrece un paquete de salario y condiciones laborales; estas consisten en una asignación a una tarea o a entrenamiento. El individuo elige entonces con qué empresa firmar, genera un output, recibe su salario y

[62] En la línea de Stevens y a diferencia de Becker, se compatibiliza la provisión de entrenamiento específico con la movilidad entre empresas, si bien la adquisición de este no tiene carácter de coste hundido.

el ciclo se repite, aunque el contenido del paquete ofertado por ambas empresas puede variar respecto al del período anterior, en función de la producción que haya conseguido, que es conocida por las dos al iniciarse una nueva iteración.

La producción generada por el empleado en cada una de las empresas sigue una estructura diferente, en función de si se le asigna una tarea o se le entrena. En el primero de los casos la producción será estocástica, dependiendo de un componente determinístico y variable según la tarea asignada y la tipología del trabajador, mientras que el estocástico sigue un proceso de Wiener específico a cada una de las empresas. De todas las tareas posibles, teniendo en cuenta la probabilidad estimada de pay-offs según tipologías y la probabilidad estimada de pertenencia a cada una, se escoge aquella tal que maximice la producción esperada. Cuando la asignación se hace a entrenamiento, la producción es intermedia entre el máximo obtenible si perteneciera a la peor tipología y el asociado a la más cualificada. Tanto la ubicación en una tarea como el entrenamiento producen una acumulación de capital humano específico, si bien esta es mayor cuando se opta por el entrenamiento; a su vez **esta acumulación genera un valor para las dos empresas competidoras, al propiciar para ambas una reevaluación de la probabilidad de pertenencia a la tipología de más calidad** y, **para la contratante, la posibilidad de reubicarlo internamente de manera más eficiente y generar con ello mayor productividad**. Por tanto todos los agentes del juego derivan ganancias de la realización de un contrato. La empresa contratante, porque percibe la producción del trabajador neta de su salario y deriva un valor informativo de la acumulación de su capital humano; la empresa rival, porque también se beneficia de un valor a partir de su acumulación de información sobre matching y el trabajador tanto por el salario como por el valor de la información. Al incrementar el entrenamiento en mayor medida que el desempeño de una tarea la adquisición de información útil, supone un "acelerador" de la elección adecuada sobre la adscripción del trabajador; sin embargo proveer este entrenamiento no es una estrategia siempre dominante para la empresa que lo contrata, ya que puede haber cierto tipo de tareas que le hagan aportar una producción esperada mayor. En cualquier caso, a la hora de decidir el paquete óptimo contractual cada empresa considerará su corriente de beneficios y la del trabajador, pero no el valor sombra para la otra empresa de la acumulación de capital específico. **Esta situación derivará en una infraprovisión de entrenamiento específico en relación con el óptimo social.**

La segunda versión del modelo es denominada por los autores de "mejora de la productividad". En este caso el entrenamiento produce una mejora de la productividad del trabajador, pero no propicia una reevaluación de las características del mismo; los paquetes contractuales comprenden un salario y un asignación de tareas (trabajo o formación, siendo ahora una elección binaria que ocupará el 100% del tiempo de aquel). El funcionamiento del juego es análogo: a la vista de los paquetes que se ofrecen simultánea e independientemente, el individuo decide con qué empresa contratar y cumple con la asignación de tareas comprometidas, tras lo cual el ciclo se repite, aunque con un contenido de las ofertas que puede variar. El efecto del entrenamiento en la empresa que contrata, desde la perspectiva de aquella que no lo hace, es doble: primero. dado el carácter específico del mismo, aumentan las probabilidades de permanencia en la empresa que provee la formación; segundo, en caso de que la otra empresa quiera controfertar en la siguiente iteración, deberá hacerlo con un salario más alto y menor beneficio. **Luego la no internalización en el problema de optimización de los objetivos de esta empresa lleva a una sobreinversión en capital humano, en contraste con lo que sucedía en la versión informacional del modelo.**

Por último hay que destacar que la literatura sobre on-the job-training ha generado variadas ramificaciones hacia distintas áreas, principalmente análisis de fundamentos microeconómicos del mercado laboral, políticas activas de integración y transición entre educación secundaria y el empleo, ya en el contexto de modelos de crecimiento endógeno, interacción entre innovación tecnológica y acumulación de capital humano. Esta última rama se aborda más específicamente en el capítulo 3. Entre los restantes desarrollos, cabría comentar fundamental dos: los relativos a los contratos en prácticas y a la colaboración de las empresas en las distintas modalidades de formación profesional "vocational training", así como los concernientes con la dualidad del mercado del trabajo. Daremos algunos trazos básicos sobre su contenido, aunque estas exceden en puridad el objetivo de este trabajo, que reside en la explicación de los mecanismos de acumulación de capital humano.

Dentro de la primera rama y por citar algunos trabajos importantes relativamente recientes, destaca la línea de Stevens (1996, 2001). En una segunda línea de relevancia y desde una perspectiva básicamente empírica podríamos citar a Boots y Snower (1996), Harhoff y Kane (1997), Fougère y Schwerdt (2002), Lazear (2003), Smits y Zwick (2004), Askilden y Nilsen (2005), Geel y Backes-Gellner (2009), Mohrenweiser y Zwick (2009) y Mohrenweiser y Backes-Gellner (2010). Centrándonos en los dos primeros, la contribución de **Stevens** parte del análisis de algunos mecanismos de corrección de diversos efectos externos asociados con la primera formación general de trabajadores en empresas. Si bien estos, como acabamos de ver en la literatura precedente , deberían tener garantizada una remuneración igual a su productividad marginal cuando la formación es general, pueden verse afectados por dos tipos de imperfecciones: una en los mercados de capitales, de suerte que a los recién incorporados al mercado de trabajo les sea imposible financiar el coste de la formación con cargo a su productividad marginal acrecentada en el futuro. Una segunda estaría causada por la ausencia de competencia en el mercado de trabajo y la determinación salarial a través de mecanismos de negociación: en la medida en que los trabajadores jóvenes carecen de tal capacidad y no suelen estar apoyados por los sindicatos, estos percibirían salarios por debajo de su productividad marginal[63]. Este hecho es compatible con la existencia de competencia perfecta en el mercado de bienes. Ambos factores conducirían a una sub-inversión en formación de jóvenes trabajadores, razón por la cual en algunos países se introdujo un impuesto de suma fija para financiar este tipo de formación durante las dos últimas décadas. En el marco de la recuperación de la crisis y la necesidad de formar a un importante volumen de parados de larga duración con escasas habilidades técnicas, la financiación de estas políticas ha vuelto a convertirse en un tema esencial de debate.

El modelo se estructura a partir de dos períodos en los que operan trabajadores y empresas neutrales al riesgo. En el primero de estos períodos se adopta la decisión sobre la cantidad de entrenamiento general a facilitar al trabajador (a coste creciente y convexo), mientras que en el segundo se tiene la posibilidad de contratar -y el trabajador formado, de cambiar de empresa- y se determina el salario. Ambos agentes maximizarán la suma -a tasa de descuento cero- de los valores de su función objetivo en los dos períodos. Las dos imperfecciones de mercado comentadas antes se introducen mediante los siguientes mecanismos. La del mercado de trabajo, admitiendo la posibilidad de un mark-up positivo entre productividad marginal del entrenamiento general y el salario, así como la discrecionalidad de la empresa para fijar óptimamente sus propias variables sin seguir necesariamente los precios del resto de competidores. Este poder de mercado se basará en una función de utilidad de los trabajadores respecto al puesto ofrecido por la empresa j, que dependerá tanto del salario contratado con esta en el segundo período como de una característica aleatoria y específica de dicha empresa. En efecto, la función de utilidad dependerá de la interacción del salario del segundo período y una característica específica de la empresa y estocástica θ_j , independiente entre empresas, que se distribuye dentro del intervalo $\left[0,\overline{\theta}\right]$. Así, $U = W_2\theta$. Se supone además que la comparación del trabajador de todas las empresas existentes en el mercado se produce al comienzo del segundo período, en un lapso temporal de dimensión 1 y que la inspección de las características de una empresa conlleva un fracción de tiempo $\varepsilon < 1$, por lo que el trabajador puede elegir una muestra de $N = 1/\varepsilon$ empresas para tomar su decisión. Denotando mediante

[63] Este es el fenómeno denominado de compresión salarial por Acemoglu y Pischke (1999a) comentado anteriormente.

$w_2 = W_{2j} / W_2$ al salario relativo de la empresa j versus el salario común de las restantes examinadas, se elegirá a la empresa j versus otra i cuando $W_j\theta_j > W\theta_i$. Así pues, la probabilidad p de que la empresa j sea la elegida, siendo G la función de distribución uniforme se definirá como:

$$p(w_2) = \frac{1}{\bar{\theta}} \int_0^{\bar{\theta}} G^N(w_j\theta_j) d\theta_j \quad (2.218)$$

La potencial oferta de trabajo a la que se enfrenta la empresa j vendrá dada por los T_j trabajadores a los que acepte entrenar, más los NT que entrenen otras empresas y que la inspeccionan en un momento determinado, esto es, $T_j + (T / \varepsilon)$ personas. Teniendo también en cuenta la probabilidad de ser elegida, la oferta laboral esperada a que se enfrenta será:

$$L_j = p(w_j)\left(\frac{\varepsilon T_j + T}{\varepsilon}\right) \quad (2.219)$$

Aproximando w en un entorno de 1, puede obtenerse una expresión para p, que, sustituida en la oferta laboral esperada y a su vez en la función objetivo de la empresa $F(L_j) - W_jL_j$, arroja una cpo de mark-up una vez supongamos que, en equilibrio, $T_j = T$ y $W_j = W$:

$$F'(T) = (1+\varepsilon)W \quad (2.220)$$

Esto es, el origen de la formación del mark-up no es el poder de mercado de la empresa contratante en el mercado de bienes, sino aquel que le otorga la imposibilidad de realizar una búsqueda minuciosa por parte del trabajador en cuanto a las condiciones de las diferentes empresas que operan en él. En cuanto a la imperfección de los mercados de capital, la asimetría entre empresa y trabajador se refleja mediante la posibilidad de la primera de solicitar un crédito a tipo cero, frente al segundo, que debe hacerlo a un tipo positivo r. El beneficio de la empresa se compone como sigue: en el segundo período, producción generada a partir de los servicios de los empleados menos remuneración, mientras que en el primer período se incurrirá en el coste de entrenamiento menos el sueldo negativo que se haga pagar a los trabajadores en formación. Será precisamente la competencia perfecta que prevalece en el mercado y las consiguientes restricciones a la movilidad de los trabajadores la que, como es habitual, haga racional para el management la cobertura de parte de los costes de formación. Formalmente, si FS* es el excedente de la empresa en el segundo período evaluado en el número óptimo de trabajadores, ψ^w la fracción del entrenamiento que corre a cargo de los mismos y C los costes de proporcionar aquel:

$$TFS_j = FS*\left(T_j\right)+\psi^{w}T_j - C\left(T_j\right) \quad (2.221)$$

Por su parte, los trabajadores maximizarán una utilidad esperada dada por el máximo de los salarios y características a encontrar en el mercado de cualificados menos el valor capitalizado del préstamo a pedir para sufragar su contribución al coste de formación al comienzo de su estancia en la empresa. Es decir, siendo g_N la función de densidad de la característica específica en un vector de N empresas:

$$U = U_j^e - (1+r)\psi^w \quad (2.222)$$

$$U_j^e = \iint Max\left(W_j\theta_j, W\theta\right) g_N(\theta) g_1\left(\theta_j\right) d\theta d\theta_j \quad (2.223)$$

La optimización de la formación solicitada y el reparto de su financiación se lleva a cabo en el contexto de la maximización de los beneficios empresariales, sujeta a la condición de que la utilidad multiperiódica para el trabajador dentro la empresa no sea inferior a la que puede esperar dentro del mercado a partir de la distribución estocástica de las características de las empresas y una solución simétrica esperada en la inversión en capital humano general. Esto es, la restricción a la maximización del excedente empresarial sería una del tipo:

$$U_j^e - (1+r)\psi^w \geq \bar{u} \quad (2.224)$$

Con una función de utilidad esperada con la identificación descrita, puede demostrarse que su utilidad marginal en un equilibrio simétrico en el número de aprendices será igual a W. Por otro lado, hay que tener en cuenta que la formación per se genera una desutilidad marginal v', que en equilibrio debe igualarse a la utilidad marginal neta derivada del contrato con la empresa j. Esto es, sustituyendo la definición del mark-up obtenida más arriba:

$$\bar{u} = \frac{F'(T)}{1+\varepsilon} - (1+r)\psi^w = v' \quad (2.225)$$

El modelo puede cerrarse con la condición de beneficio nulo que acompaña a la libre entrada en el mercado y que en este caso se aplica al beneficio definido a lo largo de 2 períodos:

$$F(T) - \frac{F'(T)}{1+\varepsilon}T + \psi^w T - C(T) = 0 \quad (2.226)$$

A partir de la cpo de la empresa y la utilidad de mercado del trabajador, pueden deducirse los principales efectos de las imperfecciones aludidas, que son asimétricas en la demanda y la oferta. La competencia imperfecta generará una menor demanda de formación, al reducir los pagos en el segundo período, como también lo hará la restricción de crédito, al encarecer el coste capitalizado de la contribución del trabajador a la formación. En cuanto a la oferta, la competencia imperfecta genera un efecto de primer orden expansivo que predomina sobre otro de segundo orden de signo contrario: el primero consiste en que la remuneración del segundo período estará por debajo de la productividad marginal; el segundo, porque una reducción del entrenamiento por debajo del de sus competidores genera una productividad marginal superior (al ser esta decreciente), salarios mayores y mayor disponibilidad del trabajador a asumir una fracción mayor del coste de su formación. Análogamente, la imperfección en el mercado de capitales incentiva la oferta de entrenamiento por la empresa, en la medida en que reduce el efecto de segundo orden antes comentado, que tendía a reducir el entrenamiento general proporcionado al aprendiz.

A la vista de estos resultados, **se discuten distintas medidas de política económica para fomentar la formación general a trabajadores no cualificados**. La primera de ellas son las **subvenciones sobre la fracción de la formación a cubrir por los trabajadores, financiadas con cargo a impuestos sobre los salarios**. Este instrumento es equivalente a una reducción en los intereses a pagar por el crédito en el primer período y, en el caso límite en que el tipo se igualara a la unidad, podrían llegar a elevar la inversión en formación hasta un punto tal que las imperfecciones en el mercado de capitales quedaran compensadas completamente, pero no se lograría evitar el efecto negativo de la competencia imperfecta en el mercado de trabajo. Otra posibilidad es, siguiendo el ejemplo comentado de algunos países, el **establecimiento de una leva** en las empresas para financiar un determinado nivel de formación; en concreto, se supone que la inversión que cada empresa debería acometer dependería sería una proporción de su factura salarial. Este caso desembocaría de nuevo en uno de subvenciones: las empresas repercutirian el coste sobre el salario del trabajador y al mismo tiempo se obtendría inversión subsidiada que podría neutralizar la restricción de credito, pero no la introducción de mark-ups en la remuneración salarial.

Por último, se estudia la utilidad de una **regulación** consistente en la imposición a las empresas de una cantidad de entrenamiento general superior a la que el problema de optimización privado de estas arroja. En concreto, se elegiría un nivel de entrenamiento consistente con la condición de beneficio nulo empresarial (como beneficio a lo largo de los dos períodos del modelo) y compatible con la demanda de entrenamiento de los trabajadores. Las ganancias de bienestar de un incremento del nivel de entrenamiento, calculadas a partir de la diferenciación en el equilibrio privado de la suma del excedente empresarial y el excedente del trabajador sujetas a las dos restricciones anteriores, dan como resultado tres términos positivos y uno negativo. Entre los positivos se contabilizan los siguientes factores: i) la internalización siquiera parcial de los efectos externos positivos de la formación para los restantes competidores (teniendo en cuenta que la productividad marginal del trabajador aumentará por encima de su salario futuro si abandona la empresa); ii) la no materialización de un nivel de entrenamiento en una empresa por debajo del de los competidores, para elevar la contribución del trabajador y iii) un efecto precio, consistente en un aumento del bienestar neto al reducirse los salarios sin que, con restricciones de crédito, la contribución del trabajador disminuya en la misma cuantía[64]. Como único término negativo, la desutilidad marginal que comporta la atracción de nuevos oferentes de trabajo hacia la actividad productiva. El efecto sobre el bienestar sería por lo tanto ambiguo a priori, si bien salvo elasticidad muy elevada de la desutilidad en el margen tenderían a predominar el impacto positivo de los tres primeros sumandos.

Otro campo de aplicación de la OJT es la explicación de las relaciones de poder dentro de la empresa en el terreno de la negociación salarial y la dualidad entre trabajadores sin formación y con una prolongada experiencia en la empresa. En un modelo muy representativo de esta corriente, **Muysken y Zwick (1999)** proponen un mercado compuesto por una única empresa y N trabajadores, siendo todos ellos neutrales al riesgo. La empresa, con tecnología Cobb-Douglas, optimiza una función estándar de beneficio respecto al número de trabajadores contratados, con la restricción de que todos ellos deben tener el mismo nivel de capital humano. Siendo L el número de trabajadores:

$$FS = L^{\alpha}\left(a^{h}\right)^{1-\alpha} - eLa^{h} \quad (2.227)$$

En el óptimo, como es habitual, número de trabajadores -o tiempo de trabajo en otros modelos- dependen negativamente del capital humano, ya que desde el punto de vista de la producción ambos son sustitutivos. La demanda de trabajo derivada de esta cpo será:

$$L = \left(\frac{\alpha}{e\left(a^{h}\right)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2.228)$$

En cuanto a los trabajadores, decidirán cuál es la formación específica a acometer en un entorno de incertidumbre sobre la posibilidad de conservar su empleo dentro de la empresa una vez que hayan accedido a ella. Si lo pierden, su única remuneración será el seguro de desempleo (B), cuya cuantía es independiente del nivel de capital humano acu-

---

64 En ausencia de restricciones en el mercado de capitales, la fracción de los costes de entrenamiento que el trabajador estaría dispuesto a pagar disminuiría en la misma cuantía que el salario. Con restricciones de crédito, la disminución puede producirse en una proporción menor, por lo que el bienestar neto para la empresa aumenta.

mulado. En este sentido, la formación en capital humano específico tiene un carácter de coste hundido, al no ser reutilizable en otra empresa; precisamente por esta condición conferirá al trabajador poder de mercado. La elección óptima de inversión en capital humano se realizará por el trabajador mediante la maximización de su excedente[65], que se formula como la diferencia entre la percepción salarial futura ligada al nivel elegido menos unos costes cuadráticos en el propio capital humano adquirido menos los impuestos (T) -de suma fija- que sufragan las prestaciones por desempleo. A pesar de que los costes y beneficios se distribuyen en períodos diferentes de tiempo, se obvia aplicar una tasa de descuento. Siendo LF el número total de trabajadores existentes en la economía, todos ellos neutrales al riesgo:

$$WS = ea^h - (1+r)\left(a^h\right)^2 - T;\ T = B\left(\frac{LF-L}{L}\right) \quad (2.229)$$

Partiendo de estos supuestos generales, el modelo se resuelve en un marco de insiders-outsiders bajo **dos supuestos alternativos. En el primero de ellos, los insiders actúan como monopolistas**[66]. Se supone que al principio del período relevante una fracción de los trabajadores existentes han sido contratados al final del período anterior por la empresa y los restantes se encuentran desempleados. La secuencia de decisiones será la siguiente: primero, los insiders determinarán su nivel de inversión en capital humano tal que optimicen su excedente (WS) dada la demanda de trabajo de la empresa. También realizarán una oferta salarial "para tomar o dejar" a la dirección de la empresa. Segundo, con estos datos conocidos, los outsiders reaccionarán mimetizando su inversión en capital humano a la de los insiders -dado que la empresa solo acepta trabajadores de un capital humano homogéneo- y por el momento no podrán presentar ninguna contraoferta salarial a la empresa; la decisión de invertir se adoptará solamente si tienen alguna oportunidad de encontrar un empleo y si el excedente generado por dicha inversión es al menos nulo. Finalmente, la empresa determina su nivel de contratación y la identidad de los trabajadores concernidos. Cuando la asignación resultante se compara con la propia de la maximización conjunta de beneficio empresarial y excedente de los trabajadores por

---

[65] Este es un procedimiento peculiar de organización del modelo, ya que habitualmente las decisiones sobre adquisición de formación específica se adoptan por la empresa. Sin embargo en el ejemplo que nos ocupa se supone que este tipo de formación puede llevarse a cabo en el exterior de la empresa y en una fase pre-contractual, lo que da coherencia al supuesto mencionado.

[66] El modelo no llega a explicitar los factores que convierten a los insiders en monopolistas, pero puede pensarse en la existencia de costes de transacción para la empresa en el mercado de trabajo o características innatas de los trabajadores solo verificables una vez se suscriben sus contratos y se alcanza cierta permanencia en la empresa.

un planificador benevolente[67], se desprenden varias conclusiones: i) Como observación preliminar, el excedente de los insiders, valorado en su solución óptima, presenta un máximo para una cierta fracción de los trabajadores totales; dicho máximo es creciente con respecto a la cuantía de la prestación por desempleo. Esto es, puesto que los outsiders se encuentran desempleados y los insiders deben financiar esta prestación, si la cuantía es suficientemente alta para compensar otros beneficios derivados de un reducido número (más poder de mercado), la absorción de todos los trabajadores y su inclusión en el colectivo de insiders -solución cooperativa- puede convertirse en la estrategia más adecuada. ii) A pleno empleo, el excedente conjunto cuando los insiders actúan monopólicamente es inferior al del planificador, debido a una subinversión en capital humano debida a que demanda de trabajo e inversión en dicho activo se determinan por agentes diferentes y ninguno de ellos son capaces de captar plenamente las rentas derivadas. iii) Sin embargo, a medida que se reduce el número de insiders la inversión en capital humano se incrementa, debido a la reducción de la intensidad de la competencia, pudiendo llegarse a un nivel de inversión que más que compensara el efecto negativo apuntado antes.

Otra posible variante es aquella en la que **los outsiders poseen capacidad de contraoferta respecto a la demanda salarial planteada por los insiders**. Si aquella tiene éxito, puede dar lugar a una sustitución total de los insiders por los outsiders -el reemplazo parcial es imposible por la condición de homogeneidad del capital humano dentro de la empresa-. En primer lugar, la empresa determina su beneficio sujeto a la oferta mínima creíble de los outsiders: aquella en la que su excedente queda reducido al subsidio de desempleo. Sustituyendo esta ecuación, la empresa maximiza su beneficio y extrae el nivel óptimo de capital humano exigido. Puede demostrarse que el beneficio para la empresa asociado a una asignación en la que los insiders actúan como monopolistas es inferior al beneficio de este último escenario solo para valores de la fracción de outsiders sobre la población activa total inferiores a cierto nivel; por tanto si la fracción de insiders contratada es inferior la amenaza no será efectiva. Por otro lado, si los insiders mimetizan el comportamiento de los outsiders, el beneficio para la empresa será mayor cuando la fracción de la población activa contratada como insider excede a 0.5. El resultado del modelo estará pues totalmente determinado por la fracción inicial de insiders. Si el beneficio de la empresa al aceptar la oferta de los outsiders es superior al monopólico y los insiders no pueden reaccionar mimetizando a los outsiders, estos últimos serán reem-

[67] La función de bienestar social a maximizar por el planificador benevolente será $TW = L^{\alpha}\left(a^{h}\right)^{1-\alpha} - (1+r)\left(a^{h}\right)^{2}$. Como es usual, los pagos salariales y los impuestos que financian las prestaciones por desempleo quedan fuera por tratarse de corrientes puramente redistributivas.

plazados. Pero si el beneficio mayor para la empresa es aquel derivado de la mimetización de los outsiders por los insiders. Si este es el caso, los outsiders desistirán de su amenaza y se acoplarán a una fijación monopólica de condiciones por los insiders, ya que el excedente de aquellos que logren entrar en el mercado de trabajo siempre será mayor que el excedente de desempleo por este sistema.

En definitiva, el modelo en cualquiera de sus variantes logra demostrar que la inversión en capital humano es producto de un juego a 3 bandas en el que la adquisición de insiders, permita o no desplegar un poder de mercado potencial, es un factor diferencial; esta es la fricción característica de este modelo. La diferencia entre la inversión en capital humano resultante de este juego presentará una diferencia (en magnitud y signo) con el óptimo social según el grado de pro-actividad de los outsiders y la fracción de insiders contratada y, también dependiendo de estos parámetros, será determinada bien por los insiders bien por la empresa, pero en ningún caso procederá de una maximización conjunta del excedente de todos los agentes involucrados. Finalmente, ni la productividad ni su relación con el salario, ni la posibilidad de imitación tecnológica por otras empresas rivales, ni la tipología de formación, ni los problemas de información asimétrica en torno al contrato de trabajo son factores determinantes del nivel de inversión en capital humano, sino solamente la probabilidad de tener acceso a una renta más elevada producto de una situación privilegiada.

BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO II

Acemoglu, Daron (1997), ‘Training and Innovation in an Imperfect Labour Market’, The Review of Economic Studies, 64 (3), 445-64.

Acemoglu, Daron and jörn Steffen Pischke (1999), ‘The Structure of Wages and Investment in General Training’, Journal of Political Economy, 107 (3), 539-72.

Acemoglu, Daron and Jorn-Steffen Pischke (1998), ‘Why Do Firms Train? Theory and Evidence’, The Quarterly Journal of Economics, 113 (1), 79-119.

——— (1998), ‘Why Do Firms Train? Theory and Evidence’, The Quarterly Journal of Economics, 113 (1), 79-119.

——— (1999), ‘Beyond Becker: Training in Imperfect Labour Markets’, The Economic Journal, 109 (453), 112-42.

Altonji, Joseph G. and Robert A. Shakotko (1987), ‘Do Wages Rise with Job Seniority?’, The Review of Economic Studies, 54 (3), 437-59.

Anderberg, Dan (2009), ‘Optimal policy and the risk properties of human capital reconsidered’, Journal of Public Economics, 93 (9,Äì10), 1017-26.

Arcidiacono, Peter (2000), 'Search Discrimination, Human Capital Accumulation and Intergenerational Mobility', Duke University Department of Economics Working Papers, 00-18

Bagger, Jesper, et al. (2013), 'Education, Birth Order and Family Sizze', IZA Discussion Papers, 7454

Baker, Michael and Dwayne Benjamin (1997), 'The Role of the Family in Immigrants' Labor-Market Activity: An Evaluation of Alternative Explanations', The American Economic Review, 87 (4), 705-27.

Barron, John M., Mark C. Berger, and Dan A. Black (1999), 'Do Workers Pay for On-The-Job Training?', The Journal of Human Resources, 34 (2), 235-52.

Bartolome, Charles A. M. de (1990), 'Equilibrium and Inefficiency in a Community Model With Peer Group Effects', Journal of Political Economy, 98 (1), 110-33.

Becker, Gary S. (1962), 'Investment in Human Capital: A Theoretical Analysis', Journal of Political Economy, 70 (5), 9-49.

——— (1965), 'A Theory of the Allocation of Time', The Economic Journal, 75 (299), 493-517.

——— (1967), 'Human Capital and the Personal Distribution of Income: An Analytical Aproach', Woytinsky Lectures, 1

——— (1991), 'A Treatise on the Family',

——— (1960), 'Underinvestment in College Education?', The American Economic Review, 50 (2), 346-54.

——— (1964), Human Capital, (New York: Columbia University Press).

——— (1994), Human Capital, third edition, (Chicago University Books, 9780226041209;).

——— (1974), 'A Theory of Social Interactions', Journal of Political Economy, 82 (6), 1063-93.

——— (1975), Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, With Special Reference to Education, second edition, (NBER Books).

Becker, Gary S. and Barry R. Chiswick (1966), 'Education and the Distribution of Earnings', The American Economic Review, 56 (1/2), 358-69.

Becker, Gary S., Ramón Febrero, and Pedro Schwartz (1995), The Essence of Becker, (Stanford, California: Hoover Institution Press).

Becker, Gary S. and Gilbert Ghez (1975), 'A Theory of the Allocation of Time and Goods Over The Life Cycle', NBER Books, The Allocation of Time and Goods Over The Life Cycle 1-45.

Becker, Gary S. and H. Gregg Lewis (1973), 'On the Interaction between the Quantity and Quality of Children', Journal of Political Economy, 81 (2), S279-88.

Becker, Gary S. and Robert T. Michael (1973), 'On the New Theory of Consumer Behavior', The Swedish Journal of Economics, 75 (4), 378-96.

Becker, Gary S. and Kevin M. Murphy (1988), 'A Theory of Rational Addiction', Journal of Political Economy, 96 (4), 675-700.

Becker, Gary S. and George J. Stigler (1977), 'De Gustibus Non Est Disputandum', The American Economic Review, 67 (2), 76-90.

Becker, Gary S. and Nigel Tomes (1976), 'Child Endowments and the Quantity and Quality of Children', Journal of Political Economy, 84 (4), S143-62.

——— (1979), 'An Equilibrium Theory of the Distribution of Income and Intergenerational Mobility', Journal of Political Economy, 87 (6), 1153-89.

——— (1986), 'Human Capital and the Rise and Fall of Families', Journal of Labor Economics, 4 (3), S1-S39.

Behrman, Jere R. (2010), 'Chapter 73 - Investment in Education, Inputs and Incentives*', in Dani, Rodrik and Mark Rosenzweig (ed.), Volume 5 (Handbook of Development Economics, Elsevier), 4883-975.

Behrman, Jere R. and Paul Taubman (1986), 'Birth Order, Schooling, and Earnings', Journal of Labor Economics, 4 (3), S121-45.

Belley, Phillipe and Lance Lochner (2007), 'The Changing Role of Family Income and Ability in Determining Educational Achievement', Journal of Human Capital, 1 (1), 37-89.

Ben-Porath, Yoram (1967), 'The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings', Journal of Political Economy, 75 (4), 352-65.

——— (1970), 'The Production of Human Capital Over Time', NBER Chapters, 3278

Benhabib, Jess and Roberto Perli (1994), 'Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth', Journal of Economic Theory, 63 (1), 113-42.

Berger, Jasper, et al. (2011), 'A Feasible Search Model of Individual Wage Dynamics with Experience Accumulation', Society for Economic Dynamics, 2011 Meeting Papers, 278

Bernhardt, Dan and David Backus (1990), 'Borrowing Constraints, Occupational Choice, and Labor Supply', Journal of Labor Economics, 8 (1), 145-73.

Bidner, Chris (2010), 'Peer Effects and the Promise of Social Mobility: A Model of Human Capital Investment', University of New South Wales, School of Economics Discussion Papers, 2010-09

——— (2014), 'A Spill-Over Theory of Credentialism', Canadian Journal of Economics, 47 (4),

Black, Sandra E., Paul J. Devereux, and Kjell G. Salvanes (2005), 'The More the Merrier? The Effect of Family Size and Birth Order on Children's Education', The Quarterly Journal of Economics, 120 (2), 669-700.

Blake, Judith (1981), 'Family Size and the Quality of Children', Demography, 18 (4), 421-42.

Blinder, Alan S. and Yoram Weiss (1976), 'Human Capital and Labor Supply: A Synthesis', Journal of Political Economy, 84 (3), 449-72.

Blundell, Richard, Pierre-André Chiappori, and Costas Meghir (2005), 'Collective Labor Supply with Children', Journal of Political Economy, 113 (6), 1277-306.

Booth, A.L. and D.J. Snower (1996), 'Acquiring Skills',

Borjas, George J. (1992), 'Ethnic Capital and Intergenerational Mobility', The Quarterly Journal of Economics, 107 (1), 123-50.

——— (1995), 'Ethnicity, Neighborhoods, and Human-Capital Externalities', The American Economic Review, 85 (3), 365-90.

Boskin, Michael J. (1975), 'Notes on the Tax Treatment of Human Capital', NBER Working Papers, 116

——— (1974), 'The Effects of Government Expenditures and Taxes on Female Labor', The American Economic Review, 64 (2), 251-56.

Bowlus, Audra J. and Huju Liu (2013), 'The Contributions of Search and Human Capital to Earnings Growth over the Life Cycle', European Economic Review, 64 (0), 305-31.

Brown, Eleanor and Howard Kaufold (1988), 'Human Capital Accumulation and the Optimal Level of Unemployment Insurance Provision', Journal of Labor Economics, 6 (4), 493-514.

Bryant, W. Keith (1992), 'Human Capital, Time use, and Other Family Behavior', J Fam Econ Iss, 13 (4), 395-405.

Bunzel, H., et al. (1999), 'Equilibrium Search with Human Capital Accumulation', Center for Labour Market and Social Research (Denmark). Papers Series, 99-11

Burdett, Ken and Melvyn Coles (2010), 'Wage Tenure Contracts with Heterogeneous Firms', Journal of Economic Theory, 145 (4), 1408-35.

——— (2003), 'Equilibrium Wage-Tenure Contracts', Econometrica, 71 (5), 1377-404.

Burdett, Kenneth, Carlos Carrillo-Tudela, and Melvyn G. Coles (2011), 'Human Capital Accumulation and Labor Market Equilibrium', International Economic Review, 52 (3), 657-77.

Burdett, Kenneth and Dale T. Mortensen (1998), 'Wage Differentials, Employer Size, and Unemployment', International Economic Review, 39 (2), 257-73.

Cahuc, Pierre, Fabien Postel-Vinay, and Jean-Marc Robin (2006), 'Wage Bargaining with On-the-Job Search: Theory and Evidence', Econometrica, 74 (2), 323-64.

Cairo, Isabel and Thomas Cajner (2014), 'Human Capital and Unemployment Dynamics: Why More Educated Workers Enjoy Greater Employment Stability', Finance and Economics Discussion Series, 2014-09

Cao, Honggao (2008), 'Credit Constraints and Human Capital Investment in College Education', J Fam Econ Iss, 29 (1), 41-54.

Carmichael, Lorne (1983), 'Firm-Specific Human Capital and Promotion Ladders', The Bell Journal of Economics, 14 (1), 251-58.

Cartiglia, Filippo (1997), 'Credit Constraints and Human Capital Accumulation in the Open Economy', Journal of International Economics, 43 (1,Äì2), 221-36.

Casas-Arce, Pablo (2004), 'Firm Provision of General Training and Specific Human Capital Acquisition', University of Oxford Economic Series Working Papers, 198

Caucutt, Elizabeth and Lance Lochner (2004), 'Early and Late Human Capital Investments, Credit Constraints and the Family', Society for Economic Dynamics, 2004 Meeting Papers, 129

Chiappori, Pierre-André, Monica Costa Dias, and Costas Meghir (2015), 'The Marriage Market, Labor Supply and the Education Choice', Cowles Foundation Discussion Paper, 1994

Chiappori, Pierre-André, Murat Iyigun, and Yoram Weiss (2009), 'Investment in Schooling and the Marriage Market', The American Economic Review, 99 (5), 1689-713.

Chiswick, BarryR. (2006), 'Jacob Mincer, Experience and the Distribution of Earnings', in Grossbard, Shoshana (ed.), (Springer US), 109-26.

Chiswick, Carmel U. (2009), 'The Economic Determinants of Ethnic Assimilation', J Popul Econ, 22 (4), 859-80.

——— (2005), 'An Economic Perspective on Religious Education: Complements and Substitutes in a Human Capital Portfolio', IZA Discussion Papers, 1456

Choo, Eugene and Aloysius Slow (2006), 'Who Marries Whom and Why', Journal of Political Economy, 114 (1), 175-201.

Christensen, Bent Jensen, et al. (2005), 'On the Job Search and the Wage Distribution', Journal of Labor Economics, 23 (1), 31-58.

Chun, Chang and Yijiang Wang (1995), 'A framework for understanding differences in labor turnover and human capital investment', Journal of Economic Behavior & Organization, 28 (1), 91-105.

Cobb-Clark, Deborah and Thomas F Crossley (2004), 'Revisiting the Family Investment Hypothesis', Labour Economics, 11 (3), 373-93.

Cohen-Goldner, Sarit, Chemi Gotlibovski, and Nava Kahana (2009), 'The Role of Marriage in Immigrants and Human Capital Investment under Liquidity Constraints', Journal of Population Economics, 22 (4), 983-1003.

Colander, David and Joanna Wayland Woos (1997), 'Institutional Demand-Side Discrimination Against Women and the Human Capital Model', Feminist Economics Feminist Economics, 3 (1), 53-64.

Constant, Amelie F. and Klaus F. Zimmermann (2008), 'Measuring Ethnic Identity and its Impact on Economic Behaviour', Journal of the European Economic Association, 6 (2-3), 424-33.

Dave, Dhaval M., et al. (2011), 'Effects of Welfare Reform on Vocational Education and Training', Economics of Education Review, 30 (6), 1399-415.

Dessy, Sylvain. E. and Stephane Pallage (2009), 'Gender Discrimination, Human Capital and Marriage', Journal of African Development, 11 (1), 61-76.

Dustmann, Christian and Uta Schönberg (2012), 'What Makes Firm-based Vocational Training Schemes Successful? The Role of Commitment', American Economic Journal: Applied Economics, 4 (2), 36-61.

Ehrlich, Isaac and Uri Ben Zion (1976), 'Asset Management, Allocation of Time and Returns to Savings', Economic Inquiry, 14 (4), 558-86.

Ehrlich, Isaac, Wiliam A. Hamlen Jr, and Yong Ying (2008), 'Asset Management, Human Capital, and the Market for Risky Assets', Journal of Human Capital, 2 (3), 217-62.

Einarsson, Tor and Milton H. Marquis (1999), 'Formal training, on-the-job training and the allocation of time', Journal of Macroeconomics, 21 (3), 423-42.

Eisner, R and R. Strotz (1963), 'The Determinants of Business Investment', Impacts of Monetary Policy, 60-338.

Felli, Leonardo and Christopher Harris (1996), 'Learning, Wage Dynamics, and Firm-Specific Human Capital', Journal of Political Economy, 104 (4), 838-68.

Ferguson, William D. (2005), 'Fair Wages, Worker Motivation, and Implicit Bargaining Power in Segmented Labor Markets', Journal of Institutional and Theoretical Economics (JITE) / Zeitschrift f√ºr die gesamte Staatswissenschaft, 161 (1), 126-54.

Fletcher, Jason M. and David E. Frisvol (2009), 'Higher Education and Health Investments: Does More Schooling Affect Preventive Health Care Use?', Journal of Human Capital, 3 (2), 144-76.

Fougere, D. and W. Schwerdt (2002), 'Are Apprentices Productive?', Konjukturpolitik, 48 317-46.

Friedman, Milton (1956), 'The Quantity Theory - A Restatement', Studies in the Quantity Theory of Money (ArticleType: research-article / Full publication date: Aug., 1959 / Copyright ¬© 1959 The University of Chicago Press; Milton Friedman ed.), 3-21.

——— (1953), 'Choice, Chance, and the Personal Distribution of Income', Journal of Political Economy, 61 (4), 277-90.

Friedman, Milton and Simon Kuznets (1945), Income From Independent Professions, (NBER).

Fu, Chao (2011), 'Training, search and wage dispersion', Review of Economic Dynamics, 14 (4), 650-66.

Galama, T.J. and H. Van Kippersluis (2010), 'A Theory of Socioeconomic Disparities in Health', Rand Working Papers, 773

Garloff, Alfred and Anja Kuckulenz (2006), 'Training, Mobility, and Wages: Specific Versus General Human Capital', Jahrb√ºcher f√ºr National√∂konomie und Statistik / Journal of Economics and Statistics, 226 (1), 55-81.

Geel, Regula and Uschi Backes-Gellner (2009), 'Occupational Mobility Within and Between Skill Clusters: An Empirical Analysis Based on the Skills-Weights Approach', Economics of Education Working Paper Series, 47

Gersbach, Hans, et al. (2003), 'A Product Theory of Market Training', CEPR Discussion Papers, 3940

Gil, Ana Isabel and José Alberto Molina (2007), 'Human Development and Alcohol Abuse in Adolescence', Applied Economics, 39 (10), 1315-23.

Glaeser, Edward (1991), 'Reputation and Turnover in the United States and Japan', Mimeo,

Glied, S. and A. Lleras-Muney (2008), 'Health Inequality, Education and Medical Innovation', Demography, 45 (3), 741-61.

Goldman, D.P. and J.P. Smith (2002), 'Can Patient Self-Management Help Explain the SES Health Gradient?', Proceedings of the National Academy of Science, 99 10920-34.

Gould, Eric D. (2008), 'Marriage and Career: The Dynamic Decisions of Young Men', Journal of Human Capital, 2 (4), 337-78.

Gould, Eric D., Omer Moav, and Bruce A. Weinberg (2001), 'Precautionary Demand for Education, Inequality, and Technological Progress', Journal of Economic Growth, 6 (4), 285-315.

Gousse, Marion (2014), 'Marriage Market and Intra-Household Allocation. Essays in Economics of Family and Education.', Sciences Po Publications,

Graham, John W. (1981), 'An Explanation for the Correlation of Stocks of Nonhuman Capital with Investment in Human Capital', The American Economic Review, 71 (1), 248-55.

Grossman, Michael (1972), 'On the Concept of Health Capital and the Demand for Health', Journal of Political Economy, 80 (2), 223-55.

Grout, Paul A. (1984), 'Investment and Wages in the Absence of Binding Contracts: A Nash Bargaining Approach', Econometrica, 52 (2), 449-60.

Han, Song and Casey B. Mulligan (2001), 'Human Capital, Heterogeneity and Estimated Degrees of Intergenerational Mobility', The Economic Journal, 111 (470), 207-43.

Hanushek, Eric A. (1992), 'The Trade-off between Child Quantity and Quality', Journal of Political Economy, 100 (1), 84-117.

Harhoff, Dietmar and Thomas J. Kane (1997), 'Is the German Apprenticeship System a Panacea for the U.S. Labor Market?', J Population Economics, 10 (2), 171-96.

Hart, Robert, Thomas Muotos, and James M. Malcomson (1995), 'Human Capital, Employment and Bargaining',

Hashimoto, Masanori (1981), 'Firm-Specific Human Capital as a Shared Investment', The American Economic Review, 71 (3), 475-82.

Heckman, James J, Lance Lochner, and Christopher Taber (1998), 'Explaining Rising Wage Inequality: Explorations with a Dynamic General Equilibrium Model of Labor Earnings with Heterogeneous Agents', Review of Economic Dynamics, 1 (1), 1-58.

Heckman, James J. (1976), 'A Life-Cycle Model of Earnings, Learning, and Consumption', Journal of Political Economy, 84 (4), S9-S44.

Heckman, James J. and Thomas E. Macurdy (1980), 'A Life Cycle Model of Female Labour Supply', The Review of Economic Studies, 47 (1), 47-74.

Hockenberry, Mason, Hsien-Ming Lien, and Shin-Yi Chou (2008), 'The Impacts of Task Repetition and Temporal Breaks in Production on Human Capital and Productivity', Journal of Human Capital, 2 (3), 303-35.

Hoppe, Heidrun C., Benny Moldovanu, and Aner Sela (2009), 'The Theory of Assortative Matching Based on Costly Signals', The Review of Economic Studies, 76 (1), 253-81.

Huang, Fali (2007), 'Building Social Trust: A Human Capital Approach', East Asian Bureau of Economic Research Labor Economics Working Papers, 22447

Humlum, MariaKnoth (2011), 'Timing of Family Income, Borrowing Constraints, and Child Achievement', Journal of Population Economics, 24 (3), 979-1004.

Jacobs, Bas and Hongyan Yang (2013), 'Second-best Income Taxation with Endogenous Human Capital and Borrowing Constraints', CESIfo Working Paper Series, 4155

Jacquemet, Nicolas and Jean-Marc Robin (2011), 'Marriage with Labor Supply', Documents du Travail du Centre dÉconomie de la Sorbonne, 11050

Johnson, William R. (1978), 'A Theory of Job Shopping', The Quarterly Journal of Economics, 92 (2), 261-78.

Jones, Andrew, et al. (2014), 'A Synthesis of the Grossman and Becker-Murphy Models of Health and Addictions: Theoretical and Empirical Implications', Canadian Centre for Health Economics Working Papers, 140007

Jovanovic, Boyan (1979), 'Job Matching and the Theory of Turnover', Journal of Political Economy, 87 (5), 972-90.

——— (1979), 'Firm-specific Capital and Turnover', Journal of Political Economy, 87 (6), 1246-60.

Kane, Thomas J. (1996), 'College Cost, Borrowing Constraints and the Timing of College Entry', Eastern Economic Journal, 22 (2), 181-94.

Katz, Eliakim and Adrian Ziderman (1990), 'Investment in General Training: The Role of Information and Labour Mobility', The Economic Journal, 100 (403), 1147-58.

Keane, Michael P. and Kenneth I. Wolpin (1997), 'The Career Decisions of Young Men', Journal of Political Economy, 105 (3), 473-522.

Kennan, John (1979), 'Bonding and the enforcement of labor contracts', Economics Letters, 3 (1), 61-66.

Kessler, Anke S. and Christoph Lülfesmann (2006), 'The Theory of Human Capital Revisited: on the Interaction of General and Specific Investments*', The Economic Journal, 116 (514), 903-23.

Klaauw, Wilbert Van Der (1996), 'Female Labour Supply and Marital Status Decisions: A Life-Cycle Model', The Review of Economic Studies, 63 (2), 199-235.

Klein, L. R. (1958), 'The Friedman-Becker Illusion', Journal of Political Economy, 66 (6), 539-45.

Lazear, Edward P. and Sherwin Rosen (1990), 'Male-Female Wage Differentials in Job Ladders', Journal of Labor Economics, 8 (1), S106-23.

Lazear, Edward. P. (2009), 'Firm-Specific Human Capital: A Skill Weights Approach', Journal of Political Economy, 117 (5), 914-40.

Lechthaler, Wolfgang (2009), 'The interaction of firing costs and firm training', Empirica, 36 (3), 331-50.

Leibowitz, Arleen (1977), 'Parental Inputs and Children's Achievement', The Journal of Human Resources, 12 (2), 242-51.

——— (1974), 'Education and Home Production', The American Economic Review, 64 (2), 243-50.

Levhari, David and Yoram Weiss (1974), 'The Effect of Risk on the Investment in Human Capital', The American Economic Review, 64 (6), 950-63.

Lillard, Lee A. (1973), 'Human Capital Life Cycle and Earnings Models: A Specific Solution and Estimation', NBER Working Papers, 0004

Lindert, Peter H. (1977), 'Sibling Position and Achievement', The Journal of Human Resources, 12 (2), 198-219.

Lochner, Lance J. and Alexander Monge-Naranjo (2011), 'The Nature of Credit Constraints and Human Capital', The American Economic Review, 101 (6), 2487-529.

Loewenstein, Mark A. and James R. Spletzer (1998), 'Dividing the Costs and Returns to General Training', Journal of Labor Economics, 16 (1), 142-71.

Loury, Glenn C. (1981), 'Intergenerational Transfers and the Distribution of Earnings', Econometrica, 49 (4), 843-67.

Lucas, Jr., Robert E and Edward C Prescott (1974), 'Equilibrium Search and Unemployment', Journal of Economic Theory, 7 (2), 188-209.

MacLeod, W.Bentley and James M. Malcomson (1993), 'Specific Investment and Wage Profiles in Labour Markets', European Economic Review, 37 (2,Äì3), 343-54.

Malcomson, James M. (1997), 'Contracts, Hold-Up, and Labor Markets', Journal of Economic Literature, 35 (4), 1916-57.

Malcomson, James M., James W. Maw, and Barry McCormick (2003), 'General Training by Firms, Apprentice Contracts, and Public Policy', European Economic Review, 47 (2), 197-227.

Martimort, David and Thierry Verdier (2003), 'From Inside the Firm to the Growth Process', Journal of the European Economic Association, 1 (2-3), 621-29.

Michael, Robert. T. (1972), 'Human Capital and Consumption: The Theoretical Framework', NBER Books, The Effect of Education on Efficiency in Consumption 7-13.

Mincer, Jacob (1958), 'Investment in Human Capital and Personal Income Distribution', Journal of Political Economy, 66 (4), 281-302.

——— (1962), 'On-the-Job Training: Costs, Returns, and Some Implications', Journal of Political Economy, 70 (5), 50-79.

——— (1974), 'Schooling, Experience and Earnings',

——— (1986), 'Wage Changes in Job Changes', NBER Working Papers, 1907

——— (1988), 'Job Training, Wage Growth and Labor Turnover', NBER Working Papers, 2690

——— (1989), 'Job Training, Costs, Returns and Wage Profiles', NBER Working Papers, 3208

——— (2003), 'Technology and the Labor Market', Review of Economics of the Household, 1 (4), 249-72.

Mincer, Jacob and Boyan Jovanovic (1979), 'Labor Mobility and Wages', NBER Working Papers, 0357

Mohrenweiser, Jens and Uschi Backes-Gellner (2010), 'Apprenticeship Training: For Investment or Substitution?', International Journal of Manpower Int J of Manpower, 31 (5), 545-62.

Mohrenweiser, Jens and Thomas Zwick (2009), 'Why do firms train apprentices? The net cost puzzle reconsidered', Labour Economics, 16 (6), 631-37.

Morita, Hodaka and Clare Noone (2014), 'New implications of Lazear's Skill-Weights Approach', Economic Modelling, 43 (0), 476-79.

Mortensen, Dale T. (1978), 'Specific Capital and Labor Turnover', The Bell Journal of Economics, 9 (2), 572-86.

——— (1978), 'Specific Capital and Labor Turnover', The Bell Journal of Economics, 9 (2), 572-86.

——— (2003), 'Wage Dispersion: Why are Similar Workers Payed Differently?',

Mulligan, Casey B. (1999), 'Galton versus the Human Capital Approach to Inheritance', Journal of Political Economy, 107 (S6), S184-224.

Muysken, Joan and Thomas Zwick (1999), 'Human Capital Creates Inside Power', ZEW Discussion Papers, 99-25

Ordine, Patricia and Giuseppe Rose (2009), 'Overeducation and Instructional Quality: A Theoretical Model and Some Facts', Journal of Human Capital, 3 (1), 73-105.

Orkodashvili, Mariam (2008), 'Investment in Human Capital: Academic vs. Vocational Education', MPRA Papers, 16558

Parsons, Donald O. (1972), 'Specific Human Capital: An Application to Quit Rates and Layoff Rates', Journal of Political Economy, 80 (6), 1120-43.

Peters, Michael (2007), 'The Pre-marital Investment Game', Journal of Economic Theory, 137 (1), 186-213.

Picchio, Matteo and Ours van, Jan C. (2013), 'Retaining through training even for older workers', Economics of Education Review, 32 (0), 29-48.

Pistaferri, Luigi, et al. (2013), 'Marriage, Social Insurance and Labor Supply', Society for Economic Dynamics 2013 Meeting Papers, 448

Polachek, Solomon W. (2003), 'Mincer's Overtaking Point and the Life Cycle Earnings Distribution', Review of Economics of the Household, 1 (4), 273-304.

——— (2004), 'How the Human Capital Model Explains Why the Gender Wage Gap Narrowd', IZA Discussion Papers, 1102

——— (2014), 'The Gender Pay Gap Across Countries: A Human Capital Approach', IZA Discussion Papers, 8603

Popov, Alexander (2014), 'Credit Constraints and Investment in Human Capital: Training Evidence from Transition Economies', Journal of Financial Intermediation, 23 (1), 76-100.

Postel-Vinay, Fabien and Jean-Marc Robin (2002), 'Equilibrium Wage Dispersion with Worker and Employer Heterogeneity', Econometrica, 70 (6), 2295-350.

Prendergast, Canice (1989), 'Multiple Equilibria in United States and Japan', Mimeo,

——— (1993), 'The Role of Promotion in Inducing Specific Human Capital Acquisition', The Quarterly Journal of Economics, 108 (2), 523-34.

Rege, Mari (2008), 'Why do People Care About Social Status?', Journal of Economic Behavior & Organization, 66 (2), 233-42.

Ritzen, Jozef M. and Donald R. Winkler (1977), 'The Production of Human Capital Over Time', The Review of Economics and Statistics, 59 (4), 427-37.

Rosen, Sherwin (1975), 'Measuring The Obsolescence of Knowdledge', NBER Books, Education, Income and Human Behaviour 199-232.

——— (1972), 'Learning and Experience in the Labor Market', The Journal of Human Resources, 7 (3), 326-42.

——— (1976), 'A Theory of Life Earnings', Journal of Political Economy, 84 (4), S45-67.

Rossetti, Stefania and Paola Tanda (2000), 'Human Capital, Wages and Family Interactions', LABOUR, 14 (1), 5-34.

Rubinstein, Yona and Yoram Weiss (2006), 'Chapter 1 Post Schooling Wage Growth: Investment, Search and Learning', in E., Hanushek and F. Welch (ed.), Volume 1 (Elsevier), 1-67.

Ryder, Harl E., Frank P. Stafford, and Paula E. Stephan (1976), 'Labor, Leisure and Training over the Life Cycle', International Economic Review, 17 (3), 651-74.

Schneider, Brit S., Udo Schneider, and Volker Ulrich (2007), 'Health and the Decision to Invest in Education', Jahrb√ºcher f√ºr National√∂konomie und Statistik / Journal of Economics and Statistics, 227 (5/6), 725-45.

Schulhofer-Wohl, Sam (2006), 'Negative Assortative Matching of Risk-Averse Agents with Transferable Expected Utility', Economics Letters, 92 (3), 383-88.

Schultz, Theodore W. (1960), ‘Capital Formation by Education’, Journal of Political Economy, 68 (6), 571-83.

——— (1961), ‘Investment in Human Capital’, The American Economic Review, 51 (1), 1-17.

——— (1962), ‘Reflections on Investment in Man’, Journal of Political Economy, 70 (5), 1-8.

Shi, Shouyong (2009), ‘Directed Search for Equilibrium Wage,ÄìTenure Contracts’, Econometrica, 77 (2), 561-84.

Shimer, Robert (2006), ‘On-the-job search and strategic bargaining’, European Economic Review, 50 (4), 811-30.

Sjögren, Anna (2000), ‘Occupational Choice and Incentives. The Role of Family Background’, Research Institute of Industrial Economics Workinp Papers, 539

Skorobogatov, Alexander S. (2012), ‘The value of Human Capital and Health Behavior’, AccessEcon Economic Bulletin, 32 (2), 1785-96.

Sloof, Randolph, Joep Sonnemans, and Hessel Oosterbeek (2004), ‘Specific investments, holdup, and the outside option principle’, European Economic Review, 48 (6), 1399-410.

Smith, Adam (1909), An Inquiry into The Nature And Causes Of The Wealth of Nations, ed. Elliot, Charles W., (The Harvard Classics, 10; New York: PF. Collier and Son).

Spinnewijn, Johannes (2013), ‘Training and search during unemployment’, Journal of Public Economics, 99 (0), 49-65.

Stevens, Margaret (1994), ‘A Theoretical Model of On-the-Job Training with Imperfect Competition’, Oxford Economic Papers New Series, 46 (4), 537-62.

——— (2001), ‘Should Firms Be Required To Pay For Vocational Training?’, The Economic Journal, 111 (473), 485-505.

——— (2012), ‘Human Capital and Competition: Strategic Complementarities in Firms-Based Training’, Oxford Discussion Paper Series, 629

——— (1996), ‘Transferable Training and Poaching Externalities’, In Booth and Snower (1996),

Stinebrickner, Ralph and Todd Stinebrickner (2008), ‘The Effect of Credit Constraints on the College Drop-Out Decision: A Direct Approach Using a New Panel Study’, The American Economic Review, 98 (5), 2163-84.

Topel, Robert (1991), ‘Specific Capital, Mobility, and Wages: Wages Rise with Job Seniority’, Journal of Political Economy, 99 (1), 145-76.

Viscus, W. Kip (1979), ‘Job Hazards and Worker Quit Rates: An Analysis of Adaptive Worker Behavior’, International Economic Review, 20 (1), 29-58.

Weiss, Yoram (1971), ‘Investment in Graduate Education’, The American Economic Review, 61 (5), 833-52.

——— (1972), ‘On the Optimal Lifetime Pattern of Labour Supply’, The Economic Journal, 82 (328), 1293-315.

Wilde, Louis. L. (1969), ‘An Information-Theoretic Approach to Job Quits’, Humanities and Social Sciences Working Papers, 150

Williams, Joseph T. (1979), ‘Uncertainty and the Accumulation of Human Capital Over the Life Cycle’, The Journal of Business, 52 (4), 521-48.

Xiao, Chaoqun, et al. (2013), ‘Equilibrium Search with Heterogeneous Firms, Workers and Endogenous Human Capital’, University of Munich MPRA Papers, 52136

Zimmermann, Klaus F. (2007), ‘The Economics of Migrant Ethnicity’, Journal of Population Economics, 20 (3), 487-94.

Zwick, Thomas (2007), ‘Apprenticeship Training in Germany: Investment or Productivity Driven?’, Journal for Labour Market Research, 40 (2/3), 193-204.

III. ESTRATEGIA MODELIZADORA EN EQUILIBRIO GENERAL

III.1. Modelos de agente representativo.

La primera aproximación a la modelización de la acumulación de capital humano en equilibrio general corresponde a **Uzawa (1965)**. El modelo, en su origen, pretendía ser una adaptación del modelo de Solow a un entorno bisectorial con cambio técnico endógeno, aunque más tarde acabaría sirviendo de plataforma a Lucas para la adaptación del planteamiento microeconómico de capital humano de Ben-Porath y Becker.

Bajo el enfoque de Uzawa, el input trabajo efectivo se subdivide en dos componentes: el número de trabajadores y la eficiencia del sector trabajo. Si bien la eficiencia del trabajo, en la medida en que es entendida como el conjunto de habilidades adquiridas en uno de los dos sectores productivos de la economía -el educativo- entronca con los planteamientos de la teoría del capital humano, el número de trabajadores es una característica propia de un entorno de equilibrio general, al sustituir a la fracción del tiempo disponible en la literatura tradicional. El incremento derivado de la eficiencia del trabajo se aplica al segundo de los sectores productivos, el del bien compuesto, constituyendo por lo tanto un cambio técnico endógeno que será neutral en el sentido de Harrod[68] reviste la forma:

$$Y_s = F\left(K_s, A_s L_s^Y\right) \quad (3.1)$$

Por lo demás, F presenta rendimientos constantes a escala en el conjunto de sus dos inputs y es cóncava en sus dos argumentos, con una relación marginal de sustitución técnica de factores productivos decreciente. Este proceso de innovación técnica viene dado por la senda de A. La población, que crece en cada período a una tasa bruta n, puede transcurrir el período en el sector productor del bien final o en el educativo, que es también el generador del crecimiento de la eficiencia. Esto es:

$$A_{s+1} = A_s G\left(\frac{L_s^A}{L_s}\right) + A_s; G' > 0; G'' < 0 \quad (3.2)$$

Esto es, la tecnología de acumulación de la eficiencia se basa en la ausencia de depreciación de esta y una inversión con rendimientos constantes en la propia eficiencia existente en s y decrecientes en la proporción de trabajo ubicada en el sector productor del cambio técnico. Este marco analítico permite dotar a la eficiencia del trabajo de algunas características de los activos reales, si bien los costes ligados a su adquisición no quedan

---

[68] Se dice que una innovación técnica es neutral en el sentido de Harrod si y solo si, para una determinada rato capital/producto, la productividad marginal de la ratio capital/trabajo no varía.

explicitados, como se explica en el pie de página. Por esta razón, el capital físico será el único activo real del modelo en sentido estricto. Este último tiene la misma naturaleza física que el bien de consumo y se comercializa por tanto en el mercado de bienes de consumo, cuya ecuación de vaciado se lee conjuntamente con la ecuación dinámica de movimiento del capital físico[69]:

$$C_s + I_s^K = Y_s \quad (3.3)$$

$$K_{s+1} = I_s^k + (1-\delta)K_s \quad (3.4)$$

Al centrarse el modelo en el problema del planificador benevolente (PB), la restricción de recursos de la economía no especifica el régimen de propiedad del capital o de la empresa. Como se verá en el capítulo 3 sobre tasas de retorno, a este resultado puede conducir tanto un sector empresarial independiente de las economías domésticas, a las que alquila el uso del capital productivo -marco en el que las decisiones de inversión en capital físico y producción se toman separadamente-, como un hogar-productor que toma simultáneamente las decisiones de adquisición del capital físico y de producción. Por último, el PB maximizará el consumo per cápita a lo largo del horizonte temporal descontado a una tasa de preferencia β:

$$W = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[\frac{C_s}{L_s} \right] \text{(3.5)}$$

El problema puede transformarse íntegramente en función de 3 variables endógenas, k_s, u_s y s_s, que describen completamente el comportamiento del sistema, siendo:

$$k_s = \frac{K_s}{A_s L_s}; u_s = \frac{L_s^A}{L_s}; s_s = \frac{I_s^K}{Y_s} \text{ (3.6)}$$

El conjunto de ecuaciones dinámicas a que dan lugar las cpo dan lugar a la existencia de una única senda estacionaria en las tres variables endógenas. Dicha solución implica: i) una tasa de crecimiento constante de la eficiencia del trabajo, dada por la ecuación de acumulación evaluada en la ratio u; ii) un stock de capital físico creciente a la misma tasa que la eficiencia del trabajo; iii) un consumo creciente a la misma tasa que el capital físico; un output que crece a la misma tasa que el capital físico. Niveles iniciales de k superiores

69 Al no desarrollar el modelo las restricciones de los agentes en equilibrio descentralizado, no se conocen las condiciones retributivas de los trabajadores en el sector productor de eficiencia. A diferencia de los modelos de equilibrio parcial de raíz beckeriana, por tanto, no queda claro que la acumulación de eficiencia parta de un sacrificio de recursos por los agentes, como el aprendizaje en aquellos. La única inversión explícita es la que se produce en capital físico a partir del ahorro generado sobre las rentas generadas en este sector. Esta indefinición se romperá en la versión del modelo elaborada por Lucas.

o inferiores al estacionario convergen hacia el mismo a lo largo de sendas óptimas caracterizadas, respectivamente, por: a) Con k superiores, la inversión en capital físico se anularía hasta que esta variable convergiera a su valor estacionario; b) Con k inferiores, el consumo se anularía hasta que sucediera la propio; esta estrategia es viable al no existir una función de utiilidad cóncava en consumo cuya utilidad marginal muestre las propiedades asintóticas habituales. En cualquiera de estos dos casos, la asignación del número de trabajadores se realizaría en función de una cpo que tuviera en cuenta las productividades relativas de ambos en las respectivas tecnologías a lo largo de la senda de transición al estado estacionario.

Lucas (1988), en "On The Mechanics of Economic Development", formula el modelo que ha sido, de lejos, el más influyente en la literatura de capital humano en equilibrio general. retoma la estructura formal del modelo Uzawa e inserta dentro de la misma la esencia de la visión beckeriana de acumulación de capital humano. Así, Lucas utiliza un esquema de distribución del tiempo entre trabajo y aprendizaje en la línea de Ben Porath-Becker, en lugar de suponer como Uzawa un tiempo de trabajo exógeno y una división de personas físicas entre ambos sectores. Además, sustituye el concepto de eficiencia del trabajo por el de acumulación del capital humano, conforme a una ecuación dinámica à la Ben Porath con tasa de depreciación nula. La función de producción de capital humano adopta la siguiente forma general:

$$a_{s+1}^h = \left(a_s^h\right)^{\varepsilon} G\left(n_s^h\right) + a_s^h = a_s^h\left[1 + \left(a_s^h\right)^{\varepsilon-1} G\left(n_s^h\right)\right] \quad (3.7)$$

La tasa de depreciación del activo es unitaria, en lo que se convertirá en un supuesto habitual dentro de los modelos de equilibrio general dinámico. Además, el exponente ε determinará la tipología de rendimientos del capital humano; cuando este parámetro es inferior a la unidad, se tendrán rendimientos decrecientes, de modo que el capital humano no puede conventirse en fuente de crecimiento alternativa al crecimiento de la población (si lo hubiera) o al progreso tecnológico incorporado a la función de producción de bienes de consumo. Lucas se centrará para la resolución de su modelo, siguiendo a Uzawa, en un exponente unitario, asociado a rendimientos constantes a escala en el capital humano, capaz de proporcionar crecimiento endógeno a largo plazo. Siguiendo inconfesadamente a Ben-Porath, G se supone lineal y de coeficiente unitario en el tiempo de aprendizaje, de suerte que:

$$a_{s+1}^h = a_s^h\left[1 + Bn_s^h\right] \quad (3.8)$$

El anterior supuesto equivale a considerar el capital humano y el tiempo como un solo factor productivo (servicios de capital humano, dependientes linealmente de la fracción de tiempo que dicho factor se aplica al sector). Aunque este ha sido un legado utilizado mayoritariamente en la literatura posterior, algunos autores han considerado, alternativamente, el tiempo de aprendizaje como un factor independiente del capital humano, pudiendo estar sometido a rendimientos a escala individuales diferentes. Bajo este enfoque alternativo, la integridad del capital humano se aplica a la producción en cada sector, siendo este un factor que aumenta la eficiencia de otro, que es el tiempo transcurrido en la producción. La función de producción del bien de consumo será una Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes en el capital físico y efectos externos en el capital humano[70]:

$$Y_s = A_s(a_s^h n_s^w)^{\alpha_h}(K_s)^{\alpha_k}\left(a_s^h\right)_a^{\hat{\alpha}_h};\ \alpha_h = 1-\alpha_k \text{ (3.9)}$$

La función lleva incorporada un efecto externo que se manifiesta a través de $\left(a_s^h\right)_a$, o stock de capital "agregado" de la economía. Cuando la población se mantiene constante, dicho stock agregado será necesariamente igual al del único habitante de la economía. Cuando aquella crece a tasa neta n, será el stock de capital del agente representativo. Po tanto se aprecia una asimetría en la introducción del efecto externo, ya que mientras el stock de capital humano "privado" se ve afectado en la función de producción por el número de individuos que lo aplican, el efecto externo se referiría solamente al stock per cápita. Otra asimetría deriva de la ausencia de un efecto externo similar en la función de inversión bruta en capital humano, aspecto sobre el que incidirán los autores posteriores a Lucas. Finalmente, las preferencias adoptarán la forma de una función de utilidad de elasticidad de sustitución intertemporal constante a lo largo de un horizonte infinito. La restricción de recursos utilizada es la de recursos para toda la economía, sin discernir si la producción de capital humano es de origen doméstico o constituye un sector diferenciado de los hogares[71]. Estos dos últimos supuestos comportan las siguientes ecuaciones adicionales:

$$U = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \frac{C_s^{1-\sigma}}{1-\sigma} \text{ (3.11)}$$

$$C_s + K_{s+1} - K_s = Y_s \text{ (3.12)}$$

[70] Lucas construye el modelo para un crecimiento de la población exógeno, aunque sin pérdida de generalidad en esta exposición se supone que la tasa neta de crecimiento de la población es nula. Alterar este supuesto no cambia la esencia de los resultados.

[71] Alternativamente, la restricción de recursos puede interpretarse como una economía de agente representativo consumidor-productor cuyo únicos activos son reales, capital fisico y capital humano y que acumula este último en un régimen de autoproducción.

En la línea de Romer (1986)[72], Lucas distingue dos tipos de soluciones al problema de optimización de la función de utilidad, sujeta a la restricción de recursos, la ecuación dinámica del capital humano y la función de producción del bien de consumo. En primer lugar, la solución de equilibrio competitivo será cualquiera "de punto fijo", en virtud de la cual, dada cualquier trayectoria exógena para $a_{s,a}^{h}$, la posición endógena en capital humano del hogar representativo coincida con el mismo. Dicho de otro modo, ex post coincida el efecto externo en la función de producción y la solución descentralizada del hogar representativo. Nótese que si ambos no coincidieran, no podrían satisfacerse simultáneamente todas las restricciones del problema de optimización, al no ajustarse la demanda de consumo más la inversión en capital físico al valor esperado de la producción de bien de consumo.

Mientras, la solución óptima parte de la imposición a priori de la restricción $a_{s,a}^{h} = a_{s}^{h}$, esto es, de la internalización completa por los hogares (sintetizados en el hogar representativo) de las consecuencias agregadas de sus actos. Desde otro punto de vista, podría decirse que la solución óptima al problema implica la utilización de expectativas racionales por parte de los hogares, de modo que a priori estos anticipen perfectamente la naturaleza del equilibrio competitivo. A diferencia de los modelos de crecimiento tradicionales de Solow o Cass-Koopmans, en los que la ausencia de estos efectos externos provocaban la coincidencia necesaria entre la solución óptima y el equilibrio competitivo, en este tipo de modelos la solución óptima no es alcanzable de un modo descentralizado y no cooperativo, ya que el hogar considerará en su problema de optimización solamente los beneficios privados de sus acciones (en concreto, como se verá en el capítulo próximo, la tasa de retorno del capital humano se basará principalmente en las ganancias salariales marginales), pero no el efecto de la acumulación de capital humano sobre el componente agregado de la función de producción del bien de consumo. La ausencia de soluciones cooperativas o la existencia de obstáculos a su puesta en práctica desemboca a menudo en la necesidad de intervención pública de uno u otro tipo.

Las cpo de un modelo de este tipo se analizarán en detalle en el capítulo 3 sobre tasas de retorno. El estado estacionario se caracteriza por una tasa de crecimiento con-

---

[72] El modelo de Romer se basa en la acumulación de conocimiento y técnicas de producción, concepto que excede al de capital humano. También es susceptible de generar crecimiento endógeno al producirse el conocimiento a través de una función dependiente del propio volumen de sacrificio de consumo (sería el término equivalente en Lucas a los inputs del capital humano) y el propio stock de conocimiento previamente acumulado.

stante para ambos tipos de capital, humano y físico, sus precios sombra[73] y el consumo per cápita, si bien en presencia de efectos externos y/o crecimiento de la población la tasa estacionaria de todas estas variables no se igualará. El crecimiento del precio sombra de la riqueza a una tasa constante implica que, en estado estacionario, la productividad marginal del capital deberá ser también constante. A su vez, esta se iguala al consumo agregado dividido por el stock de capital, sin más que dividir por esta última variable la ecuación de vaciado en el mercado de bienes y tener en cuenta que la inversión neta en estado estacionario es nula. A consecuencia de esta relación, las tasas de crecimiento estacionarias de consumo y stock de capital físico per cápita se igualarán. Esta relación se verifica tanto en un modelo de acumulación endogena de capital humano como en los de progreso técnico exógeno y neutral en el sentido de Harrod. La tasa de crecimiento del consumo per cápita, a su vez, será igual a la del capital humano en ausencia de efectos externos y, cuando están presentes, superior: esta relación puede obtenerse a partir de la diferenciación de la condición de constancia de la productividad marginal del capital físico en estado estacionario. Por la propiedad transitiva, la tasa de crecimiento del capital físico se igualará también a la del capital humano en ausencia de efectos externos; cuando la población crezca, será el capita físico per cápita el que sincronice su ritmo de expansión al del capital humano. Este último crecerá a una tasa constante dada por el valor estacionario del tiempo destinado al aprendizaje:

$$\Gamma_a = \frac{a^h_{s+1}}{a^h_s} = 1 + Bn^h \quad (3.13)$$

En cuanto a la remuneración salarial de los trabajadores y atendiendo a su composición, esta se incrementará continuamente en estado estacionario por dos razones: la acumulación continua de capital físico cuando los efectos externos son no nulos, que aumenta la productividad marginal del factor trabajo y se refeja, consiguientemente, en e, y la propia acumulación de capital humano. Cuando no hay efectos externos, la constancia de la ratio capital físico/capital humano implicará también la constancia de e, ya que $e = f(k) - kf'(k)$. En cualquiera de los dos casos, la tasa de crecimiento del salario real por unidad de tiempo trabajada será proporcional a la tasa de acumulación de capital humano, solo que en ausencia de efectos externos la constante de proporcionalidad será 1. Por otro lado, la consistencia del modelo por el lado de las rentas exige que el crecimiento de las rentas salariales se iguale al del consumo per cápita. Por último, el cumplimiento de la condición de transversalidad exigirá que $Bn^h < \rho$. Como anticipábamos antes, la tasa

73 Las tasas de variación de ambos precios sombra se mantendrán constantes en equilibrio estacionario y la ratio de ambos precios sombra, o precio relativo de un activo en términos de otro, también será constante en equilibrio estacionario.

de crecimiento eficiente del capital humano en estado estacionario será, en presencia de externalidades positivas en F, superior a la misma tasa en competencia descentralizada.

Es interesante detenerse algo más en perfilar la relación entre los niveles de capital físico y humano en estado estacionario. En efecto, las sendas de uno y otro en estado estacionario vienen definidas por las siguientes ecuaciones, donde g_k y g_h denotan sus tasas de crecimiento respectivas y los subíndices s0 representan valores en un cierto momento del tiempo:

$$K_s = K_{s0}\left(1+g_k\right)^{(s-s_0)};\ a_s^h = a_{s0}^h\left(1+g_h\right)^{(s-s_0)} \quad (3.14)$$

Como acaba de verse, en ausencia de efectos externos, las tasas de crecimiento de ambos activos se igualan, por lo que la representación de la relación entre ambos niveles será una línea recta en el espacio $\left(K_s, a_s^h\right)$. Dicho de otra forma, cuando los efectos externos se anulan $\left(\hat{\alpha}_h = 0\right)$, entonces la proporción entre los niveles de ambos stocks de capital es la misma en estado estacionario. Dado que en estado estacionario n^h es constante, la ratio $K_s / a_s^h n^h$ también lo será: este es el equivalente a la ratio de capital físico expresada en unidades de trabajo eficiencia de Uzawa. A lo largo del rayo que esta proporción define, la tasa de crecimiento de numerador y denominador es la misma. Por tanto, cuando se parte de un punto situado fuera del rayo la proporción entre los dos stocks convergirá hacia el mismo, lo que resulta equivalente a hablar de convergencia hacia a largo plazo hacia el estado estacionario. Cuando la ratio es inferior a la estacionaria, la senda de transición no podrá caracterizarse por un consumo nulo, a diferencia del enfoque de Uzawa. En este contexto, un shock exógeno que no modifique la elasticidad del capital en F ni el grado de efectos externos (medido por el exponente $\hat{\alpha}_h$) y tampoco las horas de aprendizaje estacionarias no tendrá impacto sobre las tasas de crecimiento de los stocks de capital. Ahora bien, un cambio exógeno en las dotaciones de los factores incidirá, en general, sobre la pendiente del rayo que relaciona ambos stocks o lo que es lo mismo, sobre su proporción, afectando a su vez el valor del output per cápita o por unidad de capital. En otras palabras, un cambio en la dotación inicial no solamente afecta al punto de partida de la dinámica de la transición, sino al valor del ratio hacia el que se converge asintóticamente. Sobre este último aspecto volverán trabajos posteriores, como veremos a lo largo del capítulo.

Otra característica esencial del modelo es la ausencia de convergencia, entendida esta última en varias dimensiones. Por una parte, en la medida en que las tasas de crecimiento de capital físico y humano no están relacionadas con las dotaciones iniciales de ambos factores, a largo plazo dos economías que partan de valores diferentes de ambos stocks seguirán mostrando diferencias de nivel entre los mismos y, consecuentemente, discrepancias en sus niveles relativos de output per cápita o por unidad de capital físico. Pero la falta de convergencia se extiende también a los salarios reales. Si, tanto con como sin efectos externos, el crecimiento de los salarios reales es proporcional al del capital humano y no se opera convergencia alguna en este, tampoco convergerán los primeros.

Dinámica y ampliaciones inmediatas del modelo de Uzawa-Lucas. La aportación de Lucas fue crucial dentro del enfoque de equilibrio general y generó una corriente de trabajos en los años posteriores dirigida a ampliar el análisis en distintas direcciones y a introducir diversas variantes formales. La mayor parte de estos trabajos combinan variaciones en la estructura formal del modelo con una atención especial a los condicionantes de la dinámica de transición del modelo hacia el equilibrio estacionario, así como las propiedades de estabilidad del mismo, tanto locales (en el entorno del propio equilibrio estacionario) como globales. Dentro de este espectro de temas, ha cobrado particular interés durante los últimos años el análisis de las condiciones que darían lugar a la aparición de indeterminaciones (o pluralidad de sendas de convergencia hacia el equilibrio estacionario) en los modelos de crecimiento de capital humano directamente inspirados en la línea de Uzawa-Lucas.

Aunque esta línea de investigación es solamente colateral al objetivo de este capítulo y no puede ser objeto de un estudio demasiado pormenorizado, tampoco puede obviarse, al revestir gran importancia por varios motivos. Primero, por restringir el conjunto de configuraciones del modelo que pueden dar lugar tanto a un crecimiento continuado en el largo plazo como a una solución analíticamente tratable. Segundo, por iluminar el papel de las expectativas en la dinámica de transición, tanto localmente (en el entorno de la senda de estado estacionario) como globalmente, en cualquier otro punto que soluciona el sistema de condiciones de primer orden de equilibrio general. De esta manera, cuando se concluye la existencia de indeterminación, dos economías con iguales tecnologías y preferencias, así como los mismos valores iniciales de las variables de estado, pueden encontrarse en un período de tiempo en puntos completamente distintos si las expectativas de los agentes sobre las variables relevantes difieren.

Así, si el sistema es localmente indeterminado y las variables de estado iniciales se encuentran muy próximas a sus valores estacionarios, existirá un continuo de sendas a lo largo de las cuales se convergirá hacia el estado estacionario; sobre cuál se sitúe la economía dependerá del valor de las expectativas. No obstante, las variables esperadas no tienen por qué encontrarse en el entorno del estado estacionario, razón por la cual el análisis de la determinación global del modelo es también clave. Este último concepto ha sido utilizado con varias acepciones en la literatura. Para algunos autores, habrá indeterminación global cuando, dados unos valores iniciales de las variables de estado, el sistema presenta un conjunto de posibles trayectorias fuera del entorno de un posible equilibrio estacionario. Esta situación ocurriría, por ejemplo, cuando hay un ciclo estable alrededor del estado estacionario. Por tanto, se trata de una definición que puede ser válida incluso cuando existe un único estado estacionario. Otros autores entienden por indeterminación global aquella situación dada por la identificación de más de un estado estacionario en la economía, de forma que, a idénticos valores iniciales de las variables de estado, la economía puede transitar a largo plazo hacia sendas de equilibrio muy diferentes en función de sus expectativas iniciales. Finalmente, estas definiciones admiten una extensión directa mediante la noción de convergencia del sistema a largo plazo hacia conjuntos de puntos ω , no necesariamente identificables con un estado estacionario o un ciclo en torno al mismo. De este modo, dos economías cuyas variables de estado presentan los mismos valores iniciales pueden gravitar a largo plazo hacia diferentes conjuntos de puntos o incluso pueden presentar un diferente comportamiento a largo plazo si existe uno solo de estos conjuntos ω , pero caracterizado por poseer un atractor caótico.

La ampliación más inmediata del modelo de Lucas es la propuesta por **King y Rebelo (1988) y Rebelo (1991)**. Ambos trabajos intentan buscar una estructura más amplia de modelización, que englobe como caso particular al de Uzawa-Lucas y lograr a su vez una caracterización general de este conjunto de modelos, tanto en cuanto a las condiciones necesarias para la emergencia de crecimiento endógeno como acerca de sus rasgos dinámicos esenciales. La extensión natural del modelo de Lucas parte del mismo marco institucional: una economía doméstica representativa que al mismo tiempo es responsable de todas las decisiones de producción, incluyendo las relativas al bien final, por lo que los salarios percibidos por el agente no aparecen en la restricción presupuestaria flujo del mismo (se consolidan como ingreso de aquel y gasto de la empresa). Por otro lado, se rescata la simetría entre los sectores productores de bien final y capital humano, esto es, dando cabida también al capital físico en la función de producción de este último, así como prescindiendo de los efectos externos por ser este un elemento ajeno a la línea tradicional de modelización de crecimiento dentro del paradigma neoclásico. Las tecnologías de que parten, sin efectos externos, son las siguientes:

$$Y_s = A\left(n_s^{K,Y} K_s\right)^{\alpha_k}\left(n_s^{w} a_s^{h}\right)^{1-\alpha_k} \quad (3.15)$$

$$a_{s+1}^{h} = B\left(n_s^{K,H} K_s\right)^{\beta_k}\left(n_s^{h} a_s^{h}\right)^{1-\beta_k} + \left(1-\delta^{h}\right)a_s^{h} \quad (3.16)$$

En definitiva, se distinguen dos fracciones del capital físico total que verifican $1 = n_s^{K,Y} + n_s^{K,H}$ y que son indicativos del uso del capital físico en cada uno de los procesos tecnológicos operativos en la economía. Respecto a la asignación de tiempo, se introduce el tiempo de ocio, aunque en la versión básica del modelo este tiene un carácter exógeno. De esta manera el tiempo se asigna conforme a la restricción $1 = \overline{n}_s^c + n_s^w + n_s^h$. La obtención de una sola de las variables de control, tiempo de trabajo o tiempo de ocio, permitirá despejar automáticamente la otra, teniendo en cuenta la exogeneidad del ocio.

Los rendimientos del conjunto de los inputs privados en ambas funciones son constantes a escala. Para garantizar una solución cerrada, se toma funciones Cobb-Douglas y tasas de depreciación comunes para los dos tipos de capital, si bien puede demostrarse también que los resultados esenciales del modelo se mantienen con cualquier tipo de funciones neoclásicas con propiedades estándar y productividades marginales cruzadas positivas, así como tasas de depreciación diferentes para los activos reales. Las condiciones de primer orden son muy similares a las derivadas en Uzawa-Lucas. En este sentido, el agente adopta dos tipos de decisiones: una, estática, relativa a la asignación de sus posiciones en capital físico y capital humano entre sectores productivos, de modo que el valor sombra de la productividad marginal anotada por estos factores en cada uno de los sectores deberá igualarse. Otra, de tipo dinámico, que recoge la regla de inversión óptima entre capital físico y humano y que viene representada por la igualdad entre las tasas de retorno de ambos activos[74].

En equilibrio estacionario y tal como sucedía en la versión más restringida de Uzawa-Lucas, los valores del consumo, los dos stocks de capital y la inversión en capital físico crecen todos a la misma tasa y para obtener este resultado la homogeneidad de grado 1 de la función F es crítica. A causa de la condición de vaciado del mercado de bienes, la tasa de crecimiento del output debe ser la misma tanto si se calcula desde el punto de vista de la oferta como de la demanda. Desde la oferta, la producción del bien final crecerá a una tasa dada por el capital humano. Por la demanda, la tasa de crecimiento del consumo, que dependerá de la relación entre el factor de preferencia intertemporal, el tipo de interés y la elasticidad de sustitución intertemporal, debe condicionar directamente la de la producción para verse satisfecha al tipo de interés de equilibrio adecuado. Dicha

---

[74] Las tasas de retorno se expresan como productividad marginal instantánea de cada uno de los activos en el sector en que se producen, respectivamente, en unidades del bien de consumo. Ambas son desarrolladas completamente solo en equilibrio estacionario, lo que lleva consigo la ausencia de un tratamiento extensivo de las tasas de retorno en este trabajo.

tasa estacionaria de crecimiento del output depende de las productividades multifactoriales, de F y h, ya que ambas intervienen como factores explicativos del valor estacionario de las horas de aprendizaje. La tasa también dependerá negativamente del tiempo exógeno de ocio, por cuanto que reduce la fracción total de trabajo productivo (destinado bien a los servicios del trabajo en la tecnología del bien final o al aprendizaje); por tanto economías en las que los agentes trabajan más -en un sentido amplio del término- crecen más a largo plazo. Teniendo en cuenta estos resultados y dada la irreversibilidad tanto de capital físico como de capital humano, la tasa de crecimiento del output se define como la máxima de los siguientes valores: i) la tasa de crecimiento de cada uno de los componentes de la demanda agregada, esto es, la del capital humano, o bien ii) menos la tasa de depreciación en el caso de equilibrio esquina con crecimiento nulo de consumo y stock de capital, ya que la irreversibilidad impone un suelo a la inversión neta. Un sub-sistema de ecuaciones integrado por la igualdad entre las relaciones marginales de transformación entre sectores y la de las tasas de retorno permite obtener los ratios capital físico/ capital humano sectoriales en estado estacionario. Sustituyendo en la cpo de demanda óptima de capital físico por las empresas puede despejarse el tipo de interés estacionario, que está afectado por una media geométrica de las productividades totales de los factores en ambos sectores. Finalmente, el modelo presenta dinámica de transición hacia el equilibrio estacionario durante la cual, al igual que el modelo de Lucas, las tasas de crecimiento de los dos tipos de capital difieren.

En la versión ampliada del modelo, se endogeneiza la elección del ocio. Siguiendo a King, Plosser y Rebelo (1988) la función de utilidad empleada vuelve a presentar elasticidad de sustitución intertemporal constante, si bien para llegar a una solución cerrada esta elasticidad se toma unitaria, esto es, la función de utilidad es logarítmica y además separable-aditiva entre consumo y ocio. El tiempo de ocio, sin embargo, no está afectado por la eficiencia que le confiere el capital humano, a diferencia del tiempo aplicado a los otros dos procesos productivos. La consecuencia principal de retornar a un planteamiento en el que el ocio juega un papel asimétrico en el modelo es que de nuevo la tasa de crecimiento del output final quedará “contaminada” por el tiempo de ocio. En efecto, ahora el incremento marginal de productividad del tiempo que genera una unidad adicional de capital humano es diferente en la producción que en la utilidad (en esta última es nula), por lo que la elección del tiempo de aprendizaje volverá a quedar negativamente afectada por el tiempo de ocio y, en equilibrio estacionario, también lo estará la tasa de crecimiento del output.

Desde el punto de vista de cálculo de la solución estacionaria del modelo este tratamiento asimétrico también es también un inconveniente, ya que la proporción óptima capital físico/capital humano en cada sector quedará afectada igualmente por el tiempo de ocio y, derivadamente, lo hará el tipo de interés. El ocio, por su parte, dependerá de las preferencias relativas del individuo entre esta variable y el consumo. Preferencias y parámetros tecnológicos del modelo quedan, por tanto, totalmente trabados (por un conjunto más amplio de parámetros que la mera tasa de preferencia temporal β , que en cualquier caso forma parte de la tasa de acumulación de capital humano incluso aunque el consumo sea el único argumento de las preferencias) sin que ningún bloque pueda resolverse recursivamente, lo que complica la caracterización de las propiedades del equilibrio estacionario, así como la obtención de resultados en numerosos ejercicios de dinámica comparativa, que exigen la utilización de técnicas de cálculo numérico.

Mulligan y Sala-i-Martí (1993) realizan un análisis de la dinámica de transición en los modelos de crecimiento bisectoriales con capital humano, construidos como una generalización de las tecnologías empleadas por Uzawa-Lucas. Este paso es importante, en la medida en que permite conciliar las dos dimensiones del modelo, tanto desde la perspectiva de ciclos a corto plazo como representación de un equilibrio al que converge a más largo plazo la economía. El trabajo tiene dos dimensiones: por una parte, se despliega una metodología para la derivación de las sendas de transición hacia el estado estacionario y, por otra, se realizan ejercicios de simulación para ilustrar la evolución de las endógenas a lo largo de las mismas, dada la imposibilidad de obtener soluciones cerradas sin introducir restricciones paramétricas. El estudio se articula en torno a un modelo[75] que intenta generalizar el de Uzawa-Lucas, con externalidades simétricas en los dos sectores productivos y que de hecho anida este último como una combinación de parámetros particular. Las funciones de producción consideradas son las siguientes:

$$Y_s = A\left[\left(n_s^{K,Y}\right)^{\alpha_{nk}}\left(K_s\right)^{\alpha_k}\right]\left[\left(n_s^{w}\right)^{\alpha_{nh}}\left(a_s^{h}\right)^{\alpha_h}\right]\left(K_s\right)_a^{\hat{\alpha}_k}\left(a_s^h\right)_a^{\hat{\alpha}_h};\alpha_{nk}=\alpha_k;\ \alpha_{nh}=\alpha_h;\ \alpha_k+\alpha_h=1 \ (3.17)$$

$$a_{s+1}^h = B\left[\left(n_s^{K,h}\right)^{\beta_{nk}}\left(K_s\right)^{\beta_k}\right]\left[\left(n_s^{h}\right)^{\beta_{nh}}\left(a_s^{h}\right)^{\beta_h}\right]\left(K_s\right)_a^{\hat{\beta}_k}\left(a_s^h\right)_a^{\hat{\beta}_h};\ \beta_{nk}=\beta_k;\beta_{nh}=\beta_h;\beta_k+\beta_h=1 \ (3.18)$$

La restricción paramétrica efectuada implica que los rendimientos a escala de los factores privados son constantes, mientras que la presencia de externalidades puede provocar que los rendimientos en el conjunto de los factores sean crecientes. Obsérvese que el modelo de Uzawa-Lucas correspondería al caso en el que se verifican las siguientes restricciones paramétricas:

$$\hat{\alpha}_h=\beta_k=\hat{\beta}_k=\hat{\beta}_h=0;\ \mathrm{n}_s^{K,Y}=1;\ \beta_h=1 \ (3.19)$$

[75] En cualquier caso la función de utilidad empleada es de elasticidad de sustitución intertemporal constante en el consumo ($1/\sigma$), como en Lucas (1988).

También dependiendo de las combinaciones paramétricas escogidas, la frontera de posibilidades de producción de bien final y capital humano será diferente. Cuando no hay efectos externos, los rendimientos en el conjunto de los factores son constantes y las tecnologías son idénticas, entonces la frontera de posibilidades de producción será lineal. En concreto las condiciones exigidas serán:

$$\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_h = \hat{\beta}_k = \hat{\beta}_h = 0 \ (3.20)$$
$$\alpha_{nk} = \alpha_k; \ \alpha_{nh} = \alpha_h; \ \beta_{nk} = \beta_k; \ \beta_{nh} = \beta_h \ (3.21)$$
$$\beta_k = \alpha_k; \ \alpha_k + \alpha_h = 1; \ \beta_k + \beta_h = 1 \Rightarrow \alpha_k + \alpha_h \ (3.22)$$

Cuando las dos tecnologías presentan rendimientos constantes a escala pero son diferentes entre sí y tienen externalidades, entonces la frontera de posibilidades de producción será cóncava. Cuando hay rendimientos decrecientes, dicha frontera también será cóncava. El modelo admite una expresión dinámica en forma espacio estado a partir de 4 variables, dos de estado y dos de control. En efecto:

$$n_{s+1}^{w} = \kappa_1\left(n_s^{w}, q_s, z_s^1, z_s^2\right)(3.23)$$
$$q_{s+1} = \kappa_2\left(n_s^{w}, q_s, z_s^1, z_s^2\right) \ (3.24)$$
$$z_{s+1}^1 = \kappa_3\left(n_s^{w}, q_s, z_s^1, z_s^2\right) \ (3.25)$$
$$z_{s+1}^2 = \kappa_4\left(n_s^{w}, q_s, z_s^1, z_s^2\right) \ (3.26)$$
$$q_s = \frac{C_s}{K_s} \ (3.27)$$
$$z_s^1 = K_s\left(a_s^h\right)^{\frac{\tilde{\alpha}_h}{\tilde{\alpha}_k - 1}}; \ \tilde{\alpha}_h = \alpha_h + \hat{\alpha}_h; \ \tilde{\alpha}_k = \alpha_k + \hat{\alpha}_k \ (3.28)$$
$$z_s^2 = K_s\left(a_s^h\right)^{\frac{\tilde{\beta}_h - 1}{\tilde{\beta}_k}}; \ \tilde{\beta}_h = \beta_h + \hat{\beta}_h; \ \tilde{\beta}_k = \beta_k + \hat{\beta}_k \ (3.29)$$

Sin más que imponer la condición de que los niveles de las 4 variables se igualen a cero en el sistema de ecuaciones anterior puede hallarse la solución de equilibrio estacionario. Mulligan y Sala-i-Martí no entran en la discusión de las condiciones de unicidad del equilibrio, sino que se centran en el algoritmo de resolución del modelo, la obtención de la senda estacionaria y las características de la transición dependiendo del tipo de rendimientos elegidos; antes bien, del problema de la unicidad se encargarán otros trabajos cronológicamente posteriores a los que se hará referencia a continuación. Puesto que la tasa de crecimiento de las 4 variables a las que se reduce el sistema es nula y tres de ellas son cocientes, en el equilibrio estacionario consumo y capital crecerán a la misma tasa, al igual que lo harán capital físico y capital humano (en un contexto, hay que recordar, de tamaño constante de la población). Será pues necesario determinar qué restricciones paramétricas hay que imponer al modelo para que obtener crecimiento endógeno estacionario, esto es, tasas de crecimiento positivas y constantes para consumo y los dos stocks de capital. A partir de las ecuaciones de movimiento del sistema, las condiciones para la consecución de crecimiento estacionario se concretarán en:

$$\left(1-\tilde{\alpha}_k\right)\left(1-\tilde{\beta}_h\right)=\tilde{\alpha}_h\tilde{\beta}_k \quad (3.30)$$

La anterior condición implica restricciones efectivas sobre las tecnologías de producción. Por ejemplo, si existen rendimientos sociales constantes en el capital dentro de F, o bien la tecnología del bien final debe ser independiente del capital humano (es el típico caso de la función Ak) o la tecnología educativa independiente de capital. Lo mismo sucedería si los rendimientos sociales del capital humano en la tecnología educativa son constantes; de hecho si esta última fuera independiente del capital, con $\beta_h = 1$ y $\tilde{\beta}_h = 1$ volveríamos a estar en el caso de Uzawa-Lucas. En cualquier caso, la condición necesaria de crecimiento endógeno implica que $z_s^1 = z_s^2$, por lo cual el modelo admitirá una expresión espacio-estado en función solamente de 3 variables: n_s^w, q_s, z_s:

$$n_{s+1}^w = \kappa_1\left(n_s^w, q_s, z_s\right) \quad (3.31)$$

$$q_{s+1} = \kappa_2\left(n_s^w, q_s, z_s\right) \quad (3.32)$$

$$z_{s+1} = \kappa_3\left(n_s^w, q_s, z_s\right) \quad (3.33)$$

La determinación de la dinámica de transición se realiza mediante el método de eliminación del tiempo, discutido en Mulligan y Sala-i-Martí (1991). Esta metodología comporta, en primer lugar, el cálculo de los valores de las tres endógenas en equilibrio estacionario y la comprobación de que dichos valores satisfacen la condición de transversalidad. Después el sistema de ecuaciones en diferencias se transforma en uno de funciones de reacción (policy functions), del tipo $q(z)$ y $\mathrm{n}^w(z)$, que transforma, a lo largo de la senda de convergencia al equilibrio estacionario, valores de la variable estado en valores de las variables de control. Estas funciones de reacción se derivarán como resultado de un sistema de ecuaciones diferenciales en el que se conocerán sus pendientes, el punto inicial (esto es, el sistema de funciones de reacción evaluado en el equilibrio estacionario) y las pendientes evaluadas también en el equilibrio estacionario. Las pendientes de las funciones de reacción pueden derivarse a partir del sistema de ecuaciones en diferencias anterior, de modo que:

$$n^{w\,\prime}(z) = \xi_1\left(n^w, q, z\right) \quad (3.34)$$

$$q'(z) = \xi_2\left(n^w, q, z\right) \quad (3.35)$$

El punto inicial del sistema de funciones de reacción viene dado por la sustitución en las mismas de los valores estacionarios:

$n^w = n^w(z)$ (3.36)

$q = q(z)$ (3.37)

Finalmente será necesario calcular también las pendientes de las funciones de reacción en el entorno del equilibrio estacionario. El método más convencional es linearizar el sistema de las 3 ecuaciones en el entorno del equilibrio estacionario y estudiar los vectores propios de la correspondiente matriz jacobiana, ya que estos son tangentes a las sendas, tanto estables como inestables, en el entorno del equilibrio estacionario. A su vez los valores propios del jacobiano pueden utilizarse también para determinar la estabilidad local (2 valores propios positivos y 1 negativo garantizan estabilidad de punto de silla, 2 negativos y 1 positivo indican indeterminación local). Una vez que se dispone de todos estos elementos, es posible resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y obtener las funciones de reacción.

En el caso de Uzawa-Lucas, las pendientes de las dos funciones de reacción dependen de la relación entre el inverso de la relación marginal de sustitución intertemporal (σ) y α_k. En efecto, son 3 los efectos que gobiernan la convergencia de las 3 variables hacia el equiibrio estacionario. El primero, el llamado efecto Solow, en virtud del cual valores bajos de z (esto es, escasez relativa de capital físico) están asociados con una productividad marginal de la ratio de ambos capitales elevada. El segundo, el efecto alisamiento del consumo: a mayor elasticidad de sustitución (y menor σ), menor alisamiento ante una renta salarial baja presente y, por tanto, menor consumo y q. El tercero, el efecto salario relativo, de modo que salarios bajos (tanto más bajos cuando mayor sea α_k) implican un coste de oportunidad bajo del tiempo dedicado a aprendizaje, por lo que se desviará tiempo desde la producción de mercado hacia este segundo fin, arrastrando también al consumo. Así pues, cuando $\alpha_k = \sigma$ entonces el efecto alisado se compensa exactamente con el efecto salario relativo, de modo que las funciones de reacción son dos líneas horizontales y la convergencia entre z y su valor de equilibrio estacionario se lleva a cabo solamente por el efecto Solow. Cuando $\sigma > \alpha_k$, el efecto alisamiento predomina, de manera que valores bajos de z están asociados a valores elevados de q y n^w (hay poco alisamiento y el consumo es alto, arrastrando a la oferta de trabajo, que también será elevada y generará la convergencia a través de una mayor producción de bienes de capital y detracción de tiempo destinado a la producción de capital humano); en este caso además ambas funciones de reacción tendrán una pendiente negativa. Por último, cuando $\sigma < \alpha_k$, el efecto salarios relativos es el predominante, correspondiendo a valores bajos de z valores también reducidos de consumo y oferta de trabajo y siendo las pendientes de ambas funciones de reacción crecientes; la convergencia sería posible gracias a un elevado ahorro en este escenario. En cuanto a la relación entre output y z, esta presentará una forma de U, siendo tanto más probable que el valor estacionario de z esté a la izquierda del mínimo de la curva cuanto más bajo sea σ ; en otras palabras, para estos rangos el equilibrio estacionario estará situado en el tramo decreciente de la curva[76].

Fuera del caso específico de Uzawa-Lucas, pueden distinguirse varias situaciones. Cuando la frontera de posibilidades de producción es lineal, no existe dinámica de transición y se produce una convergencia inmediata desde las condiciones iniciales al equilibrio estacionario. Para obtener dinámica de transición la frontera de posibilidades de produccion deberá ser cóncava, bien a consecuencia de diferencias tecnológicas entre los dos sectores o de la existencia de rendimientos decrecientes en alguno de ellos. Cuando el capital físico está presente en ambas tecnologías, la función de reacción del tiempo de trabajo tiene siempre pendiente negativa, no importa lo elevado que sea σ . La razón es que, para un nivel de z bajo, la productividad marginal del capital físico en el sector productor de bien final es alta, por lo que los agentes trasladan esta clase de capital a aquel. Como consecuencia de este desplazamiento, se eleva también la productividad marginal del capital humano y este hecho acabará atrayendo finalmente esta segunda clase de capital a la tecnología F. La función de reacción de q, sin embargo, seguirá alterando el signo de su pendiente en de acuerdo con las mismas consideraciones comentadas antes. La relación entre la tasa de crecimiento del output y z seguirá teniendo forma de U, aunque ahora el mínimo de la curva se encontrará a la izquierda del nivel estacionario de z: el decrecimiento de la función de reacción del tiempo de trabajo hace más probable que, al converger z a la baja hacia el equilibrio estacionario el esfuerzo de trabajo siga aumentando y solo para valores muy elevados de σ este hecho será parcialmente compensado con una disminución del ahorro.

Al modelo de Mulligan y Sala-i-Martí sucedieron, principalmente durante la década siguiente, numerosos trabajos cuyo principal objetivo era la adición de sucesivas extensiones al esquema de Uzawa-Lucas, así como el estudio de su dinámica y, en particular, a la búsqueda de indeterminaciones que justificaran la intervención pública, bien para situar a la economía en una senda que la recondujera al estado estacionario tras un shock que

[76] Cuanto más alta la elasticidad de sustitución del consumo, tanto más probable que el predomine el efecto salarios relativos, por lo que si z es más alto que su valor estacionario la convergencia implicará un descenso del trabajo aplicado a F y del consumo.

la hubiera desplazado del mismo o incluso a fomentar la convergencia a aquel más favorable, cuando la propiedad de unicidad no se verificara. El Anexo 1 comenta en mayor detalle las principales contribuciones a esta literatura, de la cual aquí solo se comentan las conclusiones principales. **Benhabib y Perli (1994)** demuestran la posible existencia de indeterminación local en el estado estacionario de Lucas, si bien para valores de los parámetros poco plausibles: externalidades elevadas en la tecnología de producción del bien final y/o una elasticidad de sustitución intertemporal del consumo alta. Para demostrar la existencia de indeterminación local para rangos de los parámetros más asumibles, proponen una variante del modelo de Lucas con ocio en la función de utilidad, elasticidad unitaria en consumo dentro de la misma (lo que evita recurrir a valores muy reducidos de σ), externalidades de conocimiento y tiempo de aprendizaje en la tecnología educativa y rendimientos privados constantes en esta última, así como sociales también constantes del input capital humano. En esta última versión del modelo, valores bajos de las externalidades de tiempo de aprendizaje garantizan una única senda estacionaria con estabilidad local, mientras que valores altos, generan inestabilidad global, con dos estados estacionarios a los que se converge en función de las condiciones iniciales. Respecto a la estabilidad local, está tendrá mayores probabilidades de incumplirse cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución intertemporal del tiempo de ocio o mayores sean las externalidades del tiempo de aprendizaje en h. **Chamley (1994)** complementa la casuistica anterior con efectos externos sobre la acumulación de capital humano derivados de LBD en el tiempo de aprendizaje, que sustituyen a los restantes efectos externos considerados por Benhabib y Perli. Cuando dichos efectos externos son positivos, el modelo puede presentar más una senda estacionaria. Además, a mayor elasticidad de sustitución intertemporal del consumo y mayor dimensión de los efectos externos de LBD, medidos tanto por su propia productividad marginal como por la productividad marginal cruzada con el input privado, mayor probabilidad de que se produzcan indeterminaciones en el entorno de la senda estacionaria. **Xie (1994)**, en un trabajo más orientado a la explicitación de las sendas de transición y al estudio de la dinámica global obtiene, bajo ciertas condiciones parámetricas que permiten la derivación de las sendas, condiciones para la existencia de múltiples sendas de equilibrio general dada una dotación relativa inicial de capitales; en este caso, la convergencia entre países con diferentes dotaciones de partida es posible si se destina el suficiente tiempo al aprendizaje (o dicho de otro modo, si se consigue elevar lo suficiente la tasa de retorno del capital humano).

Otro nicho de la literatura es el de externalidades específicas sectoriales. **Mino (2000, 2003)** realiza el planteamiento más general en este área, con externalidades sectoriales tanto en la tecnología productora del bien final como en la educativa, con rendimientos sociales a escala en ambas. La única posibilidad de indeterminación local surge cuando la intensidad privada en capital físico del sector educativo es mayor a la del bien final. Al introducir un tercer sector productor de commodities e igualmente afectado por rendimientos sociales constantes a escala, aumentan las probabilidades de encontrar indeterminaciones locales y cuando, con los dos sectores iniciales, las preferencias incluyen ocio -separablemente-, pueden existir dos estados estacionarios, de alto y bajo crecimiento; cuando el último es indeterminado o inestable puede estar asociado a indeterminación global, tal que las sendas que convergen hacia el mismo adoptan una forma cíclica y nunca pueden alcanzarlo. **Gómez (2004)** se centra en un caso especial dentro de la especificación de Mino y sitúa externalidades específicas en la tecnología productiva del bien final, con rendimientos sociales constantes -si bien el resultado es robusto a la alteración de este último supuesto-. La senda de equilibrio general que se obtiene en la solución descentralizada es la misma a la del planificador benevolente -al afectar el efecto externo proporcionalmente al pay-off y al coste de inversión-, el estado estacionario del sistema único, con estabilidad local de punto de silla y convergencia global hacia el mismo. La ausencia de indeterminación local en el estado estacionario de Gómez queda acreditada incluso con rendimientos constantes privados en F por el trabajo de **Chakraborty y Gupta (2007)**. **Kawamoto (2008)** modifica el modelo de Gómez incluyendo un segundo efecto externo -de tipo status- en las preferencias del hogar representativo, cuya consecuencia es la creación de una cuña entre la tasa de retorno social y la privada, incluso manteniendo manteniendo los efectos externos específicos a la tecnología del bien final.

Garcia-Belenguer (2007) puede considerarse otro caso especial de efectos externos sectoriales, en la medida en que refuerza los efectos externos de Lucas con otros generados por el capital físico/horas trabajadas en el sector del bien final, aunque solamente este último utiliza el capital físico. En un marco de intervención pública con impuestos sobre la renta y subvenciones, así como rendimientos decrecientes en el tiempo de aprendizaje, esta combinación puede generar indeterminación local y una pluralidad de sendas estacionarias (con trampa de pobreza incluida en la de la bajo crecimiento, que puede ser inestable) sin forzar tanto como trabajos precedentes el valor de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (a pesar de que esta tiene que ser mayor que 1). El trabajo anterior fue trascendente y originó diversas propuestas con variantes. Por un lado, **Brito y Vendetti (2010)** retoman la idea de efectos externos originados por el capital en unidades de trabajo eficiencia, solo que las extienden a ambos sectores en términos medios para toda la economía. De este modo, se logran combinar efectos externos con rendimientos constantes a escala sociales en las dos tecnologías, supuesto más consistente con la evidencia empírica. La existencia de dos estados estacionarios es posible con mayor intensidad relativa en capital físico en cualquiera de los dos sectores, aunque recurriendo a condiciones paramétricas distintas en cada caso. En cuanto a la dinámica global, la principal novedad del modelo estriba en que se puede converger hacia el estado de bajo crecimiento para cualquier valor positivo de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, siempre que la intensidad en capital físico sea superior en el sector educativo. Por lo demás, cuando hay dos equilibrios hay ciertos casos en los que se registra indeterminación global y las condiciones iniciales dictan hacia cuál de ellos se converge. **Antocci et. al. (2012)** muestran la riqueza de la gama de indeterminaciones globales a que puede dar lugar el modelo de Brito y Vendetti en varios casos notables, coexistiendo en algunos de ellos una indefinición en la senda estacionaria hacia la que se converge con una multiplicidad de sendas en torno a la misma, cuando esta constituye un repulsor.

Otra gama de modelos desarrolla exclusivamente **externalidades en ocio y consumo**. Uno de los ejemplos más notables es **Gómez (2007)**, con una dinámica que puede conducir a más un estado estacionario tanto en la solución descentralizada como en la del planificador social. En la primera de ellas, se encuentra que las externalidades del ocio no influyen en el estado estacionario, mientras que la magnitud de las externalidades en consumo genera un efecto sobre la tasa de crecimiento de un signo que depende de si la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo es superior o inferior a la unidad. En el óptimo social, sin embargo, las externalidades del ocio son internalizadas en las cpo y la relación entre externalidad del consumo y tasa de crecimiento estacionaria se hace más compleja. Comparando por otra parte ambas asignaciones estacionarias -en el supuesto de que sean únicas-, si la externalidad del ocio y el consumo coinciden la solución descentralizada replicará el óptimo social, pero si la primera es inferior a la segunda la tasa de crecimiento descentralizada será inferior a la óptima social. **Azariadis, Chen, Lu y Wang (2013)** introducen dos cambios en el modelo de Gómez: suprimen las externalidades en consumo -manteniendo las del ocio- e introducen capital en la función de educación, para dotar de suficiente concavidad al programa. La unicidad de la senda estacionaria tampoco está garantizada, como en Gómez, aunque las externalidades en ocio afectan a la RMS de este bien respecto al consumo, por lo que su elasticidad, así como su interacción con la elasticidad de sustitución intertemporal del ocio, incide sobre la tasa de crecimiento estacionario en el problema competitivo descentralizado, al contrario de lo obtenido por Gómez, debido a la diferente estructura de las preferencias.

Un desarrollo de interés es también el de **Chakraborty y Gupta (2006),** que introducen en el modelo de Lucas el capital humano en la función de utilidad como bien de consumo duradero à la Grossman, conservando por lo demás su estructura intacta, incluido en lo que a los efectos externos en el sector del bien final se refiere. El modelo puede mostrar hasta dos estados estacionarios en este caso; si este último escenario es el que se produce, como sucedía en el análisis de Benhabib y Perli, externalidades significativas y/o una elevada elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo pueden generar indeterminación local. Asimismo con dos equilibrios el marco es de indeterminación global, siendo contingente a las condiciones iniciales la senda estacionaria hacia la que converge la economía.

Dentro de los autores que han intentando explicar la aparición de indeterminación local sin recurrir a efectos externos, destaca el trabajo de **Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1997)** obtienen la tipología de equilibrios estacionarios que aparecen en un modelo del tipo comentado antes de King, Plosser y Rebelo (1988), tanto con como sin ocio en la función de utilidad; sin embargo, y a diferencia de Benhabib y Perli, no se consideran efectos externos en ninguna de las tecnologías. Tanto en la versión de King y Plosser como cuando con ocio à la Becker, existe una única senda estacionaria y estabilidad global. Sin embargo, cuando el ocio no está aumentado por la eficiencia del trabajo, pueden existir varias sendas estacionarias, algunas de ellas inestables, y existe indeterminación global. Por otro lado, el análisis de la dinámica de transición permite realizar ejercicios de dinámica comparativa, comprobando los efectos sobre la tasa de crecimiento estacionaria de variaciones en las dotaciones relativas de los dos tipos de capital, delimitando en cada escenario qué variantes pueden dar lugar a la llamada "paradoja de Lucas", esto es, incrementos de capital físico que propician tasas de acumulación de capital humano inferiores y por tanto crecimientos estacionarios menores. **Los mismos autores (1999)** introducen costes de ajuste convexos en el capital físico utilizado en el sector productor del bien final, manteniendo el ocio en la función de utilidad sin cualificar por el capital humano, llegando a conclusiones similares en cuanto al número de sendas estacionarias y la dinámica global del modelo. **Mino (2002)** proporciona otro ejemplo de indeterminación sin necesidad de incluir externalidades en capital humano, mediante la no separabilidad de ocio -sin cualificar por el capital humano- y consumo en las preferencias. En este contexto, puede existir más de una senda estacionaria y cuando es única, presenta indeterminación local o inestabilidad total. Cuando el ocio se cualifica por el capital humano, sin embargo, desaparece la multiplicidad de sendas estacionarias y la indeterminación. Otros autores reemplazan los efectos externos por parámetros fiscales como potenciales generadores de indeterminaciones: ejemplos notables son los trabajos de **Bond et al. (1996) y Alonso-Carrera y Freire-Serén (2004).**

III. 2. Modelos de generaciones solapadas.

En el apartado sobre equilibrio parcial se hizo una breve referencia al despegue de la introducción de capital humano en la modelización de generaciones solapadas, cuya eclosión tuvo lugar a finales de los 60. El principal objetivo de estos modelos era la investigación de los orígenes de la desigualdad en renta en individuos y, en particular, verificar qué papel pueden jugar los legados intergeneracionales de capital humano y otros activos financieros en la explicación de las diferencias observadas de renta laboral en un momento determinado del tiempo, frente a las diferencias en las dotaciones biológicas de los individuos o los factores puramente aleatorios. En este sentido, el prinicipal mensaje de esta literatura es que no solo la renta de los progenitores determina el nivel de capital humano de su descendencia, sino el grado de altruismo de sus preferencias, así como sus posibilidades de endeudamiento, confluyen para explicar las diferencias en las posiciones en capital humano de los individuos al comienzo de su vida laboral.

Sin embargo, el problema del crecimiento está fuera del foco de la mayor parte de estos modelos: de hecho en la mayor parte de ellos la población que fallece y nace en cada período es la misma, por lo que el tamaño de aquella permanece estacionario y se renuncia a esta fuente de crecimiento exógeno del modelo, para evitar complicaciones analíticas innecesarias y prestar más atención a la explicación de los aspectos puramente distributivos sobre la base de decisiones racionales y óptimas de cada cohorte.

Un bloque de modelos que podrían denominarse de segunda generación, que comienzan a desarrollarse desde finales de los años 80, conjugan un interés por los temas distributivos con el fenómeno del crecimiento, tras la aparición durante la segunda mitad de los años 80 de algunos de los trabajos pioneros más importantes de crecimiento endógeno. Esta nueva literatura presenta algunas características atractivas: primero, revela una relación directa entre determinados instrumentos de política económica (o en este contexto educativa, más concretamente) y la tasa de crecimiento de equilibrio de las principales variables macroeconómicas; segundo, en la medida en que ponen de manifiesto efectos externos en las decisiones descentralizadas de capital humano de los individuos, convierten tales instrumentos, puramente redistributivos en su concepción original, en herramientas para garantizar que la solución óptima descentralizada coincida con el óptimo social del planificador; este sería el caso de los subsidios educativos en el modelo clásico de Lucas de 1988. En este sentido, los modelos de generaciones solapadas se convierten en marcos analíticos con mayores posibilidades que los de agente representativo para estudiar más adecuadamente vías de armonización de los objetivos de igualdad de oportunidades y eficiencia económica.

Por otro lado, las transferencias intergeneracionales (bien sean promovidas por el gobierno, o bien legados voluntarios realizados por los progenitores) cumplen otro papel no menos importante que los instrumentos redistributivos en un marco de generaciones solapadas. En efecto, tal y como señalan Jones y Manuelli (1992), en un modelo convencional de este tipo en ausencia de transferencias no se genera crecimiento sostenido, al crecer los salarios entre períodos a una tasa inferior al stock de capital, de modo que este, incluso aunque pueda ser transferido sin ninguna fricción, no puede ser íntegramente absorbido a lo largo del tiempo. Esto a diferencia de los modelos de horizonte infinito, donde es bien sabido que determinadas estructuras tecnológicas de la función de producción y/o de acumulación de ciertos factores productivos pueden generar crecimiento estacionario indefinido incluso en ausencia de crecimiento de la población. Las transferencias intergeneracionales dirigidas a mejorar por una vía u otra la dotación de capital humano de la descendencia encajan, pues, perfectamente, como complemento a una estructura temporal de generaciones solapadas que posibilita que exista un crecimiento indefinido en aquella.

Realizaremos a continuación un recorrido por las principales líneas de investigación dentro del marco de generaciones solapadas que integran en la cartera de activos reales el capital humano.

Los modelos pioneros: conciliando crecimiento endógeno y OLG. Jones y Manuelli (1992) presentan un estudio sobre las condiciones en que el crecimiento a largo plazo es posible en un horizonte finito de generaciones solapadas; si bien solamente el capital físico está presente en el modelo, es posible derivar algunas conclusiones que afectan directamente a la modelización del capital humano en este contexto. El modelo tiene una estructura muy básica y sigue en su planteamiento, simplificadamente, a Samuelson (1958) y Diamond (1965), con dos períodos en los que los individuos trabajan en ambos y perciben las rentas de su ahorro en el segundo de ellos. Si los subíndices denotan el período de realización del consumo y los superíndices la generación que lleva a cabo esta actividad, el modelo queda recogido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\max_{C_s^s, C_{s+1}^s} U\left(C_s^s, C_{s+1}^s\right) \\ &s.a: \\ &C_s^s + S_s^s \leq w_s; \\ &C_{s+1}^s \leq \left(1+r_s\right) S_s^s + w_{s+1}; \\ &C_s^s, C_{s+1}^s > 0 \ (3.38) \end{aligned}$$

Se supone también que la tecnología productiva del único bien de tal economía es convexa y aun así cumple las propiedades identificadas en Jones y Manuelli (1990) para generar crecimiento a largo plazo[77]. Adicionalmente, la oferta laboral es inelástica y por tanto en cada período todas las cohortes que conviven dedican su dotación completa de tiempo a trabajar.

En estas condiciones es posible demostrar que para tamaños suficientemente elevados de K, la secuencia $\left(K_{s+1}/K_s\right)<1$[78], lo que excluye la posibilidad de crecimiento a largo plazo[79]. Esto sucede porque los salarios, en términos de capital físico, convergen a cero, al crecer a una tasa menos rápida que este segundo. Este hecho, unido a que el precio del capital físico en términos del bien de consumo no disminuye -es siempre la unidad-, imposibilita que las rentas del trabajo de las sucesivas cohortes sean suficientes para adquirir todo el stock de capital que van dejando los viejos al morir. Podría alegarse que, desde la perspectiva del individuo, la demanda de capital físico no está necesariamente acotada, sino que puede incrementarse por encima del salario real a través de una posición deudora en crédito. Sin embargo, la estructura del modelo, con dos períodos de vida, hace que el crédito solo pueda contraerse entre miembros de una misma generación en la juventud, por lo que agregadamente el límite a la adquisición de capital tiene una cota que es el crecimiento de la renta de una cohorte, sensible al argumento que se expuso en este

[77] Para el caso más sencillo de oferta de trabajo inelástica, que es el abordado en el artículo: $F(K)=bk+g(k);\ \beta(b+1-\delta)>1$

[78] Por la homogeneidad de grado 1 de la función de producción, la ley de Euler establece que $F\left(1,\frac{n}{K}\right)=F_K\left(1,\frac{n}{K}\right)+nF_n\left(1,\frac{n}{K}\right)\frac{1}{K}$. Tomando límites, se observa que $F(1,0)=F_k(1,0)$, ya que la ratio de salario real y el stock de capita convergen a cero cuando $K\rightarrow\infty$. Teniendo en cuenta que por la restricción flujo del primer período se verifica que $\frac{K_{s+1}}{K_s}\leq\frac{w_s}{K_s}$, se sigue que el primer componente de la anterior desigualdad no converge hacia una tasa bruta de crecimiento del activo superior a la unidad, sino hacia cero.

[79] Boldrin (1992) llega a idéntica conclusión en un modelo muy similar a este.

mismo párrafo. Si se permite que el capital físico[80] se legue entre generaciones sin coste alguno, de modo que una cohorte nueva pueda recibir el valor depreciado del capital acumulado por la cohorte antigua, el valor total de las rentas recibidas por los jóvenes sería $w_s + (1-\delta)K_s$ al principio de su primer período de vida y antes de utilizar el capital en la producción de bienes. Realizando análogo razonamiento, se tendría que en el límite la ratio (K_{s+1}/K_s) converge a $1-\delta$, valor que en el caso más favorable, con una tasa de depreciación nula, sería igual a la unidad, pero resultaría igualmente incompatible con el crecimiento a largo plazo.

Existen varios procedimientos para restaurar el crecimiento a largo plazo en este marco. El primero, permitir la existencia de legados y altruismo intergeneracional, como en Barro (1974) y Lucas y Stokey (1984), lo que permite reconducir el modelo hacia uno de agente representativo y vida infinita en el que puede reaparecer el crecimiento endógeno bajo ciertas condiciones. La introducción de capital humano en estos modelos, sin embargo, aun siendo habitual en la literatura, no resuelve el problema cuando el altruismo intergeneracional es imperfecto, circunstancia muy frecuente. Otra posibilidad, adaptada al marco analítico de generaciones solapadas, es el uso por el gobierno de políticas redistributivas públicas basadas en impuestos y subvenciones que posibiliten la transferencia de recursos a los jóvenes para la adquisición del capital a los viejos o, alternativamente, contar con recursos suficientes para realizar su propia inversión si hubiera fricciones en la transmisibilidad de activos o una tasa de depreciación tal que su vida útil no excediera la vida biológica del agente que realizó la inversión.

Otra vía de solución sería la consideración de tecnologías productivas con no convexidades (por ejemplo, de rendimientos crecientes a escala) que eviten que la ratio salario real/capital físico tienda a cero a largo plazo; esta es la solución a que recurre la mayor parte de la literatura de OLG, especialmente durante la primera mitad de los años 90. Hay que puntualizar, no obstante, que el tratamiento de los rendimientos crecientes es muy heterogéneo en la literatura y cada línea de modelización da lugar a una problemática diferente. El crecimiento de los rendimientos se debe habitualmente a la presen-

---

[80] Al tratar la posibilidad de realizar legados, en puridad Jones y Manuelli aluden al capital humano y de hecho pasan a asociar K con el capital humano. El problema es que la utilización del valor de la herencia o dotación innata capital humano para comprar un stock presupone la posibilidad de intercambiar dicho activo en el mercado, propiedad que mayoritariamente es rechazada por la literatura. Por tanto se ha adaptado en el texto el argumento al caso del capital físico, por no desvirtuar su esencia y considerarse conceptualmente más correcto.

cia de efectos externos, pero estos pueden localizarse en ambas tecnologías o en solamente una, y pueden venir dados por uno o todos los inputs simultáneamente, así por los valores agregados o por los inputs específicos empleados por cada sector. El papel de las externalidades, no obstante, genera algunos trade-offs en los resultados de estos modelos que, aunque diversos en función de la forma que adopten, pueden resumirse en que, cuanto mayor sea su magnitud, tantas más probabilidades de generar crecimiento endógeno, aunque también de producir indeterminaciones locales o globales, con posible multiplicidad de la senda estacionaria (dado un vector de parámetros del sistema de equilibrio general).

Finalmente, en esta misma línea, la acumulación continuada de capital humano constituye un motor de crecimiento alternativo en modelos OLG, al lograr un efecto análogo a los anteriores canales a través del crecimiento de las rentas laborales totales. Esta vía no es sino un caso especial de introducción de no convexidades, al exigir rendimientos como mínimo constantes en el capital humano dentro de la función de aprendizaje (en muchas ocasiones la constancia de los rendimientos se extiende también al tiempo de trabajo, como se ha visto). Cuando se elige esta solución, la ecuación de reparto del producto de Euler, suponiendo un reparto del tiempo entre trabajo y aprendizaje, se transformaría en:

$$F\left(1,\frac{n^w a^h}{K}\right)=F_k+\frac{n^w a^h}{K}F_L;\ L=n^w a^h \quad (3.39)$$

Una función de acumulación de capital humano con rendimientos constantes implica que, en el límite, la ratio entre los dos tipos de capital es constante, como también lo es el tiempo de trabajo. Por otro lado, sabemos que la renta salarial, bajo maximización del beneficio, será igual a $ea^h n^w = F_L a^h n^w$. Utilizando el argumento anterior, se concluye que la ratio entre la ratio salarial y el stock de capital no converge a cero; es más, en el límite tanto el valor absoluto del stock de capita fisico como del consumo tenderán a inifinito. El argumento es aplicable también a aquellos casos en los que no existe capital físico y el capital humano tiene elasticidad unitaria en F, al expandirse indefinidamente la producción al mismo ritmo que este último activo.

Modelos de tecnología y fertilidad exógena. Dentro de la literatura de equilibrio general con OLG, podríamos distinguir una gran línea divisoria. A un lado de ella quedarían aquellos modelos en los que tanto la tecnología -habitualmente de producción del bien final, aunque ocasionalmente puede tratarse también de la tecnología educativa- como el número de miembros de cada familia permanece constante. La contribución por excelencia dentro de esta rama es la de **Azariadis y Drazen (1990)**, en la que se centrará la atención de este capítulo. Esta línea logra generar crecimiento autosostenido en un entorno OLG meramente introduciendo funciones de producción de capital humano no convexas, que dan lugar a la acumulación intergeneracional del activo a una tasa constante en estado estacionario. Dentro de este tipo de modelos, los más similares en planteamiento a los de agente representativo, la rama más importante se dirige a analizar cuestiones de tipo distributivo, así como las consecuencias sobre la movilidad intergeneracional de determinadas fricciones de mercado, como las restricciones de crédito o formas anómalas de la tecnología o las preferencias, y otra rama notable, relacionada con la anterior, estudia la eficacia relativa de distintos sistemas educativos en términos de crecimiento o de desigualdad social. Para no solapar contenidos, en este capítulo se abordará principalmente el trabajo reseñado, para tratar después las otras dos ramas dentro del capítulo temático sobre desigualdad y políticas educativas. Pero no pueden ovidarse otros dos grandes tipos de modelos que quedan al otro lado de la línea divisoria: los que añaden fertilidad endógena, que serán revisados más tarde y dentro de este mismo capítulo, así como los de que se basan en innovación tecnológica endógena, que serán tratados al final de este capítulo conjuntamente con los de agente representativo basados en la misma premisa, por compatir numerosos elementos y constituir una literatura más especializada y diferenciada del tronco principal.

Azariadis y Drazen (1990) realizan un trabajo clásico que, en muchos aspectos, puede considerarse el primer enlace entre la literatura de crecimiento endógeno -y en particular, el artículo de Lucas de 1988- y los desarrollos posteriores en OLG. Estos autores trasladan la esencia del modelo de este autor a un marco de generaciones solapadas, en el que no hay vínculos explícitos intergeneracionales en forma de legados, salvo el stock de capital humano, que se acumula entre generaciones por el mero contacto entre padres e hijos. Siguiendo el esquema dinámico de Diamond, los individuos viven dos períodos, de forma que las actividades de consumo, que se realizan durante ambos, proporcionan satisfacción conforme a una función de utilidad genérica $U\left(C_s^s, C_{s+1}^s\right)$. En el primer período se divide el tiempo disponible entre trabajo y acumulación de capital humano, mientras que en el segundo se dedica inelásticamente la totalidad del tiempo a la producción de bien compuesto. Suponiendo además que el stock de capital físico, que comparte la misma naturaleza del bien de consumo, es propiedad de los hogares y suponiendo, por mor de una mayor simplicidad, tasas de depreciación nulas para el capital físico y el capital humano, el problema de optimización tomará la siguiente forma[81]:

$$\max_{\{C_s^s, C_s^{s+1}, K_{s+1}, a_{s+1}^h\}} U\left(C_s^s, C_{s+1}^s\right)$$
$$s.a: C_s^s + K_{s+1} \leq e_s a_s^h n_s^w + \rho_s K_s;$$
$$C_{s+1}^s \leq e_{s+1} a_{s+1}^h + \rho_{s+1} K_{s+1};$$
$$1 = n_s^w + n_s^h$$
$$1 = n_{s+1}^w \quad (3.40)$$

La función de acumulación de capital humano es una de tipo genérico, que engloba la de Lucas de 1988 como caso particular y la función de producción, de rendimientos constantes a escala en los inputs privados, puede reexpresarse en función del capital en unidades de trabajo-eficiencia, tal que $k_s = K_s / a_s^h n_s^w$. Así:

$$a_{s+1}^h = a_s^h G\left(n_s^h, a_s^h\right) (3.41)$$
$$Y_s = A_s F\left(K_s, a_s^h n_s^h\right) (3.42)$$
$$A_s = A\left(\left(K_s\right)_a, \left(a_s^h\right)_a\right) (3.43)$$

Este sistema de ecuaciones es susceptible de algunos comentarios. Comenzando por la primera ecuación, G deberá ser en cualquier caso débilmente creciente y cóncava en el tiempo de aprendizaje. Por lo demás, esta función puede albergar especificaciones muy distintas. Así, sin más que hacer $G = 1 + Bn_s^h$ se tendría la versión de la función de acumulación de Lucas, que da lugar a una tasa de crecimiento estacionaria neta en función de un único valor estacionario del tiempo aprendizaje; en otras palabras, una función con rendimientos privados constantes en capital humano. El stock de capital humano que forma parte de la función de aprendizaje, por referirse al primer período de vida de los individuos, debe entenderse como el stock de los viejos, que ejerce una aportación positiva a través del proceso educativo y dará lugar a un stock acrecentado, propiedad de los jóvenes y utilizable a partir del siguiente período. En el primer período la utilización por los jóvenes del stock de los viejos se entiende en clave de transmisión directa de conocimientos de unos a otros, sin que medie ningún otro factor productivo en este proceso. De este

[81] A su vez e y q representan el salario por hora trabajada y la tasa de alquiler del capital que, en equilibrio general, deben ser compatibles con el problema de optimización de beneficios de la empresa, que formulado en términos reales se corresponde, al igual que en el marco de representativo con:

$$\max_{\{K_s, n_s^w\}} A_s F\left(K_s, a_s^h n_s^w\right) - q_s K_s - e_s a_s^h n_s^w$$

modo, el nivel de capital humano será el mismo para todos los trabajadores vivos en un período, con independencia de la cohorte a la que pertenezcan. Esta consideración, unida al hecho de que el tamaño de la población permanece constante en un nivel N, propicia que la oferta de trabajo en todo período pueda agregarse y, medida en unidades de tiempo, venga dada por $n_s^w a_s^h + a_s^h$, correspondiendo el primer sumando a la oferta de los jóvenes y el segundo, a la de los mayores.

La segunda de las ecuaciones recoge una función de producción F homogénea de grado 1, por tanto con rendimientos constantes a escala en el conjunto de los inputs privados. En la última de las relaciones, la que endogeneiza A, se deja de manifiesto que la productividad total de los factores depende tanto de la relación capital/horas de trabajo como del propio capital humano, reflejando así el efecto externo de escala de Lucas que genera una cuña entre rendimiento privado y rendimiento social del capital humano. En este sentido, la dependencia de A respecto a los dos stocks de capital medios es más una vía de introducción de dichos efectos externos que una endogeneización de la tecnología en sentido estricto. Los inputs utilizados como argumentos de la productividad total de los factores son los "medios" de cada cohorte, lo que significa que en equilibrio descentralizado los agentes actuarán paramétricamente respecto a A, tomando como exógenos -y conocidos- sus determinantes. Otra cuestión añadida es que con esta formulación general de A no puede determinarse a priori los efectos de dichas externalidades sobre los rendimientos a escala de los inputs sociales en la función de producción. El equilibrio general se resuelve simplificando el conjunto de cpo a un sistema de dos ecuaciones: una iguala inversión -que se materializa en capital físico en s+1- y ahorro generado en s y la segunda es la condición de no arbitraje entre la tasa de retorno del capital físico y el capital humano; dicho sistema puede además particularizarse a la senda estacionaria para obtener los correspondientes valores de las dos variables a lo largo de ella.

Los autores discuten distintas especificaciones para la función G, dependiendo de las cuales se generan trayectorias de crecimiento de distintos tipos. Cuando G deriva en una estructura de aprendizaje similar a la de Uzawa-Lucas ($G = 1 + \Omega\left(n_s^h\right);\ \Omega' > 0;\ \Omega'' < 0$) y la productividad multifactorial es independiente de los inputs privados -esto es, no existen externalidades en el sector productor del bien final- existe una única senda de crecimiento estacionario cuando la función de utilidad es homotética y la elasticidad de sustitución entre factores productivos en F es mayor que la participación del capital en el output, siendo esta última una condición suficiente pero no necesaria. La razón es que, verificándose todas estas condiciones, la igualdad ahorro inversión se traducirá en una curva inequívocamente decreciente en el espacio $\left(k,n^h\right)$ [82]. Por su parte, la igualdad entre las tasas de retorno de los dos activos reales implica una curva necesariamente creciente bajo los supuestos realizados en este escenario, esto es, rendimientos sociales decrecientes en el capital físico y en el tiempo de aprendizaje: a mayor tiempo de aprendizaje menor retorno del mismo, que deberá verse acompañado de un menor retorno del capital físico, lo que implicará un aumento de su posición dada la concavidad de F.

La tecnología genérica G puede explicar también la aparición de trampas de pobreza cuando la función de aprendizaje presenta rendimientos crecientes en el capital humano, incluso cuando no hay externalidades en la producción del bien final y A se mantiene independiente con respecto al nivel aplicado de inputs privados. En concreto, la tecnología de producción de capital humano considerada por Azariadis y Drazen para generar este tipo de trayectoria es la siguiente:

$G\left(a_s^h,n_s^h\right)=1+\phi\left(a_s^h\right)n_s^h;\ \phi'>0$ (3.44)

Además se toman rendimientos crecientes susceptibles de dar lugar a un equilibrio estacionario acotado, esto es, debe verificarse $\lim_{a_s^h\to\infty}\phi\left(a_s^h\right)=\overline{\phi}$. Cabría interpretar una función de aprendizaje de este tipo en el sentido de que los incentivos a invertir tiempo en educación son tanto mayores cuanto mayor es el nivel previo de adiestramiento conseguido. En este segundo escenario el modelo genera dos tipos de estados estacionario, uno de subdesarrollo y el otro de crecimiento. El primero se caracteriza por una solución esquina en el tiempo de aprendizaje, de modo que: i) Al ser la tasa de retorno del capital

---

82 Para explicar este resultado es necesario tener en cuenta que, cuando los consumos de s y s+1 son normales en renta y sustitutos brutos, la función de ahorro es creciente en el tipo de interés y en la renta del primer período , mientras que será decreciente en la renta del segundo período. De esta manera, si se cumplen las condiciones enunciadas así como la condición suficiente relativa a la elasticidad de sustitución entre factores, se garantiza que un incremento de k produce simultáneamente un aumento de la inversión y del ahorro. El primero es obvio, mientras en el segundo intervienen dos consideraciones: un aumento de k reduce el tipo de interés, contrayendo el ahorro, mientras que eleva los salarios, impulsando las rentas de los dos períodos. Bajo las condiciones comentadas, el efecto neto será de una reducción del ahorro -ya que los salarios de equilibrio aumentarán en menor medida-, por lo que será necesario un menor tiempo de aprendizaje para volverlo a equilibrar con la inversión: en efecto, este aumentará el tiempo de aprendizaje en el primer período, facilitando la consecución de una mayor renta en este, mientras que empeorará la renta en el segundo, logrando así la variación deseada en el ahorro.

humano independiente del tiempo de aprendizaje (a diferencia de lo que sucedía en el caso estándar anterior con un solo equilibrio estacionario), es posible encontrar valores del stock de capital físico por unidad de capital humano k tal que genere una tasa de retorno del primero de estos activos reales estrictamente superior a la segunda. ii) Cumpliéndose, de nuevo, la homoteticidad en la función de utilidad, así como la normalidad de los dos consumos y manteniéndose su condición de sustitutivos brutos, la igualdad ex ante entre ahorro e inversión presenta también una solución positiva en k para el mencionado equilibrio esquina en n^h. La condición suficiente para que este valor de k, despejado de ii), constituya un equilibrio estacionario, es que verifique también i), o equivalentemente, que cumpla $\hat{\phi} = f'(k) > \phi$, circunstancia que daría lugar a la desigualdad entre las tasas de retorno de los activos reales. Por otra parte, este equilibrio de “trampa de desarrollo” , aun siendo localmente estable, presenta indeterminación local, en el sentido de que existe un continuo de equilibrios generales dinámicos en el entorno de k que convergen monotónica y asintóticamente hacia dicho estado estacionario[83].

El modelo puede dar lugar también a un segundo estado estacionario asintótico con crecimiento, esto es, a una solución interior en el tiempo de aprendizaje estacionario. En este caso, la tasa de crecimiento de las endógenas del sistema, teniendo en cuenta las propiedades asintóticas de ϕ , será $\bar{\phi} n^h$ y además la senda estacionaria presenta estabilidad local de punto silla. A diferencia del primero de los estados estacionarios analizados, se observará ahora una igualdad entre las dos tasas de retorno de los activos reales. Desde el punto de vista de la dinámica global del modelo, se tenderá a uno u otro estado estacionario dependiendo de los valores iniciales del stock de capital humano, lo que implica una forma de indeterminación local. Si inicialmente $\phi < \hat{\phi}$ y se converge al primer equilibrio, esta desigualdad se autoperpetuará a lo largo de toda la senda de equilibrio general dinámico. Si, por el contrario, se converge hacia el estado estacionario de crecimiento, ϕ crecerá progresivamente hasta alcanzar su cota asintótica en el mencionado estado.

---

[83] Es notable que los dos casos analizados de identificación de G dejan en una zona gris a la tecnología de Lucas. Como se demuestra en el capítulo 3 sobre tasas de retorno, cuando la función F es convexa y no existen otras externalidades en la tecnología educativa, es preciso respetar cierta condición paramétrica para evitar la emergencia de una trampa de pobreza en este entorno; sin embargo, la solución estacionaria bajo estas premiasas ser única, sea cual sea el nivel de tiempo de aprendizaje óptimo.

Es fundamental subrayar que este resultado de multiplicidad de sendas estacionarias puede producirse incluso aunque los rendimientos a escala intensamente crecientes; basta que la tasa de retorno del capital humano sea dependiente del propio stock acumulado. En términos de la segunda derivada de la tecnología educativa respecto al capital humano, esto significa que pueden presentarse varios estados estacionarios incluso preservándose su concavidad si $\phi'' < 0$:

$$\frac{\partial^2 a_{s+1}^h}{\partial\left(a_s^h\right)^2} = \phi'\left(a_s^h\right) n_s^h + a_s^h \phi'' <> 0 \quad (3.45)$$

Esto es, las convexidades tecnológicas no constituyen una condición necesaria para la obtención de múltiples sendas estacionarias. A sensu contrario, la introducción de una tecnología no convexa puede dar lugar a múltiples estados estacionarios en los que el tiempo transcurrido en el sistema educativo sea una solución interior. Para ello Azariadis y Drazen proponen una tecnología educativa alternativa en la que el mismo valor estacionario del tiempo de aprendizaje puede estar relacionado con varias tasas de crecimiento del capital humano. La especificación propuesta adopta una función escalón del tipo:

$$\phi = \phi_1 \text{ si } a_s^h < a_s^{h*} \quad (3.46)$$

$$\phi = \phi_2 \text{ si } a_s^h \geq a_s^{h*} \quad (3.47)$$

En este caso el modelo presenta dos soluciones interiores que constituyen dos "cuasi equilibrios estacionarios" à la Rostow cuando $\phi_1 > \hat{\phi}$, esto es, cuando la solución estacionaria n^h en el primer tramo es interior. Consiguientemente, durante un período de tiempo relativamente prolongado, dado una fracción estacionaria de tiempo de aprendizaje asociada a una ratio de capitales k, el sistema convergería hacia dicha solución en tanto que el capital humano acumulado se encontrase por debajo de a_s^{h*} . Sin embargo, a partir de este punto la tasa de retorno de este activo experimentaría un salto y la dinámica del modelo convergería hacia otra senda estacionaria, que constituiría un estado estacionario en sentido estricto, en la medida en que se mantendría indefinidamente en el tiempo (mientras que a la senda estacionaria del primer tramo podría denominársele "cuasiestado estacionario"). Si la tecnología se estructurase en una serie de escalones consecutivos, entonces la dinámica de transición de caracterizaría por la transición secuencial a varios cuasiestados estacionarios, para alcanzar finalmente un estado estacionario en el último nivel.

Una forma alternativa de introducir no convexidades sería hacer depender ϕ del tiempo de aprendizaje en lugar de ser función del capital humano. En tal caso los rendimientos crecientes se presentarían en este último input y no propiamente en el capital humano. El resultado es que aparecerían múltiples estados estacionarios en sentido estricto (y no cuasi-estados estacionarios, como en el ejemplo anterior), cada uno de ellos asociado a una tasa de crecimiento distinta que se mantendría indefinidamente constante en ausencia de shocks. Un entorno que podría dar lugar a esta tecnología podría ser uno en el que las instituciones de aprendizaje generasen efectos externos[84].

Modelos de fertilidad endógena. La microfundamentación de este tipo de literatura es proporcionada por **Becker y Barro (1988)**, en un artículo general sin capital humano y que se basa en la transmisión de legados intergeneracionales. El artículo, marcado el trabajo de Barro (1974) sobre altruismo intergeneracional en presencia de una política fiscal que genera deuda pública, constituirá un paso previo a la integración del capital humano en años posteriores, dando así continuidad a los trabajos previos de Becker sobre inversión en cantidad y calidad de los miembros de una dinastía desarrollados en los años 70 y 80 -véase apartado sobre estrategias de modelización en equilibrio parcial-.

El objetivo del modelo es explicar las decisiones de asignación del patriarca de una dinastía cuyas preferencias están caracterizadas por una función de utilidad estructurada de modo aditivo separable como sigue:

$$U_0 = v\left(C_0, n_0\right) + \sum_{i=0}^{n_0} \psi_i\left(U_1, n_0\right) \quad (3.48)$$

C denota, como es habitual, el consumo, mientras que n es el número de descendientes. El primer componente de la utilidad, v, es creciente y cóncavo en cada uno de sus componentes. Si el patriarca es neutral entre los distintos componentes de su prole y

[84] Un enfoque relacionado con el de Azariadis y Drazen es el de Schmitz (1989) y Freeman y Polansky (1992), si bien ninguno de estos trabajos utiliza propiamente el concepto de capital humano, sino el de capital-conocimiento, que está sujeto a una tecnología de acumulación utilizada por los dos primeros, con rendimientos crecientes en el conjunto de los inputs. La inserción del conocimiento en la tecnología del bien final da lugar a una estructura de esta última con rendimientos crecientes. El modelo se completa con un mercado de transmisión de habilidades gerenciales en el que participan individuos de generaciones consecutivas y que permite gestionar la empresa representativa por los agentes durante el segundo período de su vida. Las características del estado estacionario son similares a las identificadas por Azariadis y Drazen.

además ψ es separable en sus componentes e idéntica para todos ellos, la anterior función se transforma en:

$U_0 = v(C_0, n_0) + n_0 a(n_0) U_1$ (3.49)

Con $a(n_0)$ factor de altruismo intergeneracional, dependiendo del número de descendientes. Se impone además la restricción de que la utilidad total es creciente y cóncava en el número de descendientes. Teniendo en cuentas estos supuestos e iterando, las preferencias dinásticas pueden formularse así:

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} N_i A_i v(C_i, N_i);$$

$$A_0 = 1;\ A_i = \prod_{j=0;\ i\geq 1}^{i-1} a(n_j);\ N_0 = 1;\ N_i = \prod_{j=0;\ i\geq 1}^{i-1} n_j \quad (3.50)$$

El problema de optimización se completa con una restricción flujo por generación. En el lado de los recursos, cada adulto suministra inelásticamente su tiempo de trabajo percibiendo un salario real w y además percibe rentas sobre un activo real no depreciable de tamaño K que le legan sus progenitores; dichas rentas proceden de la remuneración del activo a un tipo r. Por el lado de los empleos, se encuentra el consumo, el legado a la próxima generación y los gastos derivados de la manutención y cuidado de su descendencia (V). Combinando todos estas variables, dicha restricción podrá formularse de la siguiente forma:

$w_s + (1 + r_{s-1}) K_s \leq C_s + n_s (V_s + K_{s+1})$ (3.51)

Cada fundador de una dinastía maximizará, por tanto, su función de utilidad dinástica sujeta a la restricción flujo descrita, en dos variables de control (consumo y número de hijos) y una de estado (legados en forma de activo real). El modelo da lugar a un equilibrio estacionario sin crecimiento a largo plazo y con valores constantes de stock de capital y número de descendientes. El valor del modelo reside, sin embargo, en constituir una base para planteamientos posteriores que, al añadir elementos nuevos, sí lograrán generar crecimiento endógeno.

Becker, Murphy y Tamura (1990) trasladan el esquema de legados de Becker y Barro (1988) a un entorno de equilibrio general con OLG e **introducen capital humano**. Los estados estacionarios a que da lugar su modelo pueden contener crecimiento a largo plazo debido a la utilización de tecnologías no convexas, en la línea del trabajo de Lucas de 1988 para agentes representativos. Partiendo de unas preferencias dinásticas como las descritas, se postula la existencia de individuos que viven durante dos períodos. En el primer período, la juventud, el tiempo disponible se dedica íntegramente a formación, mientras que en el segundo se divide entre tres usos alternativos: tiempo de trabajo en la producción del bien final, tiempo transcurrrido en el cuidado de los niños y tiempo destinado a su educación a partir de un proceso de producción doméstico. El número de niños a tener, cuidar y educar (N) se decide al comienzo del segundo período de vida, la madurez. Cada miembro de la descendencia lleva consigo un determinado tiempo dedicado de cuidados -dado, n_s^v - más un a cierta cantidad -también fija, z- de bienes de consumo dedicados a su cuidado. Por tanto, siendo N el número de niños, el tiempo disponible en el segundo período de vida cumple la siguiente restricción que relaciona sus diferentes usos:

$$1 = N_s\left(n_s^h + n_s^v\right) + n_s^w \quad (3.52)$$

Durante la juventud, todo el sustento es proporcionado por los progenitores y por tanto la maximización de la utilidad tiene lugar solamente a principios de la edad adulta, momento en el que el individuo valora tanto la utilidad proporcionada que el consumo le proporciona a sí mismo, como la que disfrutarán en su madurez los niños que van a nacer en ese mismo período, corregida por el número de descendientes y un parámetro de altruismo que, como en el modelo de 1988, depende inversamente del número de hijos:

$$U_s = v\left(C_s\right) + N_s a\left(n_s\right) U_{s+1};\ a' < 0 \quad (3.53)$$

La producción de capital humano sigue una estructura Cobb-Douglas, con rendimientos constantes a escala tanto en el tiempo de aprendizaje como en el capital humano; a su vez este último se subdivide en aquel recibido como herencia biológica en forma de dotación (ω) más el aportado por los progenitores, aplicado a lo largo del tiempo de formación. Se supone que ambos tipos de capital son homogéneos y, por tanto, directamente agregables sin necesidad de aplicar ningún coeficiente de conversión.

$$i_s^h = Bn_s^h\left(\omega + a_s^h\right) \quad (3.54)$$

La tasa de depreciación del capital humano se supone unitaria, en el sentido de que el capital humano producido en s sirve solamente a fines productivos (tanto en la generación de nuevo capital humano como en la de bien final) en el período siguiente a aquel en que se produjo; posteriormente su valor se reduce a cero. En otras palabras, la transferencia intergeneracional de capital humano no tiene una vigencia superior a una generación. En estas condiciones, se establece la igualdad $a_{s+1}^h = i_s^h$ .La tecnología productora del bien final también es Cobb-Douglas, con rendimientos constantes tanto en el tiempo trabajado como en el capital humano; el capital físico en una versión básica del modelo no interviene en el proceso. Combinando la ecuación que describe el origen de output por el lado de la oferta con el vaciado del mercado de bienes:

$$C_s + zN_s = Y_s = An_s^w\left(\omega + a_s^h\right) \quad (3.55)$$

El problema para el adulto en s+1 pasa por la optimización de las preferencias dinásticas sujetas a la ecuación de vaciado y las funciones de producción anteriores respecto al número de descendientes y al tiempo destinado a la educación, de modo que tanto el tiempo de trabajo como el consumo del adulto se derivan residualmente de las anteriores. El conjunto de las cpo se sintetiza en una ecuación de costes y beneficios marginales del número de descendientes y en otra que vincula la relación marginal de sustitución del consumo intertemporal (o del consumo de dos generaciones consecutivas, si se prefiere) y la tasa de retorno del capital humano. Esto es:

$$\frac{u'\left(C_s^{s-1}\right)}{a\left(N_s\right)u'\left(C_{s+1}^s\right)} \geq B\left(n_{s+1}^w + N_s n_{s+1}^h\right) = B\left(1 - N_s n_{s+1}^v\right) \text{[85]} \quad (3.56)$$

Al tener la función de aprendizaje rendimientos constantes a escala en el tiempo destinado a la formación de los hijos, esta variable desaparece de la tasa de retorno, por lo que esta última adopta un valor constante (dado un número de hijos). Esta estructura facilita que el modelo de lugar a varios estados estacionarios. La obtención de los mismos, sin embargo, se hace de un modo intuitivo, sin un tratamiento dinámico completo del modelo en equilibrio general. Como primer paso se intenta reconstruir el comportamiento de la tasa de retorno del capital humano respecto al stock acumulado del mismo a posteriori[86], sobre la base de Becker y Murphy (1992, manuscrito original de 1989) en que se plantean algunas reflexiones sobre la evolución probable de la tasa de retorno a medida que avanza el proceso de acumulación del capital humano: esta será originalmente creciente, a medida que se derivan las ganancias de la especialización, mientras que a partir de cierto punto de inflexión la capacidad social de absorción de conocimientos y de profundización en la especialización se ralentizará, pudiendo llegar a ser la tasa de retorno decreciente. De aquí que los autores deduzcan la relación $a_{s+1}^h = \phi\left(a_s^h\right)$ presenta un primer tramo creciente y convexo, para después llegar a uno cóncavo y creciente y, o finalmente,

[85] Véase en el capítulo 3 los comentarios sobre la derivación de las tasas de retorno del capital humano en modelos de generaciones solapadas. Este caso se trata como uno particular de 2 períodos.

[86] De nuevo aparece la diferenciación entre la tasa de retorno ex ante y su dependencia ex post -esto es, solucionando todo el sistema de ecuaciones dinámicas de equilibrio general- respecto a ciertas variables. Obsérvese que la tasa de retorno depende del capital humano depende en última instancia del número de descendientes, lo cuales están interrelacionados con la inversión en capital humano a través del sistema de equilibrio general.

bien uno decreciente, bien asintóticamente horizontal. En el primero de estos casos existirán tres puntos de corte (potenciales estados estacionarios) con la bisectriz en el espacio $\left(a_s^h, a_{s+1}^h\right)$; en el segundo, solamente dos. El primero de los puntos de corte se producirá en el origen, con un stock de capital humano nulo generado por una inversión de tiempo en la producción del activo nula. Este estado estacionario correspondería a una trampa de pobreza en el cual debería cumplirse -dada la tasa de depreciación unitaria del capital humano-:

$$(a)^{-1} > rr^{hn} = B\left(1 - n^v N\right) \quad (3.57)$$

Dando una especificación funcional a la tasa de altruismo tal que $a = \alpha N^{-\varepsilon}$, la anterior desigualdad se verificaría cuando $N^{\varepsilon} > \alpha A\left(1 - vN\right)$, relación que es tanto más probable con familias muy numerosas. Esta situación daría lugar a un factor de altruismo bajo, lo que a su vez penaliza la utilización del tiempo en fines diferentes al trabajo. La existencia de la trampa de subdesarrollo se comprobaría secuencialmente: primero, se despejaría N en la ecuación que iguala beneficios y costes marginales de la fertilidad y, a continuación, se verificaría si el valor estacionario obtenido satisface la desigualdad mostrada más arriba. Atendiendo a la igualdad entre beneficios y costes marginales, una elevada fertilidad con nula inversión en formación puede resultar óptima cuando los sacrificios en consumo para producirla sean reducidos (esto es, z y n^v sean relativamente bajos) y las dotaciones genéticas que estos reciban sean razonablemente altas como para poder proporcionarles niveles satisfactorios de consumo. Si aumenta exógena e infinitesimalmente el stock de capital humano en el entorno de la trampa de subdesarrollo, se producirán dos impactos de signo contrario: un efecto renta que impulsa al alza el número de descendientes y un efecto sustitución, que hace más atractivo el tiempo dedicado a otros fines. Puede demostrarse que cuando el coeficiente z (gastos en bien final asociados al cuidado de los niños) es relativamente elevado y n^v bajo, el efecto riqueza predomina, haciendo retomar el sistema hacia el estado estacionario sin capital humano y creando en la economía una trampa malthusiana de crecimiento nulo. Gráficamente, esta situación se traduciría en una relación funcional ϕ que pasaría por debajo de la bisectriz en el cuadrante $\left(a_s^h, a_{s+1}^h\right)$. Para niveles suficientemente elevados de capital humano, sin embargo, el efecto sustitución pesaría más que el efecto riqueza, dados n^v y z , estableciéndose una relación negativa entre incremento del capital humano y la fertilidad.

Además de una posible trampa de subdesarrollo, el sistema presenta al menos un estado estacionario más, en el que el nivel del capital humano es positivo; en cualquiera de ellos se verificará $(a)^{-1} = rr^{hn}$. Si solamente existe uno, será localmente inestable a la derecha y a la izquierda, mientras que si hay dos, el central será inestable -local y globalmente- y el asociado a un capital humano más elevado, localmente estable. La inestabilidad del segundo estado estacionario se deriva de la relación entre capital humano y fertilidad fuera del entorno del origen, que se convierte en negativa. Así, para un nivel del capital humano superior al asociado al estado estacionario positivo, disminuye la fertilidad y aumenta la ponderación del consumo de las próximas generaciones en la relación marginal de sustitución, lo que lleva a incrementar todavía más la inversión en capital humano y alejarse más del estado estacionario.

El trabajo explora también la dinámica del modelo cuando se introduce capital físico en el sistema productivo como input adicional en la tecnología productora del bien final, siendo los rendimientos conjuntos de los inputs constantes a escala y la tasa de depreciación del activo nula. En términos de las cpo, la tasa de retorno del capital físico se igualará a la RMS y será mayor o igual a la tasa de retorno del capital humano; en estado estacionario, la primera se igualará por tanto al inverso del factor endógeno de altruismo. Dados los rendimientos decrecientes en el capital físico, la inversión bruta deseada no será nula, a diferencia del capital humano, por lo que el nivel óptimo de inversión en capital físico cuando existe trampa de desarrollo es positivo; sin embargo, a largo plazo será imposible el mantenimiento de tasas positivas de crecimiento del output en este punto. En los restantes estados estacionarios la relación entre capital físico y capital humano se mantendrá constante, resultado congruente con la igualdad entre la tasa de retorno del primer activo y el inverso del factor altruismo, decreciente respecto al número de hijos. Así, dados unos stocks iniciales de ambos capitales, el stock de capital físico estará positivamente correlacionado con el capital humano y negativamente con la fertilidad óptima.

Ehrlich and Lui (1991), basándose en los trabajos anteriores de Becker, elaboran un modelo OLG con fertilidad endógena en la que los **vínculos intergeneracionales se ponen de manifiesto a través de sistemas contractuales implícitos entre padres e hijos en lugar de preferencias altruistas**. La estructura familiar se modeliza mediante la coexistencia de tres generaciones en un mismo período: niños, adultos y viejos, dependiendo financieramente los primeros y los últimos de los segundos, que son los únicos que prestan trabajo de mercado. La función de producción de capital humano es igual a la empleada por Becker, Murphy y Tamura; también como en este último, la educación se proporciona por los adultos a los niños mediante la aplicación del tiempo de los primeros, interviniendo el capital humano de los primeros como input añadido, sujeto también a rendimientos constantes a escala. La tasa de depreciación del capital humano es unitaria.

El contrato implícito entre adultos y nuevas generaciones estipula que las segundas transferirán a los primeros, cuando alcancen su vejez, recursos proporcionales al capital humano transferido (ζa_{s+1}^{h}), siendo la constante de proporcionalidad endógena y determinable unilateralmente por los adultos a la vista de consideraciones sobre el bienestar de sus descendientes inmediatos. Existen también costes n^{v} de crianza de niños en términos de tiempo, aunque dicha fracción es exógena y el tiempo en la madurez solamente se asigna en esta ocasión entre dos usos alternativos: trabajo en el sector del bien final o formación a los niños.

Se definen probabilidades π_1, π_2 de supervivencia en la edad adulta y la vejez, respectivamente -si bien estas son accesorias y no modifican los resultados esenciales del modelo-. Esto implica que las transferencias esperadas por los supervivientes en la vejez serán iguales a $\pi_1 N_s \zeta_{s+1} a_{s+1}^{h}$ mientras que el valor esperado de dichas transferencias para los adultos vendrán dadas por $\pi_2 \zeta_s a_s^{h}$ [87]. Sobre esta base puede derivarse el consumo de los adultos y los mayores en s y s+1[88], respectivamente:

$$C_s^{s-1} = \left(1 - n^{v} N_s - n_s^{h} N_s\right)\left(a_s^{h} + \omega_s\right) - \pi_2 \zeta_s a_s^{h} \quad (3.58)$$

$$C_{s+1}^{s-1} = \pi_1 N_s \zeta_{s+1} a_{s+1}^{h} \quad (3.59)$$

La función de utilidad esperada de los adultos se formula de un modo no altruista (esto es, con sus propios consumos en la madurez y la vejez como único argumento), siguiendo una especificación de elasticidad de sustitución intertemporal constante:

$$U_s = \frac{\left(C_s^{s-1}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta \frac{\left(C_{s+1}^{s-1}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (3.60)$$

El proceso de optimización se realiza en dos etapas. En una primera, se maximiza la función de utilidad esperada ,sujeta a las restricciones flujo, respecto al stock de capital para la generación que en s todavía se encuentra en la niñez (a_{s+1}^{h}) y el vector de consu-

---

[87] Las expectativas se construyen por los individuos de una misma cohorte en períodos consecutivos, por lo que el capital humano utilizado como base de la transferencia es distinto según se trate de la cantidad percibida o efectuada.

[88] De nuevo se supone una función de producción sin capital físico, por lo que la totalidad del capital humano disponible aplicado a la producción de mercado arroja la renta laboral disponible en el período s, a la que después se detraen las transferencias a la generación que alcanza la vejez también en s. La estructura lineal en el capital humano permiten que los salarios reales por unidad de tiempo y de capital humano sean unitarios.

mos. Las cpo de la optimización, adecuadamente ordenadas, dan lugar a una regla de inversión del tipo $a_{s+1}^{h}=\theta_1 a_s^h+\theta_2$; , donde los coeficientes θ_i son constantes (dependientes del conjunto de parámetros del modelo, así como del valor constante de ζ).

En una segunda etapa, en la que se introduce un componente de altruismo, se optimiza el valor del coeficiente de proporcionalidad sobre el capital humano de los adultos que constituirá la base de las futuras transferencias en la vejez. Para determinar el valor óptimo de ζ se maximiza la función de utilidad de la próxima generación, sujeta a la regla óptima de inversión emanada de la primera etapa de optimización:

$$U_{s+1}=\frac{\left(C_{s+1}^{s}\right)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}+\beta\frac{\left(C_{s+2}^{s}\right)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \quad (3.61)$$

A partir de aquí se observan varias propiedades de la solución. Dependiendo del valor que adopta el parámetro θ_1 , pueden surgir dos tipos de estado estacionario. Si dicho parámetro es mayor o igual a 1, el estado estacionario se caracterizará por una tasa constante de crecimiento del capital humano (que se alcanzará solo asintóticamente), pero si es inferior a 1, se convergerá hacia un valor constante del stock de capital humano; naturalmente, el que este último parámetro sea distinto de 0 dependerá en última instancia de que $\omega>0$. Por otro lado, **el valor óptimo de ζ maximizará en el estado estacionario con capital humano en expansión la tasa de crecimiento del capital humano (y por tanto, de la economía)**. Este resultado es posible gracias a la derivación del contrato de aseguramiento en un contexto en el que este maximiza conjuntamente las funciones de utilidad de ambas generaciones. De este modo la construcción del contrato de aseguramiento maximiza simultáneamente la renta y el consumo intertemporales y viene a confirmar, en un contexto dinámico, el teorema de Coase. Como proposición adicional, puede demostrarse también que una reducción de las probabilidades de muerte en la fase adulta y en la vejez incrementa el crecimiento a largo plazo, al elevar los coeficientes de la regla óptima de inversión. **Con los supuestos realizados hasta el momento, se tendría además un equilibrio esquina en fertilidad**: si el bien contrato intergeneracional arroja los mismos beneficios marginales durante la vejez derivados de un aumento en la cantidad o en la calidad de los niños, los costes marginales son superiores para la primera variable, ya que comprenden no solo los costes educativos, sino los de crianza. Por esta razón, la fertilidad caerá a su mínimo valor posible, $1/\pi_1$.

Este modelo básico admite algunas variantes, todas ellas relevantes por distintos motivos. Quizá la principal de ellas venga dada por el objetivo de explicar el fenómeno que en Demografía se ha venido en llamar “transición demográfica”. De acuerdo con el mismo, pueden distinguirse varias fases en la evolución hacia el desarrollo: i) El despegue suele venir caracterizado por un descenso sensible de las tasas de mortalidad; ii) Más tarde se observa un aumento de la tasa de crecimiento de población explicado tanto por i) como por escasas variaciones de la tasa de fertilidad, bien al alza o a la baja y iii) la fase final viene marcada por un descenso evidente de la tasa de fertilidad. Para aproximar los resultados del modelo a este esquema de transición, Ehrlich y Lui introducen un elemento nuevo en la función de utilidad, junto con el vector de consumos: la compañía (Ñ) proporcionada por los descendientes durante la vejez, como otro elemento del contrato implícito intergeneracional. Además dicha compañía de será función cóncava tanto del número esperado de hijos supervivientes como de su capital humano[89]. Estas premisas se concretan en las siguientes ecuaciones:

$$U_s = \frac{\left(C_s^{s-1}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{\left(C_{s+1}^{s-1}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{\left(\tilde{N}_{s+1}^{s-1}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma};$$

$$\tilde{N}_{s+1}^{s-1} = \left(\pi_1 N_s\right)^{\eta} \left(a_{s+1}^{h}\right)^{\varepsilon};\ 0 < \eta, \varepsilon < 1 \ (3.62)$$

Para simplificar, se tomará el parámetro ζ constante a lo largo del período de transición. El equilibrio general vuelve a resolverse para una variable de control, el número de hijos, y otra de estado, el stock de capital humano del que se dota a estos. La adición del ercer bien a la función de utilidad implica que la tasa de retorno del capital humano considerará ahora dos elementos diferentes en la renta marginal del activo (ver capítulo 5, en que se aborda este tipo de modelo desde el ángulo de las políticas educativas), uno asociado al contrato intergeneracional y otro, siempre que $\varepsilon > 0$, a la compañía y análogamente puede decirse de la tasa de retorno de la fertilidad. Tal como se han formulado las preferencias del adulto, uno de los pagos del contrato implícito para los mayores, la compañia, depende del tamaño de la prole, mientras que el consumo depende también del volumen de capital humano. Esta configuración permite derivar tasas de retorno del número de hijos y del volumen de capital humano, cuya comparación permite llegar a las siguientes conclusiones: i) Para garantizar un equilibrio interior[90] en ambos activos reales (hijos y capital humano), por razones análogas a las expuestas en la versión básica del modelo, es necesario exigir que $\eta > \varepsilon$, logrando así que el impacto marginal del número

[89] Nótese que la compañía es una forma más creíble de introducir indirectamente altruismo en las preferencias, aunque aquella obedezca a un motivo esencialmente egoista.

[90] Nótese que el supuesto de tasa de depreciación unitaria del capital humano implica que un equilibrio esquina en el tiempo de educación no solamente implica un tiempo nulo destinado al aprendizaje, sino también un stock de capital nulo.

de hijos en la compañía sea superior al del capital humano; ii) El modelo nunca puede generar trampas de subdesarrollo, en el sentido de inversión nula en capital humano acompañada de una fertilidad positiva, al contrario que el trabajo de Barro y Becker (1990)[91], ya que la tasa de retorno de la fertilidad depende multiplicativamente de la inversión en capital humano: a mayores horas de aprendizaje, tanto mayor será el impacto de un número más elevado de hijos sobre la transferencia recibida por los mayores a consecuencia del contrato intergeneracional. En consecuencia, si la inversión en capital humano se anulara la tasa de retorno del número de hijos también se haría cero, lo que hace imposible que esta última se hiciera mayor a la del capital humano. iii) Para valores relativamente altos del capital humano, la tasa de retorno de este será estrictamente superior a la del número de hijos, por lo que la fertilidad caerá a su mínimo valor posible. Esto sucede porque, a medida que aumenta la posición en capital humano, se incrementa relativamente el coste de la producción de niños frente al de la educación y, al mismo tiempo, disminuye el atractivo de la compañía (que forma parte de la tasa de retorno del número de hijos) frente al del aseguramiento material.

El análisis dinámico de esta versión del modelo se realiza bajo el supuesto de $\varepsilon = 0$, restricción compatible con la existencia de soluciones interiores. En tales condiciones, el sistema arroja un doble estado estacionario. El primero de ellos, localmente estable, se corresponde con un stock de capital humano constante y positivo, acompañado de un número de hijos positivo o nulo (dependiendo de la magnitud de la posición en capital humano, en virtud del razonamiento anterior); dicho stock positivo es compatible con un valor constante del tiempo destinado a educación, que puede despejarse directamente de la tecnología de acumulación -con una tasa de depreciación nula, un stock de capital humano estable solo podría conseguirse mediante un tiempo de aprendizaje nulo-. En el segundo estado estacionario, que se distingue por presentar una tasa de crecimiento constante del capital humano, la tasa de fertilidad se hace nula, al llegar un punto en el que el retorno del capital humano es siempre mayor que el retorno del número de descendientes. El juego de estos dos estados estacionarios permite también reflejar el fenómeno de la transición demográfica. Supongamos que la economía se encuentra en el primero de

---

[91] El supuesto de Becker y Barro sobre la endogeneidad y el signo decreciente del factor de altruismo respecto al número de descendientes es crítico en este sentido, ya que hace posible que para ciertos tamaños críticos del tamaño familiar la trampa de pobreza con fertilidad positiva emerja. Por otro lado, el hecho de que el consumo en el último período de vida se anule si la inversión en capital humano de los mayores en el período anterior hubiera sido cero impide que pueda alcanzarse un equilibrio con un stock nulo de capital humano.

los estados, con crecimiento nulo, y que experimenta shocks positivos en las probabilidades de supervivencia en madurez y vejez. Por la regla de inversión óptima se acumulará más capital humano y dependiendo de la intensidad del incremento en la longevidad se pasará a otro estado estacionario, con capital humano más elevado esta vez, o se entrará en una trayectoria de crecimiento indefinido a largo plazo del activo.

El paralelismo más claro con la transición demográfica puede encontrarse no obstante cuando se presta atención al comportamiento de la fertilidad en el paso de uno a otro estado estacionario. Si el shock afecta a la probabilidad de supervivencia en la edad adulta, aumentará tanto la tasa de retorno del capital humano como la del número de descendientes, aunque el impacto directo sobre esta última será inferior que sobre la primera, al reducir el atractivo relativo de la compañía frente al aseguramiento financiero, término que forma parte de la tasa de retorno de la fertilidad. A priori la fertilidad puede aumentar o disminuir, pero si el incremento de π_1 es suficientemente importante, el salto a la nueva senda estacionaria implicará que el retorno de la fertilidad se sitúa por debajo del retorno del capital humano, por lo que el descenso de aquella será ya continuo. Mientras, si el shock consiste en un aumento de la longevidad en la vejez π_2 , no varía el atractivo relativo de compañía y aseguramiento financiero, por lo que la variación del retorno de la fertilidad se situará en línea con la del retorno y del capital humano y, al menos inicialmente, la primera aumentará al tiempo que el segundo, sin perjuicio de que si se salta a la senda estacionaria de crecimiento finalmente la fertilidad acabe también cayendo. A la inversa, si partiendo del estado estacionario de crecimiento constante la longevidad en la vejez experimenta un recorte sustancial, puede retrocederse a la trayectoria que conduce al estado sin crecimiento, con un incremento de la fertilidad y una reducción progresiva del capital humano. Por último, puede demostrarse también que en esta variante del modelo el contrato implícito de aseguramiento financiero también maximizará la tasa de crecimiento estacionaria (claro está, siempre que se suscriba a lo largo del estado estacionario de crecimiento, de entre los dos posibles).

Es posible dar cabida también al capital físico y al ahorro en el modelo de Ehrlich y Lui, sin más que suponer que cada período los adultos ahorran una fracción de su renta, la cual destinan a la adquisición de capital físico con el cual se producen bienes de consumo para los mayores. La estructura del modelo genera sin embargo un problema circular que hace recurrir a una peculiar secuencia de acontecimientos: puesto que el capital físico no puede contribuir a la producción en la edad adulta, ya que no ha sido acumulado previamente, se supone que la producción de bienes de consumo se produce, primero durante la madurez, exclusivamente mediante capital humano y con la finalidad de dotar a los adultos de bienes de consumo. Sobre las rentas generadas por dicha producción se genera el ahorro, que se invierte en la adquisición de capital físico para llevar a cabo, de modo contemporáneo a la vejez y por los propios mayores, la producción de bienes consumo para sí mismos sobre la base tanto de su capital humano como del capital físico atesorado; sin embargo, por esta última producción no recibirán remuneración alguna. Partiendo de este esquema se redefinen del siguiente modo los consumos de madurez y vejez:

$$C_s^{s-1} = A\left(a_s^h + \omega\right)\left(1 - n^v N_s - n_s^h - S_s\right) - \pi_2 \zeta_s a_s^h \quad (3.63)$$

$$C_{s+1}^{s-1} = \pi_1 \zeta_{s+1} N_s a_{s+1}^h + A\left(a_s^h + \omega\right)^{1-\alpha}\left[S_s\left(a_s^h + \omega\right)\right]^{\alpha} \quad (3.64)$$

Son varias los puntos a destacar en las anteriores reformulaciones del consumo. Primero, la función bi-factorial de producción de bienes de consumo en la vejez es una Cob-Douglas de rendimientos constantes en el conjunto de los inputs. Segundo, los bienes de consumo producidos durante la vejez son perecederos y por tanto no pueden transferirse a futuras generaciones. Tercero, en cuanto a la naturaleza del capital físico, debe suponerse que este comparte naturaleza con el bien de consumo de la madurez y que además tiene una tasa de depreciación unitaria, de modo que no puede almacenarse para reutilizarse con la próxima cohorte de mayores; así, cada cohorte solo disfrutará del capital físico que su ahorro durante la madurez les haya podido proporcionar. Cuarto, el último supuesto también permite excluir la existencia de legados, al estar limitada la eficacia del ahorro a la adquisición de capital físico, que no sobrevivirá a la cohorte que lo generó.

La función de utilidad sigue dependiendo de los consumos en la edad adulta y vejez, así como del factor compañía. La optimización se realiza ahora respecto a tres variables: la fertilidad, el capital humano y la tasa de ahorro sobre renta disponible. Las cpo permiten derivar tasas de retorno independientes para ahorro, inversión en capital humano y fertilidad. Una de las conclusiones básicas de esta versión del modelo es que las tasas de retorno del capital humano se igualarán en todo momento, lo que implica soluciones interiores para ambas variables en cualquier período: este hecho es garantizado tanto los rendimientos decrecientes del ahorro (dados por la concavidad de la función de producción respecto al capital físico) como la existencia del factor “compañía”, que hace el ahorro una alternativa imperfecta a la inversión en los descendientes (este último argumento será cierto en tanto en cuanto $\varepsilon > 0$).

En equilibrio general la relación entre la tasa de retorno del capital humano y la de la fertilidad se mantiene, de suerte que la primera será siempre igual o mayor a la segunda y, a medida que avanza la acumulación de capital humano, la fertilidad tiende a cero. Por otra parte, las soluciones en capital físico y capital humano serán siempre interiores y sus tasas de retorno, iguales en todo momento. La clave de este resultado estriba en los rendimientos decrecientes de ambos factores tanto en la tecnología de producción del bien compuesto para los mayores como en la de la función de compañía. De este modo, la frontera de posibilidades de consumo en la vejez en el espacio de las inversiones en ambos activos sería estrictamente cóncava, reflejando la sustituibilidad entre ambos activos, lo que excluye equilibrios esquina en cualquiera de ellos. Mediante ejercicios de simulación -al ser posible obtener soluciones cerradas para las trayectorias de las endógenas- se revela que la trayectoria en la transición de la tasa de inversión en capital físico sobre la renta total es también coherente con la evidencia desarrollista; un incremento en a longevidad juvenil, al elevar la tasa de retorno del capital humano, desencadena un proceso de aceleración de la acumulación de este activo y de reducción paulatina de la longevidad. Por su parte, estos dos cambios permiten trazar una trayectoria de la tasa de ahorro destinada al capital fisico ante el shock inicialmente decreciente y después creciente, hasta alcanzar su valor constante a largo plazo. En el primer tramo, la disminución de la fertilidad es el efecto predominante, al generar a través de un efecto renta la necesidad de una mayor orientación de la renta total hacia la acumulación de capital humano para proveer de consumo la vejez; en el segundo tramo, sin embargo, el mayor crecimiento de la renta disponible vía capital humano prevalece y permite dedicar una fracción más alta de la renta total a la acumulación de capital físico. Este tipo de comportamiento encaja bien con la evidencia empírica para algunos países como Japón, tal como ponen de manifiesto los estudios de Hayashi (1989).

En estado estacionario, al igual que en el modelo de Lucas y de Barro-Becker, la proporción entre el capital físico y humano se torna constante, o lo que es lo mismo, la proporción del ahorro destinado a la adquisición de capital físico es constante, una vez que la fertilidad ha finalizado su convergencia a 0. También se demuestra vía simulación que incrementos exógenos en la tasa de ahorro en capital físico se traducen en reducciones en la tasa de crecimiento estacionario. Adicionalmente, aumentos en la longevidad juvenil implicarán disminuciones de dicha tasa, al estimular la inversión en capital humano tanto vía compañía como transferencias contractuales y a la inversa sucede con las mejoras en la longevidad de los mayores.

Una variante final del modelo, que permite conectarlo con los resultados de Barro et al. (1990), es la consideración del altruismo (que podríamos asociar al motivo “compañía”, en terminología de Ehrlich y Lui) como único factor que mueve las decisiones del individuo adulto respecto a las generaciones venideras[92]. De este modo, partiendo de la misma función de utilidad que se viene maximizando, se iguala a cero a la constante proporcional de los contratos intergeneracionales implícitos (esto es, $\zeta_s = 0$), de modo que el aseguramiento financiero en la vejez desaparece como motivación, salvo aquel que pueda conseguirse a través del ahorro. Se supone también que la elasticidad del capital humano en la función de producción de compañía deja de ser nula, aunque se sitúa entre 0 y 1 ($0 < \varepsilon < 1$), condición suficiente para que se sigan cumpliendo todas las propiedades enunciadas anteriormente sobre estados estacionarios y transición demográfica.

El tiempo óptimo invertido en la educación de los niños será, bajo estos supuestos, coincidente con el que se desprende de Becker et al. en un horizonte equivalente, y además será una constante y por lo tanto independiente de las tasas óptimas de fertilidad y ahorro. La tasa de crecimiento resultante, sin embargo, será superior en la variante del modelo con asistencia material, al proveer este último de un móvil adicional para invertir en la formación de los hijos. Es más, como hemos visto, la introducción de estos motivos adicionales pueden afectar la propia existencia de un estado estacionario con crecimiento, así como el ritmo al que se converge hacia este. Otra característica notable del estado estacionario en esta última versión del modelo es que la inversión óptima en capital humano en estado estacionario y, por tanto, la tasa de crecimiento en el mismo, es independiente de las probabilidades de longevidad. Esto se debe a que, tal como se ha formulado la función de producción de "compañía", dichas probabilidades afectarán exclusivamente al número descendientes, pero no al capital humano. Por lo tanto, dado que esta motivación ha pasado a ser la única, no habrá ningún motivo para que estas probabilidades formen parte de la solución óptima. Esto a diferencia de la solución con contratos intergeneracionales, en los que las probabilidades de longevidad afectaban, como múltiplos del stock de capital humano, tanto al consumo alcanzable durante la vejez como en la madurez.

Literatura sobre transición demográfica. Los primeros modelos de fertilidad endógenade Barro y Ehrlich y Lui iluminaron por primera vez el fenómeno de la transición demográfica desde la perspectiva de los modelos de crecimiento neoclásicos con capital humano. Sin embargo, quedaban varios aspectos de la visión malthusiana por incorporar a la modelización de este fenómeno, principalmente dos. Primero, la coexistencia en el estado estacionario pre-desarrollo de una baja fertilidad y un nulo crecimiento de la renta: en el análisis malthusiano la primera se justificaba por el hecho de que cualquier incre-

[92] La comparación puede establecerse reduciendo el modelo de Becker et al. a dos períodos; haciendo esto, la función de utilidad resultante, ahora con altruismo limitado, es equivalente a la función de utilidad de Ehrlich and Lui con motivo acompañamiento.

mento de la productividad de trabajo se vería compensado en una sociedad atrasada por una elevación de la natalidad, que reduciría los ingresos per cápita y acabaría generando una disminución de la fertilidad; por el contrario, en los modelos OLG mencionados el estado de nulo crecimiento iba acompañado de una elevada fertilidad. El segundo elemento es la reducción de la mortalidad a lo largo de la transición hacia el estado estacionario con crecimiento permanente de las rentas: en este sentido, la aproximación de Ehrlich y Lui utilizaba una probabilidad exógena de muerte en la juventud y la vejez.

A partir de finales de los 90 comienzan a proliferar los trabajos dirigidos a modelizar de un modo más fiel la dinámica de transición malthusiana. Uno de los trabajos clásicos es el de **Galor y Weil (2000)**[93], que parte de un marco OLG de 2 períodos. En el primero de ellos los individuos adquieren educación pasivamente, mientras que en el segundo deciden el número de hijos a producir y distribuyen su tiempo entre trabajo y la educación de estos últimos. La función de producción, de rendimientos constantes, depende del capital humano y la tierra (T), factor en cuantía dada y cuya tasa de retorno se supone nula; en el caso de este último factor su contribución se ve aumentada por el progreso tecnológico, indexado por el parámetro A:

$$Y_s = \left(A_s T_s\right)^{\alpha} \left(a_s^h n_s^w\right)^{1-\alpha} \quad (3.65)$$

El tiempo que los padres dedican a los hijos tiene dos componentes: uno fijo y otro proporcional a la calidad de los mismos. Esta estructura puede sintetizarse como:

$$n_s^v = v + \theta n_s^h \quad (3.66)$$

---

93 Otros trabajos dentro de esta línea son también importantes, aunque no han ejercido una influencia en autores posteriores como el de Galor y Weil. Sería el caso de los modelos bisectoriales de Hansen y Prescott (2002) o el de Kremer (1993), con un acelerador tecnología-crecimiento de la población que puede considerarse un antecedente del de Galor y Weil, aunque sin intervención directa del capital humano. Lucas (1999) demuestra en un modelo dinástico que, mientras el crecimiento exógeno de la eficiencia del trabajo no es susceptible de generar transiciones demográficas, la endogeneización del capital humano sí puede hacerlo, en la línea de Barro y Becker, aunque la sofisticación del planteamiento es inferior a la de otros trabajos posteriores. Tamura (2002) modeliza el paso de la agricultura a la industrialización a través de una estructura bisectorial en la que inicialmente conviven ambas tecnologías, la primera con rendimientos decrecientes en el capital humano y la segunda, constantes. A partir de cierto nivel acumulado de capital humano, es esta última la que maximiza la renta per cápita.

Esto es, cada unidad de tiempo efectivo en educación implica, a través del coeficiente de conversión θ , la correspondiente cantidad de tiempo real lejos del trabajo de mercado. Con esta premisa, la restricción presupuestaria del segundo período de vida será:

$C_s^{s-1} + e_s a_s^h N_s \left(v + \theta n_s^h\right) \leq e_s a_s^h$ (3.67)

Se impone, como elemento clave del modelo, una restricción sobre el consumo de subsistencia, de suerte que $C_s^{s-1} \geq \overline{C}$. Las preferencias toman la forma de una Cobb-Douglas dependiente del consumo del segundo período de vida, así como la renta salarial total legada a la siguiente generación:

$U_s = \left(C_s^{s-1}\right)^{\eta} \left(e_{s+1} a_{s+1}^h N_s\right)^{1-\eta};\ \eta \in (0,1)$ (3.68)

Finalmente, la tecnología educativa es creciente y cóncava respecto al tiempo educativo y negativa respecto al progreso técnico, en la línea de Schultz (1964), quien defiende que este último eleva la tasa de retorno del capital humano per se, independientemente de su efecto indirecto sobre los salarios reales, al mejorar el conocimiento de los individuos del uso de la tierra[94]. Asi, siendo g el crecimiento del índice de progreso técnico A, se tendrá, con una tasa de depreciación del capital humano unitaria:

$a_{s+1}^h = h\left(n_s^h, g_{s+1}\right);\ h_{nn} < 0;\ h_{ng} > 0;\ h_{gg} > 0$ (3.69)

El progreso tecnológico es à la Jones, con la tasa de crecimiento de A dependiente, a través de una función creciente y cóncava, de la inversión en educación llevada a cabo el período anterior. Dicha función también presenta un efecto escala en el tamaño población, siendo por lo tanto creciente y cóncava respecto a esta última variable. Además, si la población excede cierto umbral crítico, la tasa de cambio técnica será positiva incluso si la inversión en educación es nula. Así, esta función es representable como $g_{A,s+1} = g\left(n_{s-1}^h, L_{s-1}\right)$. Esta relación sin embargo es exógena para los agentes individuales, ninguno de los cuales puede modificar unilateralmente el ritmo de la evolución tecnológica agregada. El equilibrio general se resuelve respecto a la cantidad y calidad de los niños, viniendo aproximada esta última por la inversión en su educación; el consumo se determina residualmente siempre que la restricción de subsistencia no sea vinculante. Esto implica que, mientras la renta total garantice el consumo de subsistencia, las preferencias indican que se dedicará una fracción $1-\eta$ del tiempo disponible a la crianza de los niños en un sentido amplio y el resto, al trabajo de mercado. Sin embargo, para niveles bajos de la renta total, la aplicación de dichas proporciones no permitiría satisfacer el consumo de

94 Este supuesto no deja de ser una suposición ad-hoc.

subsistencia, por lo que se atiende a este prioritariamente y se dedica al tiempo restante al cuidado y educación de la prole.

Este esquema tiene algunas implicaciones. Así, incrementos permanentes en los salarios, *ceteris paribus*, no afectarán nunca a la distribución entre cantidad y calidad de los niños, al afectar equiproporcionalmente a ambas tasas de retorno. Sin embargo una variación en el ritmo de progreso tecnológico afectará favorablemente a la inversión en capital humano de los descendientes[95], en detrimento de su número. Cuando la renta total sea inferior al umbral de subsistencia, incrementos en la misma determinarán un incremento del tiempo destinado a la crianza de niños, aumentando su número pero dejando invariada su calidad, ya que en este caso hay el cambio en la renta total se ve acompañado por una variación en la proporción de tiempo dedicada a la crianza de los niños; en tales condiciones el coste se minimizará si el tiempo destinado a la educación se mantiene constante. Ahora bien, si la mejora en la renta total se produce cuando la restricción de consumo no es vinculante, la constancia de las fracciones de asignación de tiempo hará plenamente operativa la neutralidad en los cambios de las tasas de retorno y con ella los valores de equilibrio de cantidad y calidad de la descendencia se mantengan invariantes. Estos rasgos permiten caracterizar dinámicamente la inversión en capital humano como una función convexa de la tasa de cambio tecnológico, esto es, $n_s^h = n\left(g_{A,s+1}\right)$, siendo n creciente y convexa.

La endogeneidad del cambio técnico genera una dinámica más rica que la analizada en los modelos anteriores, siendo la clave de la misma la interacción entre las funciones n y g. Pueden distinguirse 3 casos. i) Un primer régimen que podría calificarse como malthusiano, en el que la población es tan reducida que g, cuando $n^h = 0$, es mínimo (o, en términos gráficos, g se sitúa por debajo de n en todo el espacio de las dos variables). En este caso existe un único estado estacionario local y globalmente estable, en el que la inversión en educación es nula. Este régimen se observaría cuando la renta total es tan reducida que permite una fracción de tiempo muy escasa para la producción y educación de niños; a su vez este mínimo crecimiento de la población no permite elevar de manera sustancial el progreso tecnológico. La posición relativa de h y g implica que, un nivel de inversión en educación, la tasa de cambio tecnológico correspondiente es menor

[95] Como se vio al definir la ecuación de acumulación, el ritmo de progreso técnico presenta una doble influencia sobre la inversión bruta en capital humano: una primera derivada parcial negativa, y al tiempo una derivada cruzada positiva respecto al tiempo de educación. Los autores realizan las restricciones necesarias para garantizar que este último el efecto predominante.

a la que permitiría aumentar la inversión en educación el período siguiente, por lo que esta última variable acaba convergiendo a 0. Véase que este régimen “por debajo de la frontera malthusiana” es consistente con una baja fertilidad, a diferencia de la predicción efectuada por Ehrlich y Lui: la restricción de consumo de subsistencia es la principal responsable de este rasgo diferencial. ii) Un régimen de “despegue”, en el que la población tiene un tamaño intermedio que desplaza la función g hacia arriba, presentando dos puntos de corte con n, correspondientes a un estado estacionario localmente inestable -el de bajo crecimiento- y uno estable -el de crecimiento más alto-, ambos interiores, además de otro estado estacionario esquina en n^h , también localmente estable. Por lo tanto dentro de este espectro de resultados, si una economía se encuentra en el estado estacionario de crecimiento medio será crítico qué tipo de shock la desplaza del mismo, ya que aquel determinará hacia qué nivel de desarrollo transita. iii) Un régimen de desarrollo, en el que la población ha aumentado hasta un nivel que la curva g solo presenta un punto de corte con n, que representa un estado estacionario interior globalmente estable. **En definitiva, el modelo es capaz de reproducir con mayor realismo la dinámica demográfica hacia el desarrollo, si bien la endogeneización de la población resulta todavía insuficiente como para explicar eficazmente las transiciones entre regímenes -no así las pautas de comportamiento dentro de un régimen, que son más satisfactorias-.**

Autores posteriores a Galor y Weil han puesto en cuestión el comportamiento de la fetilidad en la convergencia hacia el estado estacionario de desarrollo. Un enfoque que conduce a este resultado es el propuesto por **Doepke (2004),** en un modelo bisectorial que hereda parcialmente su estructura de Tamura (2002). Los agentes viven dos períodos y pueden ser cualificados o no cualificados, en proporciones variables pero no influibles por decisiones individuales; la formación se recibe en el primer período de vida, en el que no se maximiza la utilidad y se recibe pasivamente la educación paterna -en forma de pago de profesores con coste fijo por hijo si se desea garantizar que estos estarán cualificados en el futuro-. Si durante la juventud no se recibe educación, se trabaja una fracción fija del tiempo, revirtiendo en los adultos estos ingresos. En el segundo período se trabaja el tiempo no consumido por los requerimientos fijos por hijos -interprétense estos como tiempo de crianza-. Existen dos sectores, agricultura e industria, ambos con rendimientos constantes a escala, que se diferencian porque mientras el segundo utiliza solamente ambos tipos de trabajo, el primero emplea además tierra -en oferta fija-. Esta diferencia tecnológica es relevante, por cuanto que implica externalidades negativas en la cantidad total de trabajo empleado en el sector sobre la productividad de una empresa individual. La productividad multifactorial en ambos sectores crece a una tasa exógena (a diferencia de Galor-Weil) y el sector industrial solamente alcanzará beneficios positivos[96] cuando el nivel de esta es lo suficientemente elevado en comparación con los salarios reales. El sector industrial es relativamente intensivo en trabajo cualificado.

El vector de variables de estado del modelo es enteramente exógeno a las decisiones de los hogares representativos (comprendiendo los niveles de productividad y el número de individuos cualificados y no cualificados). Las preferencias dependen del consumo en el segundo período de vida, así como de las utilidades futuras tanto de los hijos cualificados y no, ponderadas por un coeficiente de altruismo dependiente negativamente del número total de hijos de la familia. Dada la exogeneidad del vector de variables de estado, las utilidades alcanzables por los descendientes inmediatos serán también consideradas como tales. Las preferencias de los adultos se maximizan respecto a su consumo en el segundo período de vida y el número de descendientes con cada grado de cualificación. Dada la estructura de los costes y la exogeneidad de las utilidades marginales asociadas a los hijos, las familias solo se enfrentarán a equilibrios esquina, pudiendo optar entre una prole totalmente cualificada o carente de educación; dadas dichas utilidades marginales, su relación con los precios relativos de criar a un niño con y sin cualificación determinará la decisión de los hogares. En la medida en que los salarios reales de los cualificados sean más elevados, la generación de niños no educados será relativamente más cara para las familias educadas, ya que el coste de oportunidad constituye una fracción superior del coste total en el caso de los niños no educados[97]. Además, al ser los costes de la fertilidad diferentes para las familias educadas y no educadas, no puede producirse en ambos grupos simultáneamente una solución de indiferencia sobre la cualificación a proporcionar, por lo que pueden producirse 3 situaciones diferentes: familias educadas tienen niños educados y las no educadas, no educados; familias educadas indiferentes y no educadas, no educados; familias educadas tienen niños educados y no educados, indiferentes. En el primer y tercer escenarios se observará movilidad social intergeneracional.

La transición demográfica a que da lugar el modelo está marcada por dos fases. En una primera, el régimen malthusiano, solo opera el sector agrícola, por lo que puede re-

---

[96] El programa de optimización de la empresa industrial es lineal respecto al número de trabajadores no cualificados, mientras que el de la agrícola es cóncavo, lo que explica que en este último sector no exista una limitación de actividad referida a los niveles de productividad multifactorial.

[97] El coste de la generación de un niño se compone de un requerimiento fijo de tiempo, de bien de consumo, más un coste derivado del pago al profesor en el caso de que el niño sea educado o menos los ingresos del trabajo infantil, si el niño permaneciera privado de capacitación toda su vida.

solverse el estado estacionario dentro del mismo, que arroja un valor constante de los salarios y de la ratio de cualificados sobre el total de la población. En ausencia de actividad del sector industrial no puede existir un cambio de régimen, ya que la mayor productividad del sector agrícola se traduce en salarios reales más elevados y una fertilidad más alta, aunque esta ahoga la productividad por trabajador en el sector y de nuevo la renta se sitúa en una senda decreciente. Cuando el crecimiento de la productividad en el sector industrial es tal que permite iniciar su actividad, se produce un crecimiento más fuerte en los salarios reales de los cualificados sin que disminuya la productividad del sector a consecuencia del empleo de una mano de obra más numerosa, pero incentivando a un mayor número de familias a educar a sus hijos. Si la diferencia en las producitividades de ambos sectores es suficiente, se tenderá a largo plazo a una situación en la que el output agrario constituirá una fracción desdeñable del output total, situación en la que puede resolverse un segundo estado estacionario sobre la tecnología del sector industrial. **La principal diferencia con Galor y Weil, no obstante, se centra en el comportamiento de la fertilidad en esta segunda fase: mientras en el trabajo de los primeros es inequívocamente decreciente, en este otro la comparación con aquella que caracteriza el estado estacionario agrícola presenta un signo ambiguo**. En efecto, por un lado la mayor inversión en calidad de la descendencia supone un efecto sustitución que penaliza la cantidad; pero al mismo tiempo, el mayor crecimiento de los salarios implica una pérdida más importante de peso de los costes fijos de la educación, con el consiguiente incentivo de la fertilidad.

Varvarigos (**2013a)** proporciona la perspectiva más reciente sobre transición demográfica, **siendo los rasgos más originales de su trabajo tanto el hecho de que el progreso técnico no juega ningún papel, como la ausencia de una trayectoria monótona de la fertilidad en la convergencia hacia el estado estacionario**. La estructura de su modelo es relativamente sencilla, habiendo dos elementos clave en la consecución de este resultado: las preferencias y la tecnología educativa. Las primeras, logarítmico-aditivas, dependen de tanto del consumo en el segundo período de vida como del número de descendientes y del capital humano que se lega a estos en ese mismo período; durante la juventud, se recibe pasivamente la educación proporcionada por los padres. El coste de generación de niños depende, como en otros modelos, de una cantidad fija del bien final por niño, así como del input de mercado asignado a tal fin. La estructura logarítmica de las preferencias asegura que la suma del gasto “autónomo” en niños como la del destinado a su educación serán una fracción constante de la renta disponible en todo equilibrio general.

Respecto a la acumulación, depende del input de mercado y del gasto público en educación per cápita, articulándose dicha relación del siguiente modo:

$$a_{s+1}^h = \varsigma G_0\left(\lambda \frac{g_s}{N_s}\right) + \theta G_1\left(\left(1-\lambda\right)\frac{g_s}{N_s}\right) x_s^h \text{ (3.70)}$$

En la anterior ecuación, G_0 y G_1 representan los servicios de distinta índole que proporciona el gasto educativo g, que actúan complementaria o sustitutivamente al gasto privado. Dichos servicios se financian íntegramente mediante un tipo exógeno sobre la renta del trabajo, conforme a la siguiente restricción del gobierno:

$$g_s = \tau e a_s^h N_s \text{ (3.71)}$$

Donde e es el salario real, constante. Efectuando las oportunas sustituciones, la ecuación de acumulación puede reformularse del siguiente modo, siendo los coeficientes combinaciones de los anteriores parámetros:

$$a_{s+1}^h = \varphi\left(a_s^h\right)^\eta + B\left(a_s^h\right)^\varepsilon x_s^h;\ \eta,\varepsilon \in \left(0,1\right) \text{ (3.72)}$$

El hecho de que $\varepsilon < 1$ implica que el stock de capital humano será constante en estado estacionario. El resultado básico del modelo en cuanto a la forma de transición demográfica se mantiene incluso aunque $\varepsilon = 1$ y el estado estacionario estuviera marcado por una tasa de acumulación constante del capital humano. estudio de la dinámica del modelo permite destacar **dos proposiciones**. **Primera**, cuando $\varphi > 0$ existen dos soluciones estacionarias: una con inversión privada positiva y otra con inversión privada nula, dependiendo de si el capital humano inicial se encuentra por encima o debajo de un determinado umbral. La razón de esta segunda solución es que, al actuar el gasto público independientemente del privado, si el stock inicial de los padres es demasiado bajo el incremento de utilidad a causa de la formación incremental de los niños no compensará la pérdida de consumo en que se incurre por el aumento del ahorro. Aun así, el stock estacionario de capital humano será positivo.

La **segunda** proposición concierne a la dinámica de la fertilidad en la transición hacia el desarrollo, que describirá un perfil de N. En una primera fase, para niveles del capital humano inferiores a los del equilibrio estacionario de subdesarrollo, al no invertirse en educación cualquier incremento de la renta se traduce en un aumento de la descendencia, dadas las preferencias logarítmicas. En la segunda fase, superado este umbral, la tasa de retorno del capital humano se hace suficientemente elevada como para que se haga positiva la inversión en este activo, con fracciones sobre la renta crecientes para este fin y decrecientes para el gasto autónomo en fertilidad. En una tercera y última fase, y aquí radica el elemento más novedoso del modelo, pese a que la proporción del gasto autónomo en fertilidad decrezca, el crecimiento de la renta es tan importante que en valores absolutos es posible un incremento del número de hijos, paralelo a un crecimiento continuo de la proporción de gasto en educación. De nuevo la existencia de este segundo nivel crítico de capital humano, positivo y mayor al estado estacionario de bajo desarrollo, estará supeditada a que $\varphi > 0$. Véase que, al ser la fracción del consumo sobre renta disponible constante, el componente autnomo de acumulación del capital humano garantiza una tasa de expansión de este superior a la que se observaría en su ausencia, ya que una parte de los impuestos devueltos se canalizarían indefectiblemente a consumo. Este mecanismo garantiza un crecimiento de la renta disponible suficientemente elevado como para que exista un segundo punto de inflexión en la trayectoria de la fertilidad hacia el estado estacionario de desarrollo.

Modelos de transición demográfica con mortalidad endógena. Uno de los primeros trabajos que combina fertilidad y mortalidad endógena es el de **Jones (2001)**, que incorpora tanto la estructura de innovación endógena de su artículo de 1995 como la restricción de consumo de subsistencia de Galor y Weil. El modelo que plantea, de generaciones sucesivas, es de optimización estática a partir de dos supuestos que le permiten esta simplificación: la dependencia de las preferencias (aditivas y de elasticidad de sustitución intertemporal constante) del consumo y del flujo de nacimientos por período[98], en lugar del tamaño de la prole, así como la dependencia de la probabilidad de defunción de la diferencia entre el consumo y el de subsistencia a nivel agregado y, por tanto, la exogeneidad de dicha probabilidad desde el punto de vista del agente individual. La tasa de mortalidad d será de este modo:

$$d_s = f\left(\frac{C_s}{\tilde{C}} - 1\right) + d \quad (3.73)$$

Siendo d la tasa de largo plazo, mayor que cero y f una función decreciente y que converge asintóticamente hacia cero. La tasa neta de crecimiento de la población evolucionará, por tanto, conforme a la diferencia entre el tasa de nacimientos por habitante y la tasa de defunción. En cada período los agentes asignan su tiempo entre tres fines: trabajo en la producción del bien de consumo, trabajo en el sector de investigación y producción doméstica de niños. La mejora de la tecnología se revierte hacia la productividad multifactorial en la tecnología de bienes de consumo, que depende con rendimientos constantes tanto de la fracción de trabajo asignada a este sector como del factor tierra, exógeno. La

98 Más concretamente, la desviación de los niveles de cada período respecto al consumo de subsistencia, por un lado, y al valor a largo plazo o estacionario del flujo de nacimientosi por periodo.

innovación tecnológica propicia el crecimiento del output de ambos sectores y, de ahí, de los salarios reales.

Existe un solo estado estacionario asintótico, en el que tanto la tasa de fertilidad como la de mortalidad tienden a sus valores estacionarios y la tasa bruta de crecimiento de la población se estabiliza. En dicho estado, las asignaciones de trabajo entre las tres opciones son constantes, como también lo es el cambio técnico y el crecimiento del output, que heredan directamente su tasa del crecimiento estacionario de la población. Véase por tanto que el capital humano no juega un papel directo en sentido estricto, sino que existe un capital-conocimiento impulsado estrictamente por el crecimiento de la población. En la transición al estado estacionario, la fertilidad experimenta dos fases: una inicial creciente y otra posterior decreciente, que se aproxima asintóticamente a su valor estacionario. En efecto, a medida que se incrementan los salarios reales, se producen 2 efectos distintos. Primero, un efecto riqueza, que favorece tanto el consumo como la fertilidad. Este efecto riqueza se ve favorecido por el hecho de que el consumo de subsistencia se abarata cada vez más, aunque este proceso es decreciente respecto a los niveles salariales alcanzados. Segundo, un efecto sustitución, por el cual el trabajo es cada vez más productivo en la producción de mercado, mientras que la tecnología de la producción doméstica de niños no varía[99]. **A medida que se elevan los salarios y siempre que la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo se mantenga en cierto intervalo, predominará el efecto sustitución, por lo que llegará un momento en que la fertilidad acabará descendiendo al prevalecer el consumo sobre la fertilidad en las preferencias del individuo.**

Kalemli-Ozcan (2002) opta por la renta per cápita como elemento determinante de la tasa de mortalidad. Para desarrollar una dinámica de transición en torno a esta premisa construye un modelo dinámico en el que las preferencias de los agentes siguen una especificación logarítmico-aditiva en el consumo de su segundo período de vida y la renta total de sus descendientes. Los costes de generación de hijos son los habituales, con un componente exógeno en términos de tiempo y otro variable, según el esfuerzo educativo desarrollado. La tecnología de acumulación presenta tasa de depreciación nula y depende del capital humano paterno, con rendimientos constantes, y del esfuerzo educativo, con rendimientos decrecientes. La función de producción, de rendimientos constantes, depende del capital humano y la tierra. Se diferencian dos variables relativas a la fertilidad: el número de niños alumbrados y el número de supervivientes a finales del

---

[99] Esta consiste en una relación proporcional entre el tiempo destinado a la producción domestica y el número de nacimientos.

período, mediando entre unos y otros una probabilidad de supervivencia. De este modo, la función de probabilidad del número de supervivientes seguirá una distribución binomial, cuya esperanza es el número de nacimientos por período multiplicado por una constante q (o probabilidad de supervivencia). A la vista de las cpo, es inmediato demostrar que el número de nacimientos será decreciente respecto a q (a más supervivencia, la reducción de la fertilidad permite recortar gastos y obtener la misma satisfacción) y la inversión en educación, creciente, al incrementarse los beneficios marginales de la inversión con una mayor supervivencia. Así, una elevación de q produce dos efectos en sentido contrario: uno puramente mecánico, de incremento de la población, y otro que va ganando peso a medida que q crece, de reducción de la fertilidad, dando lugar a una curva en forma de U invertida que relaciona crecimiento de la población y esperanza de supervivencia.

Para lograr una dinámica más rica, la variable q se hace depender de la renta per cápita a través de una función creciente y cóncava, lo que permite establecer una relación análoga de U invertida entre crecimiento de la población y renta per cápita. La transición demográfica aparece cuando se asocian los estadios iniciales de desarrollo con una renta per cápita baja y, el de desarrollo pleno, con una elevada renta per cápita. La dinámica del modelo presenta un estado estacionario malthusiano y estable y, dependiendo de ciertas condiciones paramétricas, otro de desarrollo con crecimiento a largo plazo. En el entorno del primero, el aumento de la renta per cápita lleva a una mayor supervivencia y disminución de la fertilidad, pese a lo cual la población aumenta (es el tramo ascendente de la U invertida). Sin embargo, dados los rendimientos decrecientes del trabajo y el aumento de la población, pronto el aumento de la renta per cápita se revierte, generando una disminución de la población y el retorno a la situación malthusiana. En el otro extremo, si los costes fijos de producción de niños y/o la ponderación del consumo y/o los rendimientos del esfuerzo educativo son suficientemente altos, la población caerá (en el caso contrario, su tasa bruta será asintótica a la unidad). En esta situación, la disminución de la población garantiza un aumento de los recursos per cápita, reforzados por el aumento de la inversión en educación, en un ciclo que se retroalimenta, garantizando así un crecimiento sostenido a largo plazo. La introducción de progreso técnico exógeno podría permitir sortear el estado estacionario malthusiano, logrando que, para un crecimiento dado de la población, el crecimiento de la renta sea mayor.

Para **Lagerlöf (2003),** el factor determinante de la tasa de supervivencia de las nuevas generaciones es la ratio entre el stock de capital agregado y el tamaño de la población, existiendo una relación creciente de la segunda hacia la primera, si bien la tasa puede verse recortada por shocks de mortalidad que siguen una distribución logarítmico normal. El input variable en la tecnología educativa es el tiempo y la productividad multi factorial depende del tamaño de la población, lo que confiere un efecto escala a la acumulación; tanto el tiempo de cuidado -exógeno- como el consagrado a educación operan como inputs en dicha tecnología, si bien la productividad relativa del primero es inferior a la del segundo. Las preferencias son, de nuevo, logarítimico-aditivas respecto al consumo del segundo período de vida, el número esperado de nacimientos que sobreviven al siguiente período y la posición en capital humano que adquirirán los descendientes. Las cpo establecen la habitual relación inversa entre el número óptimo de nacimientos en el seno del hogar y la inversión en educación de los niños y pemiten derivar una solución doble para la inversión en tiempo de educación, siendo esta nula o positiva según que la relación entre capital agregado y población sobrepase cierto umbral; más allá de este último, a mayor población mayor inversión en capital humano, siendo la válvula de transmisión entre ambas la productividad multifactorial en la tecnología de acumulación[100].

El estudio de la dinámica del modelo permite identificar dos posibles estados estacionarios. El primero, malthusiano, se caracteriza por una inversión nula en capital humano, lo que maximiza la vulnerabilidad de la población ante shocks de mortalidad. En este mismo equilibrio la fertilidad es máxima, pero el crecimiento de la población se ve socavado por una elevada tasa de mortalidad. En un segundo estado estacionario de desarrollo, la tasa de acumulación del capital humano es constante, como también el crecimiento de la población, si bien el primero crece a un mayor ritmo que el segundo; en consecuencia, la tasa de supervivencia tenderá a 1 y la vulnerabilidad de la población frente a shocks de mortalidad se hará mínima. El elemento que permite transitar entre uno y otro estado estacionario es una secuencia de shocks positivos de supervivencia, que permita elevar la ratio capital humano/población. El paso de uno a otro conlleva la transición demográfica, al disminuir la fertilidad; en el segundo estacionario la constancia de la inversión en capital humano estabiliza el número de nacimientos y, asintóticamente, la tendencia a la unidad de la tasa de supervivencia hace posible el crecimiento continuado de la población.

Ehrlich y Kim (2005) proponen una extensión de su modelo de 1991 en el que las probabilidades tanto de supervivencia en la niñez como en la edad adulta son función, para una determinada tecnología de cuidado de la salud, del nivel medio de consumo de los individuos durante su edad adulta (o al consumo de uno cualquiera de ellos, dado que los agentes son homogéneos, si bien las probabilidades de supervivencia se toman como dadas en las decisiones individuales). La función de utilidad se modifica ligeramente re-

[100] La productividad multifactorial es creciente respecto al tamaño de la población, si bien en el límite tiende a una cota positiva, reflejando así problemas de congestión que pueden incidir negativamente sobre la acumulación de capital humano.

specto a la versión anterior del modelo, de modo que aunque siguen dependiendo de los consumos de edad adulta y vejez, se introduce un componente estándar de altruismo que depende tanto del número de descendientes que sobreviven a su niñez como de la dotación de capital humano que estos adquieren. Las transferencias intergeneracionales durante la vejez de los agentes se sustituyen por las rentas de una fracción de la tierra -factor en dotación constante- que pertenece a cada familia. La función de producción del bien de consumo es una Cobb-Douglas de rendimientos constantes a escala en trabajo efectivo y tierra y la tecnología educativa presenta rendimientos constantes tanto en el capital humano como en el tiempo aplicado por los padres para transmitir conocimientos a sus hijos. La utilidad presenta elasticidad de sustitución constante en todos sus componentes, como en el modelo de 1991.

El modelo presenta dos posibles estados estacionarios, uno de estancamiento malthusiano y el otro, de crecimiento no acotado de las variables en niveles. El primero se genera cuando, en la relación dinámica $a_{s+1}^h = \phi + \xi a_s^h$, la ordenada en el origen es negativa y la pendiente es inferior a la unidad, lo que implica que la función nunca cortará la bisectriz del plano en el que se representan los stocks de períodos consecutivos; este tipo de curva genera unas condiciones globales en las que el único equilibrio estable es uno de inversión bruta nula en capital humano. Dadas las variables que configuran dicha ordenada en el origen, este tipo de equilibrio podría surgir por una reducida productividad en la tecnología educativa y/o un elevado factor de altruismo en las preferencias y/o unos bajos requerimientos exógenos en términos de tiempo de crianza de los niños (v, siguiendo nuestra nomenclatura). En este equilibrio el tamaño de la población adulta se hace constante: en efecto, aunque la fertilidad fuera elevada, los salarios reales se deslizarían a la baja, lo que deprimiría las posibilidades de supervivencia y, con ellas, el retorno de la fertilidad, tal que esta última variable se acabaría ajustando a un nivel en el que la evolución de los adultos se estabilizara. En el segundo estado estacionario, la ordenada en el origen de la relación dinámica del capital humano corta en el tramo positivo del eje. La tasa de acumulación del capital humano converge asintóticamente a una constante, al igual que el tiempo de aprendizaje y la fertilidad; en cualquier caso existe crecimiento no acotado a largo plazo. Las probabilidades de supervivencia se situarían en sus valores máximos, al crecer a largo plazo el nivel de consumo. A diferencia del equilibrio estacionario malthusiano, la población crecería a un ritmo constante[101], siendo el avance del número de adultos su motor. Véase que esta tipología de estados estacionarios es similar a la del modelo de

[101] La tasa de crecimiento estacionaria de la población puede ser positiva o negativa, ya que la fertilidada no guarda una relación inequívoca con el nivel mínimo de reposición, igual al inverso de la probabilidad de supervivencia entre la niñez y la edad adulta.

1991, solo que esta última se obtenía a fertilidad en su nivel mínimo de reposición vegetativa. En cualquiera de los dos casos, el que se tienda a uno u otro depende del valor relativo de los parámetros relevantes del modelo.

La transición demográfica se produciría a consecuencia de posibles shocks que llevaran a la economía del primer al segundo estado estacionario, en particular aquellos que alteran el origen de ordenadas y la pendiente de la relación dinámica entre los stocks de capital humano. Dependiendo del shock puede haber convergencia monótona o no de las variables entre estados estacionarios. Por ejemplo, imaginemos un aumento de la productividad del aprendizaje. Si esta tiene una magnitud importante, produciría una disminución temporal de la fertilidad incluso por debajo de su nuevo equilibrio estacionario, que se transmitiría al perfil de la población, para después converger hacia su nuevo valor a largo plazo.

En la última década han predominado las aportaciones sobre transición demográfica con mortalidad endógena que utilizan combinaciones de los enfoques de los trabajos anteriores. Por ejemplo, **Azarnert (2006)** hace depender la probabilidad de supervivencia del gasto en crianza a los niños en términos del numerario (va_s^h en nuestra notación), lo que indirectamente fija la acumulación de capital humano como ancla de la evolución de la supervivencia, siguiendo así parcialmente a Ehrlich y Kim. A la vez, la tecnología de acumulación, con depreciación unitaria y especificación Leontieff, genera un suelo de capital humano normalizado a 1 cuando el gasto en educación de los padres, corregido por un parámetro positivo de productividad, genera un nivel inferior al suelo. Las preferencias, logarítmicas, dependen del consumo y la renta de los descendientes que sobreviven. La combinación de supuestos lleva a un estado estacionario malthusiano cuando la productividad del gasto educativo es suficientemente baja, ya que el capital humano de la siguiente generación, con independencia de la distribución inicial de este, será más bajo que el de la anterior, con el consiguiente incremento de la mortalidad, el cual a su vez reduce los incentivos al gasto educativo, con lo que se acaba convergiendo a una generación en la que todos los individuos presentan el mínimo nivel posible de educación. Un salto en la productividad educativa determina la transición a un estadio más desarrollado, con un ciclo virtuoso de aumentos en la probabilidad de supervivencia, reducciones en el número de nacimientos e incremento en el gasto educativo. **Fioroni (2010a)** sigue una estrategia similar, al ligado supervivencia al capital humano de los padres tomando en consideración la correlación de este con una mayor atención y prevención de los problemas sanitarios de los niños, dando lugar al consabido esquema malthusiano para niveles bajos de capital humano inicial. A partir de aquí la autora compara los efectos de un sistema de educación público y privado en esta transición demográfica. Bajo un sistema de educación privado, un shock positivo sobre la tasa de mortalidad es contraproducente para la transición demográfica, ya que aumenta disminuye los costes relativos de la fertilidad frente a la inversión en educación cuando el nivel óptimo de esta es positivo. En un sistema público à la Croix y Doepke (2004) -ver capítulo 5-, la tasa de fertilidad es la misma para todas las familias al ser común el nivel de educación, por lo que su implantación en una escala adecuada puede permitir a las familias que se encuentran en un estadio de desarrollo reducir su fertilidad y pasar a un régimen de transición demográfica.

Cervallati y Sunde (2005, 2007) hacen depender del capital humano de la generación anterior no solo la tasa de mortalidad infantil, sino la esperanza de longevidad de los mayores[102]; la tasa de mortalidad depende de la renta per cápita, lo que sustenta la fase malthusiana de desarrollo. Se distinguen dos tipos de capital humano: el cualificado y el no cualificado. Ambos entrañan costes fijos de inversión en términos de tiempo, siendo estos mayores para el primero. Adicionalmente las tecnologías de acumulación dependen de la inversión en tiempo efectuada por los padres para los hijos, de las efectuadas por los propios adultos para sí mismos una vez dejada atrás la niñez y de una productividad individual de carácter aleatorio. La renta vital total se destinará a consumo y a las inversiones educativas en tiempo, destinadas a los descendientes y a sí mismos, estando aquella generada a lo largo de la duración esperada de la vida. Estos supuestos conviven con una tasa de innovación (reflejada en la productividad multifactorial de la tecnología del bien final) que depende también positivamente del capital humano y que está sesgada hacia el trabajo cualificado -input complementario del no cualificado en la función de producción agregada-, de modo que la productividad relativa de los dos tipos de trabajo es decreciente en la tasa de expansión de las innovaciones. Los legados educativos a los hijos en forma de tiempo serán crecientes en la tasa de innovaciones (a consecuencia de la obsolescencia del capital) y aumentos en la longevidad determinan efectos riqueza positivos tanto sobre la inversión en capital humano como en la fertilidad.

Dependiendo del valor inicial de las productividades relativas de los dos tipos de trabajadores, se distinguen un estado malthusiano y uno desarrollado, cada uno con un único estado estacionario. En el primero, la falta de cambio técnico determina legados bajos, esperanzas de vida cortas y elevadas tasas de mortalidad al tiempo que los incrementos en la renta quedan estrangulados por aumentos de la fertilidad, dada la reducida magnitud de los primeros. En el segundo, el cambio técnico lleva a inversiones en capital hu-

[102] El trabajo se basa en otras aportaciones previas sobre las consecuencias de extensiones exógenas de la longevidad sobre la acumulación de capital humano, como De la Croix y Licandro (1999), Boucekkine et al. (2002), Echevarría e Iza (2006, aunque con primera versión de 2004). Heidra y Romp (2006) es otro buen ejemplo, aunque posterior.

mano progresivamente sesgadas hacia su variante cualificada y, por tanto, más intensivas en tiempo, lo que detrae atractivo a la fertilidad, que a pesar del efecto renta positivo dado por la extensión de la longevidad, decae en la transición, resultado que se refuerza por una reducción de la tasa de mortalidad infantil, como en otros modelos. El proceso se estabiliza al llegar la longevidad y la tasa de supervivencia a sus cotas máximas exógenas.

La discusión sobre modelos OLG con mortalidad endógena está íntimamente entrelazada con el análisis del capital humano en su vertiente salud (ver capítulo 2) y su importancia en la dinámica de crecimiento, así como su interrelación con el capital humano-cualificación técnica, en la medida en que a menudo los condicionantes de aquella influyen en la acumulación de este segunda variante de capital humano. Los modelos basados en capital humano-salud, no obstante, no suelen presentar fertilidad endógena y en general la mejora de las condiciones de adquisición de este activo se traduce no tanto en una disminución de la fertilidad, sino en una potenciación de la intensidad del crecimiento del output, ya que no están orientados habitualmente a explicar el fenómeno de la transición demográfica.

El trabajo de **Morand (2004)** constituye un buen ejemplo en este sentido, al contemplar la acumulación de 3 activos reales: capital físico, capital humano-cualificación y capital humano-salud. El segundo de ellos (a^{hK}), en el que se invierte durante el primer período de vida, presenta rendimientos constantes en capital humano y decrecientes en gasto en educación, siendo el stock durante la juventud igual al de los adultos, como es habitual en OLG. El tercero (a^{hH}) presenta una estructura proporcional respecto al gasto en salud (m), de modo que la expresión formal de su tecnología, con una tasa de depreciación unitaria, es la siguiente:

$$a_{s+1}^{hH} = a_s^{hH} H(m_s);\ H' > 0;\ H'' < 0 \quad (3.74)$$

A diferencia del capital humano, el stock de salud de todo individuo durante su juventud se normalizará a 1. La salud tiene importancia especialmente durante el segundo período, en que se supone que favorece una mayor longevidad. Este efecto beneficioso se refleja en las preferencias individuales, en las que la salud interactúa con el consumo realizado durante la madurez:

$$U = u\left(C_{s-1}^{s-1}\right) + \beta u\left(C_s^s, a_s^{hH}\right); u_{ca} > 0 \quad (3.75)$$

En definitiva, aunque formalmente los períodos de vida no pueden prolongarse más allá de 2, la salud entra a formar parte de las preferencias à la Grossman, en la medida en que confiere un mayor disfrute del consumo. Por lo demás, la función de producción del bien de consumo es de rendimientos constantes, dependiendo del capital físico y el nivel de cualificación, y en ambas restricciones presupuestarias la fuente de recursos es la renta salarial, mientras que los empleos son el consumo en los dos períodos y la inversión en cada uno de los 3 tipos de capital en el primero de ellos; el precio unitario de los inputs sanitarios es 1, al igual que el de los de capital humano. El modelo se resuelve para una utilidad logarítmico-aditiva en todos sus componentes.

La cpo respecto al gasto sanitario permite establecer un nivel mínimo de consumo por debajo del cual aquel será nulo; los tramos de esta trayectoria más allá de este nive, que marcan la acumulación de capital salud, son denominados por el autor transición epidemiológica. En el caso de que se acumulen tanto capital físico como capital humano, una vez que se alcanza el nivel crítico de consumo la acumulación de salud produce dos efectos de signo contrario: por un lado, un efecto renta negativo, por cuanto supone un drenaje de recursos que no se podrán invertir en la acumulación de los restantes activos; por otro, un efecto sustitución, ya que incrementará el valor sombra del consumo del segundo período (dada la mayor longevidad que comporta una mejor salud), que incentivará una mayor inversión en los restantes activos. Cuál de estos dos efectos predomina depende de las relaciones entre parámetros, pero si es positivo, a partir del umbral las trayectorias del capital físico y la cualificación saltarán hacia arriba, reflejando mayores niveles en todo punto del tiempo. En entornos en los que no exista acumulación de capital humano y el consumo estacionario sea inferior al umbral, shocks positivos sobre la tecnología de producción sanitaria pueden desencadenar una reducción del umbral y precipitar un acceso a la transición epidemiológica.

La línea descrita de modelización es la más utilizada en los principales trabajos de esta rama. En **Finlay (2007)** el capital-salud, también de depreciación unitaria entre generaciones, es una variable determinante de la probabilidad de supervivencia en el segundo período de vida -el modelo no se concibe para explicar la transición demográfica, ya que no contiene fertilidad endógena-, función de probabilidad creciente y cóncava respecto a la inversión en salud efectuada en el primer período de vida. Aparte se distingue el capital humano-capacitación, del que depende la tecnología productora del bien final. En el primer período el hogar-productor utiliza sus recursos para financiar la inversión en ambos tipos de capital, mientras que en el segundo el consumo se iguala a la producción. En equilibrio general la correlación en la inversión en salud y capacidad es positiva, ya que a mayor valor sombra del consumo futuro más se intentará incrementar este, bien sea aumentando la probabilidad de supervivencia, bien generando una mayor producción futura[103].

[103] Fioroni (2010b) es otro caso representativo de una modelización en esta línea.

Ehrlich y Yin (2014), siguiendo la línea dominante en los trabajos de corte microeconómico sobre capital humano-salud, estudian sus complementariedades con el capital humano-conocimiento y, una vez más, explotan su modelo base de 1991, que extienden sin más que endogeneizar las probabilidades de supervivencia en el paso a la etapa adulta y a la vejez. Las preferencias de los adultos dependen, como es habitual, de los consumos de sus dos períodos de vida, así como del factor compañía. Las probabilidades de supervivencia en las dos fases dependen tanto del gasto en productos sanitarios y chequeos realizados por los padres hacia sus hijos (m_1), como del realizado por los adultos y que tiene por beneficiarios a los mayores (m_2), así como del capital humano de los adultos, capturando así la idea de que los conocimientos proporcionan un know-how en la atención sanitaria dentro del hogar. Por otro lado, la productividad marginal cruzada entre inputs es positiva dentro de la función de supervivencia. La función de producción es, como en versiones anteriores del modelo, lineal en el capital humano, lo que garantiza que los salarios reales serán unitarios y constantes, y la función de acumulación tiene rendimientos constantes tanto en el tiempo de aprendizaje como en el stock total de capital humano, que comprende el acumulable y la dotación genética, igual para todas las generaciones. El consumo del primer período es financiado con rentas laborales netas de los requerimientos de tiempo de los niños -tanto en crianza como en tiempo de educación, menos los gastos sanitarios para niños y mayores, así como una contribución impositiva sobre las rentas laborales. La restricción-flujo de este período se escribe por tanto como:

$$C_s^{s-1} \leq \left(a_s^h + \omega\right)\left(1 - vN_s - N_s n_s^h - m_{1s} - m_{2s} - \tau\right) \quad (3.76)$$

En cuanto al segundo período, el valor esperado de las transferencias a recibir por los viejos, única fuente de financiación de su consumo, vendrá dado por:

$$T_{s+1} \equiv \frac{\pi_1}{\pi_2} N_s \tau \left(a_s^h + \omega\right) \geq C_{s+1}^s \quad (3.77)$$

La resolución del modelo pone de manifiesto en sus cpo la interacción entre los dos tipos de capital. Las inversiones en capital-salud serán mayores cuanto más elevado sea el capital humano, ya que tanto mayores serán las probabilidades de supervivencia de los niños y, consiguientemente, mayor el disfrute de su compañía en la vejez. Recíprocamente, las inversiones en capital humano dependerán positivamente de las realizadas en salud, ya que estas aumentarán las posibilidades de percibir rentas y compañía en la última etapa de la vida. Esta dependencia se traslada al estado estacionario, en que los 3 tipos de inversión son constantes, revelando una relación positiva entre la tasa de crecimiento estacionaria endógena y la inversión en salud efectuada en los niños, mientras que la realizada hacia los mayores no tiene impacto en el crecimiento y responde solamente al valor del aseguramiento para los adultos.

Varvarigos y Zakaria (2013) estudian las complementariedades entre gasto sanitario público y privado, tomando la tecnología de acumulación de Bhattacharya y Quiao (2007), aunque el modelo también permite explicar la transición demográfica. En su modelo, de OLG con 2 períodos de vida, la fertilidad es endógena y se decide durante la juventud del individuo, durante la cual este se beneficia también del gasto sanitario per cápita del gobierno (m_s^p), que se financia mediante impuestos sobre las rentas del trabajo. Los gastos en sanidad públicos son complementados mediante gastos privados en la vejez $\left(m_s^{pr}\right)$, a diferencia del artículo de referencia de 2007, de manera que la tecnología productora de capital humano-salud (el único existente en la economía) es la siguiente:

$$a_{s+1}^{hH} = B\left(m_{s+1}^{pr}\right)^{\gamma x_s^p} \quad (3.78)$$

El cuidado de los niños conlleva, como es habitual, unos requerimientos exógenos de tiempo. La función de producción, de rendimientos constantes a escala, depende solamente de capital físico y de unidades efectivas de trabajo aplicadas por el conjunto de trabajadores, las cuales son, una vez normalizadas, 1 menos el tiempo detraido por el cuidado de los hijos. Dada la homogeneidad de grado 1, esta función puede reexpresarse en términos per cápita como dependiente del capital físico per cápita y del tiempo de trabajo efectivo por empleado. El capital físico es el único activo en que se materizaliza el ahorro en el primer período de vida.

La principal propiedad del modelo es que esta distribución de gasto sanitario fomenta el ahorro en la juventud, ya que la acción del gasto sanitario público aumenta la productividad marginal del gasto privado en la vejez, induciendo a desplazar más recursos hacia el futuro. También por esta razón, la relación que rige la dinámica del stock de capital físico per cápita es creciente, en la medida en que, a mayor stock en la fase de juventud, mayor gasto en sanidad per cápita, mayor adquisición de capital físico en el período posterior y menor fertilidad. Esta relación creciente puede ser cóncava en todo su recorrido, en cuyo caso genera dos estados estacionarios (el esquina, inestable, y el de crecimiento positivo con un nivel de fertilidad, gasto sanitario privado y capital per cápita constante, estable); no obstante, si se producen puntos de inflexión, puede darse lugar a más de un estado estacionario con crecimiento positivo[104]. La implicación hacia la dinámica de transición es, pues, clara, si se toma un intervalo arbitrario de capital físico per cápita en el que no haya ningún estado estacionario salvo en su extremo superior.

III.3. Otros enfoques en equilibrio general.

Además de la línea de Uzawa, que supone la transposición del enfoque de Becker a equilibrio general, pueden encontrarse otros enfoques relevantes desarrollados en equilibrio general en los que la inversión en capital humano juega un papel destacado, bien en el contexto de agentes representativos o de OLG. Los principales son los relativos a innovación endógena, on-the-job training (OJT), y capital social institucional. En puridad convendría mencionar también los de economía de la salud, aunque estos básicamente recogidos en el recorrido efectuado por los modelos de longevidad endógena en equilibrio general con OLG. A continuación se ofrece una panorámica general sobre sus principales caracteríticas modelizadoras, aunque por razones de extensión de este trabajo esta será necesariamente muy sintética.

III.3.1. Modelos de learning-by-doing e innovación endógena.

Learning-by-doing. Lucas (1988) diseña, sobre una base analítica similar a la de su modelo clásico de “learning or doing”, otro de “learning by doing” (LBD), desarrollando el concepto de Arrow (1962) mediante lenguaje beckeriano. En esta versión del modelo existen dos bienes de consumo en la economía, C_1 y C_2 , siendo el primero de ellos el que utiliza una tecnología más sofisticada; la participación del trabajo en la producción de cada uno de ellos proporciona la posibilidad de incrementar el stock de capital humano sin necesidad alguno de detraer tiempo de trabajo y conforme a la siguiente función de aprendizaje de rendimientos constantes:

$$a_{s+1}^{h,i} = B^i a_s^{h,i} n_s^{w,i} + a_s^{h,i};\ i = 1,2;\ B^1 > B^2 \quad (3.79)$$

$$n_s^{w,1} + n_s^{w,2} = 1 \quad (3.80)$$

Como se aprecia a la vista de las ecuaciones anteriores, el capital humano es específico a cada uno de los sectores productivos. De nuevo la tasa de depreciación se su-

[104]Cuando, como en Bhattacharya y Quiao, se traslada la realización de gasto privado en sanidad al primer período de vida -relación en una línea más beckeriana- la relación de complementariedad entre ambos tipos de gasto sanitario persiste, aunque el ahorro depende negativamente del stock de capital fisico per cápita, lo que no permite excluir la posibilidad de equilibrios periódicos y fluctuaciones endógenas.

pone igual a 0. Las funciones de producción de cada uno de los bienes de consumo se basan, por simplicidad, en la aplicación de un solo factor productivo, trabajo, y presentan rendimientos constantes a escala, conforme a la siguiente especificación:

$C_{i,s} = n_s^{wi} a_s^{h,i};\ i = 1,2$ (3.81)

El tamaño de la población se mantiene constante. Por último, las preferencias tienen una estructura CES:

$u_s = \left[\alpha_1 C_{1,s}^{-\rho} + \alpha_2 C_{2,s}^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}};\ \alpha_i \geq 0;\ \rho > -1$ (3.82)

Se toma como numerario el primero de los bienes y se denomina p el precio relativo del segundo bien en términos del numerario. Con estos supuestos y suponiendo la existencia de un activo financiero que proporciona un rendimiento bruto 1+r por período, puede plantearse ya el problema de optimización completo como maximización de la función de utilidad, sujeta a la restricción presupuestaria flujo y a las funciones de producción de cada una de las tres tecnologías. Las variables de control tiempo de trabajo en cada sector, junto con las posiciones óptimas en cada una de las clases de capital humano, permitirán definir la producción de ambos bienes de consumo por período. Las cpo determinan que la cantidad consumida de C_2 será inversamente proporcional a su precio relativo y que, por tanto, crecimientos de p van acompañados de mayores aumentos de la producción del bien 1 y, al ser el capital humano específico su único factor productivo, mayores expansiones asociadas a este tipo de activo real que al espeífico en el sector 2.

Hechas estas consideraciones, se plantean 3 situaciones posibles, en función del grado de la elasticidad de sustitución entre los dos bienes de consumo, que dada su especificación será $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$. Cuando los bienes son buenos sustitutos (elasticidad mayor que 1) entonces el equilibrio en el precio relativo p es inestable: siendo p^* el nivel de precios asociado a la estabilización, si el nivel de partida es inferior, entonces p inicia un descenso hasta cero, mientras que si es superior, comenzará a crecer sin cota. Por tanto la economía tiende a la monoespecialización en uno de los dos bienes; en cuál de ellos dependerá del valor inicial de p. Si es superior al valor de equilibrio, esto indica una mayor eficiencia en el bien 1, que se irá acentuando con el tiempo al ser el bien 2 progresivamente más caro en comparación con el 1; esta tendencia a la especialización total será posibe en tanto en cuanto la sustituibilidad entre bienes en este escenario es elevada. Desde el punto de vista de los oferentes de tiempo de trabajo, el incremento relativo de producción en el primer sector eleva relativamente los salarios reales en este último, por lo que se generan los incentivos adecuados a desplazar la asignación de tiempo en ese sentido. Además se trata de un proceso que se retroalimenta en el tiempo, ya que la mayor asignación de tiempo al sector 1 hace más eficiente el trabajo en este sector en períodos posteriores.

Por el contrario, cuando la elasticidad de sustitución es baja y $\sigma < 1$, la trayectoria de los precios relativos converge hacia el de equilibrio y a largo plazo estos se estabilizan, de modo que la acumulación de capital humano específico en cada sector se orienta hacia una igualación de las tasas de retorno en cada uno de ellos. Finalmente, cuando la elasticidad de sustitución es unitaria, la asignación inicial de tiempos se mantiene a lo largo del horizonte, rigiéndose la primera por los pesos relativos de la demanda en cada sector; el precio relativo mantiene en todo momento una tasa de variación positiva o negativa que será tanto mayor cuanto mayor sea la productividad marginal del tiempo en la función de aprendizaje de 1 en comparación con 2 (esto es, más intenso sea el proceso de learning by doing en 1) y mayor sea el peso en las preferencias del bien 1 en relación al 2 -a mayor preferencia por 1, más trabajo se asigna a este sector y más eficiente se convierte en el tiempo-.

En resumen, dejando de lado la inclusión de capita físico en las funciones de producción de los bienes de consumo, este modelo de LBD presenta algunas semejanzas muy importantes con el de aprendizaje presentado por Lucas en el mismo artículo de 1988. En primer lugar, en ambos la acumulación de capital humano conlleva un sacrificio: en el de aprendizaje, en términos de sacrificio de renta y en el de LBD, porque puede implicar la renuncia al mix deseado de producción cuando la elasticidad de sustitución es elevada. En segundo, la solución descentralizada puede no coincidir con el óptimo social: en el de aprendizaje esta circunstancia se produce cuando hay externalidades en F, mientras que en el de LBD sería aconsejable subsidiar la producción del bien que presente una mayor combinación $B^i\alpha^i$ si por cualquier razón la economía transita hacia una especialización en sentido contrario.

Lucas (1993) opta esta vez por un enfoque unisectorial para modelizar el proceso de LBD. Al igual que en su trabajo de 1988, la diferencia esencial con Arrow es el hecho de que la fuente de la mejora de la eficiencia del factor trabajo no es el contacto con una nueva tecnología de capital, sino el mero transcurso del tiempo en contacto con la producción de un bien; de hecho el capital físico tampoco forma parte del modelo como factor productivo. Así pues, las dos ecuaciones básicas del modelo son tanto la función de producción de un bien genérico y la ley de movimiento del factor experiencia:

$$Y_s = AN_s\left(a_s^h\right)^{\alpha} \quad (3.83)$$

$$a_{s+1}^h - a_s^h = N_s\left(a_s^h\right)^{\alpha} \quad (3.84)$$

Dentro de la función de producción del bien que genera el efecto aprendizaje, se distingue un parámetro relativo al número de trabajadores (al estar ausente el tiempo, puede suponerse una jornada de trabajo inelástica). La ecuación dinámica contiene de nuevo un efecto escala, al ser relevante el número de trabajadores que prestan sus servicios para la acumulación de experiencia. Por lo demás, cuando el modelo se transforma en tiempo continuo, es posible solucionar la ecuación en diferencias en el stock de experiencia del trabajador y sustituir esta variable en la función de producción, resultando una producción dependiente del número medio de trabajadores empleado a lo largo de la senda, así como del stock inicial del activo y del número de períodos transcurridos desde el comienzo de la senda:

$$Y_s = A\bar{N}\left[a^h(0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\bar{N}(s-0)\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.85)$$

Algunos modelos en el ámbito de LBD, como los 2 siguientes que van a comentarse, combinan la acumulación de eficiencia del trabajo en el seno de una tecnología con la endogeneización de la elección de las mismas, amoldándose así a un esquema de optimización intertemporal de la renta de la empresa. **Parente (1994)**, asimilando al igual que Lucas la experiencia a un stock de conocimiento acumulable por el factor trabajo, analiza el comportamiento óptimo en equilibrio general de una economía compuesta por hogares productores cuyas tecnologías dependen de la experiencia acumulada como único input productivo; a diferencia de Lucas, se admite la posibilidad de incorporación de una nueva tecnología y se endogeneiza tal decisión. Estas funciones de producción presentan la siguiente forma:

$$Y_s = A_s^i a_s^h \quad (3.86)$$

Las distintas tecnologías existentes en un momento del tiempo se numeran en función de su eficiencia. El tiempo durante el cual una empresa produce manteniendo una cierta tecnología permite la acumulación de experiencia, aunque a un ritmo decreciente. Este proceso se sintetiza a través de la siguiente tecnología:

$$a_{s+1}^h = \lambda - \lambda a_s^h;\ \lambda > 0 \quad (3.87)$$

A su vez, la propia estructura de esta tecnología obliga a que la experiencia adopte valores en el intervalo $[0,1)$. En cada período la empresa puede siempre optar por incorporar una tecnología más eficiente a un coste directo nulo. Sin embargo, el coste se produce en términos de pérdida de experiencia al saltar a la nueva tecnología: dependiendo del grado de similitud de ambas, una parte de la experiencia acumulada se mantendrá, pero otra no podrá ser apovechable al nuevo entorno. En general se supondrá que esta pérdida se compone de un elemento fijo y otro variable en función de la lejanía en la escala tecnológica de ambos métodos de producción:

$$perdida \equiv L \equiv \kappa_1 + \kappa_2 \frac{a^h_{s+1}}{a^h_s} \quad (3.88)$$

Así, sea j un salto tecnológico cualquiera llevado a cabo por una empresa en el momento s_j . Denominando a^h_{sj-} el stock de capital acumulado antes del salto, se tendrá que el stock posterior al salto, a^h_{sj+} , está dado por $a^h_{sj-} - L_j$. Desde el punto de vista de la producción, la adopción de una nueva tecnología genera por tanto un trade-off, ya que por un lado aumenta la eficiencia productiva, pero por otro erosiona parte del capital humano-experiencia acumulado hasta la fecha del cambio. Combinando esta última ecuación con la de acumulación del capital humano-experiencia, se tiene:

$$a^h\left(s_j, a^h_{j+}, s\right) = 1 - \left(1 - a^h_{j+}\right) e^{-\lambda\left(s - s_j\right)} \quad (3.89)$$

Sea la función $T\left(\hat{a}^h, a^h_{j+}\right)$ la función que determina el tiempo que, en el seno de una determinada tecnología, es necesario para que una empresa alcance un stock de capital humano $\hat{a}^h$ partiendo de uno dado por el segundo argumento de la función tras el último salto. Partiendo de la ecuación (), puede deducirse directamente que T debe adoptar la forma:

$$T\left(\hat{a}^h, a^h_{j+}\right) = -\frac{1}{\lambda} \lg\left[\frac{1 - \hat{a}^h}{1 - a^h_{j+}}\right] \quad (3.90)$$

Con estos instrumentos y dado un número finito de posibilidades tecnológicas, el hogar representativo puede resolver su equilibrio en dos pasos: en el primero maximizará su renta intertemporal, esto es, el flujo de producción, escogiendo una senda óptima de modalidades tecnológicas; se demuestra que, para cada valor inicial del capital-experiencia, existirá una senda factible que resuelve el problema del hogar representativo. En el segundo paso, una vez evaluada la corriente de producción descontada en esta senda óptima, maximizará su utilidad sujeta a una restricción presupuestaria que iguale la senda descontada de consumo a la senda descontada de producción. El modelo presenta, como los anteriores comentados de LBD, efecto escala, puesto que los efectos de incremento neto de eficiencia productiva al adoptar una nueva tecnología se amplifica al tomar decisiones de este tipo la totalidad de los individuos que pueblan la economía, con independencia de cuál sea la distribución de experiencia en el período inicial. En estado estacionario, el output per cápita crecerá a una tasa constante, compatible con la maximización de la utilidad de los agentes. Dicha tasa será directamente proporcional al tamaño de los saltos tecnológicos e inversamente proporcional al ritmo de acumulación de experiencia dentro de una tecnología. **Jovanovic (1996)** elabora una versión estocástica del modelo de Parente cuyos trazos principales pueden encontrarse en el Anexo 2.

La línea modelizadora de LBD tiende a abandonarse a partir de mediados de los 90, principalmente por dos razones. Primero, eran modelos excesivamente rígidos en su planteamiento, al exogeneizar las relaciones entre acumulación de capital físico y/o output y acumulación de capital humano; de hecho las mejoras tecnológicas se plasmaban en simples incrementos de la eficiencia del trabajo, los cuales acababan mimetizándose con la acumulación de capital humano. Segundo, tras la aparición de la primera generación de modelos de crecimiento endógeno de Romer y Lucas, el marco analítico mejora y se hace evidente la posibilidad de explicar determinadas mejoras de la tecnología como resultado de decisiones asignativas a un sector específico intensivo en capital humano; de este modo mejora el tratamiento conceptual de la evolución tecnológica y se pone de relieve su complementariedad con aquel activo real, y no tanto el mero "*embodiment*" en el trabajo.

Romer (1990a) elabora un modelo de endogeneización del cambio tecnológico (representado a través de la generación e incorporación de patentes a los procesos productivos) en el que intervienen dotaciones fijas de capital humano. Este planteamiento suponía una solución novedosa a la línea modelizadora tradicional del cambio tecnológico endógeno. En efecto, los autores posteriores a Solow (1956,1957) consideraban el cambio tecnológico como un factor no rival que, en el marco de una función de producción de rendimientos constantes en los factores rivales, generaba la imposibilidad de la empresa que se beneficiara de ella de sobrevivir en el mercado siguiendo un comportamiento paramétrico en precios[105]. Diversos autores anteriores a Romer habían proporcionado distintas soluciones a este problema de la remuneración del progreso técnico. Shell (1966) propuso, a modo de ejemplo, una estructura institucional en la que el gobierno era el proveedor del factor conocimiento, financiando mediante impuestos sobre la producción un proceso en el que existe en cada período una probabilidad constante de éxito en la actividad investigadora. La solución que propone Romer es sustancialmente diferente y co-

[105] Si, por los rendimientos constantes a escala en el factor rival, se verifica que

$$f(A,\lambda k)=\lambda f(A,k) \text{ y } f(A,k)=k\frac{\partial f}{\partial k}\Rightarrow \mathrm{f}(A,k)<A\frac{\partial f}{\partial A}+k\frac{\partial f}{\partial k}$$

herente con una economía de mercado, asignando un precio competitivo a la patente y endogeneizando su proceso de productivo a partir de la contribución del capital humano.

Romer distingue dos tipos de capital humano: primero, el de tipo "físico", que puede aproximarse por un conjunto de facultades de coordinación motriz y capacidad física y el segundo, de tipo cognitivo, producto de la educación asimilada y que puede proceder tanto de procesos de escolarización como de aprendizaje en el seno del trabajo. Tanto la dotación del capital humano físico $a_s^{h,p}$ como la del cognitivo $a_s^{h,K}$ son exógenas[106] (en su segundo artículo de 1990 Romer endogeneizará, como veremos, la acumulación de todos los tipos de capital humano). En cuanto a los sectores productivos, se distinguen tres: el de bien de consumo final, el de inputs duraderos del bien de consumo y el de patentes. En definitiva, se trata de un modelo de tres sectores en el que dos de ellos serían paralelos a los de Lucas-Uzawa (consumo y producción del activo generador de crecimiento endógeno, que en este caso sería la patente) y se individualiza uno nuevo, inputs duraderos o variantes de capital físico[107], que en los modelos de crecimiento habitualmente comparte naturaleza con el bien de consumo. El capital humano cognitivo ofrece sus servicios tanto en el sector de bien de consumo como en el productor de patentes, mientas que el capital humano físico se ubica exclusivamente en el primero de aquellos.

El sector productor de bien de consumo final funciona con rendimientos constantes a escala y opera en régimen de competencia perfecta. Deriva sus ingresos a partir de la venta de su output a los consumidores mientras que sus costes proceden de la retribución a sus factores productivos, tanto los variables (alquiler de los inputs duraderos, capital

---

[106] Nelson y Phelps (1966) habían desarrollado también un modelo de endogeneización tecnológica en la que el nivel de capital humano -dado- jugaba un papel gregario respecto al crecimiento del nivel de desarrollo tecnológico incorporado en cada generación de capital. En concreto, a partir de una función de producción en la que el progreso tecnológico es de tipo neutral Harrod (aumenta, por tanto, la eficiencia del trabajo), este factor depende tanto del ritmo de difusión "potencial" de la tecnología, exógeno, como positivamente del nivel de capital humano, en la medida en que este reduce el lag entre el ritmo máximo de difusión tecnológica y su aplicación efectiva a la producción. En cualquier caso, estos autores no llegan a discutir el tipo de rendimientos de la función de producción ni el impacto sobre la convexidad de la función de producción de la incorporación del progreso tecnológico endógeno.

[107] Para solventar los problemas de agregación, que exigiría la sustuibilidad de los diferentes inputs duraderos para poder ser representados por uno solo, K, se considera un vector de aquellos en lugar de capital físico.

humano cognitivo) como los fijos (capital humano físico). La optimización de su beneficio, partiendo de una Cobb Douglas de rendimientos constantes, pasa por la elección de su vector de inputs duraderos tomando como dado la fracción de capital humano cognitivo con cuyos servicios contará:

$$B_s^c = \left(a_s^{h,p}\right)^{\alpha}\left(n_s^c a_s^{h,K}\right)^{\beta}\sum_{j=0}^{M}\left(x_s^j\right)^{1-\alpha-\beta} - \sum_{j=0}^{M} p_s^j x_s^j \quad (3.91)$$

En la anterior expresión, x representa el vector de inputs duraderos, p^j el precio relativo de cada uno de estos inputs en términos del bien de consumo y n_s^c la fracción del capital humano cognitivo asignado a la producción de bienes de consumo; alternativamente puede pensarse en la existencia de una disponibilidad total de tiempo que se divide en dos subperíodos, cada uno de ellos dedicado a la producción en cada uno de los sectores pertinentes. La anterior ecuación de beneficio se maximiza respecto al vector x y a partir de la correspondiente condición de primer orden puede derivarse una función de demanda de cada uno de los componentes del vector de inputs.

Cada productor de inputs utiliza en su tecnología dos inputs: los restantes inputs y las patentes necesarias (cada patente hará posible el lanzamiento de un input nuevo). El hecho de que cada productor sea generador único de cada clase de input y de que la sustuibilidad entre estos últimos sea limitada, conduce a que estos productores actúen en régimen de competencia monopolística y por tanto estén dotados de un cierto grado de poder de mercado, pese a que la entrada en su sector pueda considerarse libre. Una vez determinada la inversión en patentes, el beneficio de estos productores vendrá dado por su facturación (dentro de la cual la demanda del input se determina por el productor representativo de bien de consumo) menos los costes variables de producción, siendo la variable a optimizar la cantidad producida de input[108]. Expresado formalmente:

$$B_s^{xj} = p_s^j(x_s^j)x_s^j - VC(x_s^j) \quad (3.92)$$

Además del nivel de producción de input, deberá decidir la inversión en la patente. Para ello deberá tenerse en cuenta que: i) el funcionamiento del mercado de patentes es competitivo, de suerte que cada productor de inputs opera paramétricamente respecto al precio de las patentes P_A; ii) el funcionamiento competitivo del mercado implica también el cumplimiento de la condición de beneficios nulos intertemporales en la utilización de la patente, esto es, la corriente descontada de los beneficios derivados de la producción del input ligado a la patente se igualarán al precio de esta.

[108] Las tasas de depreciación de los inputs duraderos se suponen, por simplicidad, nulas.

Finalmente, el sector productor de patentes se caracteriza por poseer una función de producción lineal del tipo:

$A_{s+1} = A_s \theta n_s^A a_s^{hc}$ (3.93)

Es precisamente esta estructura lineal, asociada a rendimientos constantes de las patentes, la que posibilita tasas de crecimiento estacionario positivas para las variables endógenas del modelo, con excepción de las fracciones de tiempo asignadas a cada uno de los usos del capital humano cognitivo, que serán constantes a lo largo de la senda estacionaria. En un contexto en que las dotaciones de capital humano permanecen constantes, esta es la ecuación equivalente a la función de producción de capital humano en el Lucas-Uzawa. El precio de la patente, p_s^A , se obtiene teniendo en cuenta que se iguala a la corriente descontada de beneficios del productor del input ligado a la patente. Por último, hay que tener en cuenta que el capital humano percibe la totalidad de las rentas generadas en el sector de patentes (es el único factor y los beneficios de este deben igualarse a cero), por lo que puede establecerse la igualdad:

$e_s = p_s^A \theta A_s$ (3.94)

La remuneración al capital humano cognitivo se igualará también a su productividad marginal en el sector de bienes de consumo, pudiéndose despejar de esta ecuación la fracción de tiempo destinada a la producción de Y. La fracción de tiempo asignada a la producción de patentes puede derivarse residualmente.

Para cerrar el modelo, las preferencias de los consumidores vienen dadas por una función de utilidad de elasticidad de sustitución intertemporal constante que dependen exclusivamente del bien de consumo. La ecuación de equilibrio en el mercado de bienes establece que la totalidad de la producción de la economía debe igualarse ex ante a la demanda de bien de consumo más el conjunto de bienes de capital, adecuadamente ajustados por sus precios relativos en términos de bien de consumo. A esta ecuación puede llegarse también reordenando la restricción presupuestaria flujo del consumidor representativo, partiendo del supuesto de que los ingresos de este último se componen de las rentas del capital humano cognitivo[109] más los beneficios de las empresas productoras tanto de bienes de consumo como de inputs duraderos. Al agregar estos beneficios, el importe de los alquileres de los inputs duraderos desaparece, al consituir un ingreso para los prime-

---

[109] En el desarrollo de Romer no se hace ninguna referencia a la retribución del capital humano-físico. Podemos suponer que este es un factor que se oferta inelásticamente al productor de bienes de consumo y que se remunera indirectamente a través del salario al capital humano-cognitivo, en la medida en que sus productividades marginales cruzadas son positivas.

ros y un coste para los segundos, y los costes variables de producción de los inputs duraderos constituyen la inversión de la economía, al ser iguales al sacrificio necesario de bien de consumo en cada uno de ellos para alcanzar la producción deseada. Finalmente, las rentas del capital humano cognitivo recibidas por el trabajo en la producción de bien de consumo se cancelan con los costes de utilización de trabajo para este sector y las percibidas en el sector de patentes se compensan también con el coste fijo que para el sector de inputs duraderos supone la adquisición de la patente. En definitiva, los elementos que perviven en la restricción flujo después de este proceso de simplificación son el output final, el consumo y la inversión en el vector de inputs duraderos.

El equilibrio general corresponderá a un conjunto simultáneo de decisiones conforme a las cuales: i) los hogares tomen sus decisiones de consumo y ahorro dada una senda conocida de tipos de interés; ii) los propietarios de capital humano decidan cuánto tiempo trabajar en cada sector, dadas las variables relevantes que determinan la rentabilidad en cada uno de ellos (precio de las patentes, salarios ofertados por los productores de bienes de consumo y stock disponible de patentes); iii) los productores de bien final eligen cantidades contratadas de capital humano y un vector de inputs intermedios duraderos, conociendo los precios de alquiler de cada uno de ellos; iv) cada empresario productor de inputs intermedios, en régimen de competencia monopolística y dada la demanda de su input a que se enfrenta -previa adquisición de la correspondiente patente- determina óptimamente los precios de los inputs a partir de la maximización de su beneficio; v) los nuevos entrantes en el sector de inputs adquieren sus patentes, tomando sus precios como dados y vi) se vacían todos los mercados. Para resolver la senda de equilibrio estacionario, es posible expresar el capital (como sumatorio ponderado del conjunto de inputs) en función del stock de patentes y, suponiendo un crecimiento constante para estas en virtud de la función lineal de acumulación supuesta, el conjunto de inputs acabará creciendo a la misma tasa en estado estacionario, mientras que los dos tipos de capital humano aumentan la tasa de crecimiento del output respecto a la ya proporcionada por el progreso tecnológico en forma de expansión del stock de patentes. **Romer (1990b)** plantea un modelo basado en premisas muy similares a las anteriores, aunque con un desdoblamiento del capital humano cognitivo en varias categorías y levantando la exogeneidad de los niveles de capital humano. El anexo 5 ofrece una síntesis del mismo.

Aghion y Howitt (1992,1998) plantean un esquema muy semejante al de Romer y, como tal, con dotaciones fijas para las distintas clases de capital humano pero introduciendo, como principal novedad, el concepto schumpeteriano de destrucción creativa en el mercado de patentes, con sustitución sucesiva de monopolistas en la producción de innovaciones. Además, dichas innovaciones se asocian directamente al parámetro de productividad multifactorial en la tecnología del bien final. Esta configuración, si bien no añade esencialmente nada al modelo de Romer en términos de la simultaneización de innovación y acumulación de capital humano, tuvo una fuerte influencia en la estructura de la siguiente generación de modelos de innovación endógena. **Acemoglu (2012)** propone otro modelo, infuido por características tanto de Romer como de Aghion y Howitt, aunque más directamente de Gancia y Zilibotti (2009), con dotaciones fijas de dos tipos de trabajo, con alto y bajo nivel de cualificación (que pueden asociarse a diferentes clases de capital humano), siendo las actividades de innovación y estandarización los principales demandantes de cada uno de ellos. Las cpo permiten mostrar una complementariedad entre ambas a la hora de generar crecimiento del output, de modo que en estado estacionario el incremento de este podrá lograrse con aumentos de las dotaciones de uno u otro tipo de capital humano, dependiendo de en qué punto de la curva que relaciona crecimiento del output y estandarización se encuentre la economía (ver Anexo II).

Jones (1995) propone un marco que recoge las principales características de los trabajos de Romer y Aghion-Howitt de un modo formalmente más cercano al enfoque tradicional del capital humano, al tiempo que sugiere alternativas para evitar los efectos de escala. Así, plantea una economía bisectorial con un sector productor de bienes de consumo y otro de conocimiento. El trabajo existente se reparte entre ambos sectores. El output del sector conocimiento actúa conjuntamente con las unidades de trabajo, aumentando su eficiencia; podríamos hablar por tanto de un activo “conocimiento” representativo de algunas dimensiones del concepto tradicional de capital humano que, en lugar de adquirirse a través de aprendizaje, se generalizaría entre los trabajadores un vez se hubiera producido, aumentando su eficiencia en ambos sectores. La función de producción del bien de consumo es una Cobb-Douglas de rendimientos constantes en el conjunto de los inputs, con la siguiente identificación:

$$Y_s = \left(A_s n_s^c\right)^\alpha \left(K_s\right)^{1-\alpha} \quad (3.95)$$

Por otro lado, existen distintas especificaciones posibles para la producción de conocimiento. Una, à la Romer, es generadora de crecimiento endógeno, aunque presenta efectos escala en tanto n suele interpretarse en este contexto como número de trabajadores que intervienen en los procesos productivos:

$$A_{s+1} = BA_s n_s^A \quad (3.96)$$

Sin embargo esta no es la única posibilidad. Otra tecnología que mantendría el resultado de crecimiento endógeno y que sin embargo eliminaría el efecto escala pasaría por considerar en el sector de conocimiento la fracción de trabajadores que trabajan en este:

$$A_{s+1} = BA_s \frac{n_s^A}{n_s}; n_s^A + n_s^c = n_s$$

El modelo también es capaz de dar lugar a crecimiento semi-endógeno mediante dos supuestos adicionales. Primero, cuando la producción de conocimiento tiene un carácter aleatorio respecto al stock previo de conocimiento. Esto es, en la siguiente ecuación $\tilde{B}$ sigue un proceso aleatorio de Poisson:

$$A_{s+1} = \tilde{B} n_s^A; \tilde{B} = BA_s^{\phi} \quad (3.97)$$

El segundo de estos supuestos radica en que la acumulación de investigadores y el solapamiento de sus actividades trae como consecuencia la existencia de deseconomías externas en la producción de conocimiento. Combinando este supuesto con el anterior, la siguiente función sería representativa de la tecnología del sector:

$$A_{s+1} = BA_s^{\phi} n_s^A \left(\widehat{n}_s^A\right)^{\lambda-1} \quad (3.98)$$

En equilibrio descentralizado, deberá cumplirse que $n_s^A = \widehat{n}_s^A$. Véase que si $\lambda = \phi = 1$ nos encontraríamos de nuevo en la formulación de crecimiento endógeno anterior. Bajo esta doble igualdad, por otra parte, se restablecería la simetría entre la acumulación de conocimiento entre sectores, al igualarse sus rendimientos a escala. En cuanto al cálculo de la senda de crecimiento estacionario, la anterior formulación presenta una peculiaridad frente a los modelos de Romer y Aghion-Howitt. En efecto, la tasa de crecimiento bruta del conocimiento en equilibrio en equilibrio general resultaría, despejando de su correspondiente función de producción:

$$\frac{A_{s+1}}{A_s} = \frac{\left(n_s^A\right)^{\lambda}}{A_s^{1-\phi}} \quad (3.99)$$

Como primer comentario, se aprecia que en la medida en que esta función de producción constituye una condición más en equilibrio general, existe un efecto escala en la tasa de crecimiento del conocimiento, puesto que el número de trabajadores que prestan sus servicios en el sector de investigación es una de las variables determinantes de la misma[110]. Centrándonos en la senda estacionaria, la tasa de crecimiento del conocimiento debería ser constante. Para que esto suceda, numerador y denominador del miembro derecho han de crecer a la misma tasa y, por ello, la cantidad de trabajo ocupada en el

[110] El efecto negativo del solapamiento de investigadores sobre la generación de conocimiento puede verse en realidad como un artificio para fundamentar más sólidamente la introducción de rendimientos decrecientes la variable que introduce el efecto escala (el número de trabajadores activos en el sector de investigación). Este tipo de efecto está también presente en trabajos anteriores, como Stockey (1995) y Kortum (1997).

sector de investigación será también creciente a lo largo de la senda estacionaria, mientras que en Romer y Aghion-Howitt era constante. En cuanto a la tasa de crecimiento estacionaria, el hecho de que el conocimiento presente, en general, rendimientos decrecientes, conduce necesariamente a una de las dos siguientes alternativas: a) o se introduce capital humano en el modelo a través de una función de aprendizaje de rendimientos constantes o b) se dota al número de trabajadores de una tasa exógena de crecimiento, que es la opción por la que se decanta Jones. De esta forma, la tasa de crecimiento del conocimiento en estado estacionario estará gobernada principalmente por la tasa de crecimiento de la población, aparte de por los parámetros tecnológicos que caracterizan la producción de conocimiento, siendo dicha tasa de crecimiento $g = \lambda n / (1-\phi)$. La tasa g será común al output por trabajador, al capital por trabajador y al consumo per cápita.

A partir de mediados de los 90, la literatura comienza a integrar de un modo más sistemático la acumulación de capital humano con los procesos de innovación, entendiendo esta tanto como generación de nuevos conocimientos que incrementan la eficiencia del trabajo como en un sentido de mejora de la calidad de los productos, al tiempo que intenta eliminar los efectos escala como condicionantes de la tasa de crecimiento en equilibrio general. Dentro de esta “segunda generación[111]”, que sucede al de los artículos anteriores, que sientan las bases analíticas, se distinguen varias corrientes. La primera de ellas trata de articular más claramente la modelización de Becker-Lucas en los modelos de innovación endógena. **Arnold (1998)** es un buen ejemplo de este grupo de contribuciones, al combinar un modelo de innovaciones en términos de número de variedades de

[111] Young (1998) consigue suprimir los efectos escala mediante la formulación de un modelo sin capital humano, en el que existen dos sectores (bien final y bienes intermedios, que realiza también las actividades investigadoras para incrementar la calidad de los productos). El primero funciona bajo competencia perfecta y el segundo bajo competencia monopolística, con libre entrada en ambos casos. La producción de calidades superiores de bienes intermedios se realiza mediante una inversión, creciente en el nivel de calidad a alcanzar, en la que no interviene el capital humano. De hecho el papel del factor trabajo, cuya dotación es fija, se circunscribe a la producción de manufacturas. En estas condiciones, la variable inductora de crecimiento a largo plazo es la calidad de los bienes intermedios, en cuya condición de primer orden no está presente la dotación total de trabajo existente en la economía. Este planteamiento, sin embargo, que comparten trabajos como el de Segerstrom (1998), es metodológicamente menos rica que otras que se presentan a continuación, al renunciar a involucrar el capital humano como motor de la producción de conocimiento.

productos con endogeneización de la acumulación de capital humano[112]. Así, frente al trabajo de Jones, se introducen dos motores de crecimiento: el aumento del número de productos y la acumulación de capital humano.

Entrando en los detalles esenciales, el modelo hereda de la literatura anterior la estructura de la economía en tres sectores: uno productor de bienes de consumo final, que utiliza como inputs un vector de bienes intermedios, otro de generación de bienes intermedios y un último de investigación, a partir del que derivan nuevas variedades de productos. Los consumidores, idénticos entre sí, distribuyen su tiempo entre aprendizaje y producción, y dentro de esta última pueden escoger entre el sector de bienes intermedios o el de investigación. Por tanto, denotando como es habitual por el superíndice A al sector de investigación y X al de los bienes intermedios, la restricción total de tiempo adoptará la forma:

$$1 = n_s^h + n_s^x + n_s^A \quad (3.100)$$

La tecnología de aprendizaje se hereda de Lucas (1988). La función de producción del bien de consumo, cuya estructura de mercado es competitiva, dependerá exclusivamente de los insumos intermedios, que se consideran consumibles en un solo período. La estructura de la función de producción del bien de consumo es la clásica del Grossman y Helpman (1991), que es utilizada en este tipo de literatura con pequeñas variantes. Siendo A en este caso el número de variedades de bienes intermedios y suponiendo que estas se disponen de modo continuo en el intervalo (0,A][113]:

$$Y_s = \left[\int_0^A \left(x_s^j \right)^{\alpha} dj \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.101)$$

El sector de intermedios funciona en régimen de competencia imperfecta, posee una tecnología que transforma uno a uno la fracción de capital humano asignada al bien determinado y fija los precios de los productos intermedios mediante un mark-up sobre

---

[112] La estructura productiva de variedades de productos se toma de Grossman y Helpman (1991), aunque sobre esta última se introduce como novedad la acumulación de capital humano.

[113] El activo conocimiento a veces se materializa en el número de variedades y, por tanto, en el extremo superior de la integral definida que conforma la tecnología del bien de consumo. En otras ocasiones, el aumento del conocimiento se plasma (o es susceptible de plasmarse, si el resultado de la innovación es incierto) en un aumento de la eficiencia vinculada a cada bien intermedio (en tales casos A es un coeficiente que afecta a cada uno de los componentes del vector x) y, en otras, ambos tipos de innovación son posibles.

salarios, su único coste. Suponiendo simetría en la distribución del capital humano entre bienes intermedios y siendo n_s^x el tiempo que este activo real se concentra en la producción de todos ellos, la aplicación de esta tecnología al bien de consumo permite derivar la siguiente ecuación de vaciado del mercado del bien final, basada en el supuesto de ausencia de capital físico:

$$C_s = A_s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} n_s^x a_s^h \quad (3.102)$$

Finalmente, el sector de investigación es también competitivo, presenta libertad de entrada y por tanto genera beneficios nulos. Su función de producción se caracteriza por la siguiente forma:

$$A_{s+1} = BA_s^{\psi}\left(n_s^A a_s^h\right)^{\varepsilon};\psi \in [0,1);\varepsilon \in (0,1) \quad (3.103)$$

El exponente del input capital humano de nuevo es inferior a la unidad por la existencia de deseconomías en la concentración de investigadores en el sector del conocimiento. En cuanto al método de resolución de los valores de equilibrio general, es muy similar al planteado por Romer y seguido por los trabajos posteriores, con un precio de patente que se iguala a la corriente de beneficios asociados a la producción de una nueva variedad. La tasa de crecimiento del output, y en última instancia del consumo dependerá, pues, de la tasa de crecimiento del número de variedades y de la del capital humano. Es de destacar también que en virtud de los supuestos realizados sobre la tecnología de producción de patentes, desaparece el efecto escala en el crecimiento del número de variedades. Asimismo la localización del motor de crecimiento en el número de variedades hace posible que el crecimiento endógeno se origine sin necesidad de recurrir a efectos desbordamiento desde el sector conocimiento al de producción del bien final, en el sentido de Jones. Por último, el modelo se cierra suponiendo una ecuación dinámica de acumulación de capital humano à la Lucas. De este modo, se verifica la siguiente ecuación de reparto del tiempo para los propietarios del capital humano: $1 = n_s^h + n_s^A + n_s^x$.

En el estado estacionario, las fracciones de tiempo destinadas a cada uno de los usos del capital humano se mantendrán constantes. El crecimiento del número de variedades, constante, dependerá solamente de la tasa de crecimiento del capital humano, que a su vez, como en Lucas (1988), vendrá dada tanto por la productividad de la función de aprendizaje como por la tasa subjetiva de descuento de los consumidores (las preferencias se toman logarítmico-aditivas). Teniendo en cuenta este hecho, será la tasa de crecimiento del capital humano la que en definitiva domine la tasa de crecimiento del output de consumo, tanto por su contribución directa a la producción de bienes intermedios como indirecta, a través de su incidencia sobre la tasa de crecimiento del número de variedades de productos intermedios. En definitiva, dicha tasa de crecimiento estacionaria será:

$$g = \frac{\varepsilon}{1-\psi} g_h = \frac{\varepsilon}{1-\psi}\left(B - \frac{1}{\beta}\right) \quad (3.104)$$

Manteniéndose la esencia del resultado, como se aprecia, incluso si $\chi = 0$, esto es, no existe un desbordamiento desde el stock de conocimiento investigador hacia el número de variedades; si tal desbordamiento se produce, incrementará la tasa de crecimiento estacionaria. **El resultado obtenido supone además una completa eliminación de los efectos escala, así como uno de los ejercicios de integración entre capital conocimiento y capital humano más conseguidos hasta el momento de la publicación del trabajo.**

Los años posteriores al trabajo de Arnold ven la luz algunas variaciones sobre el mismo (véase Anexo II), que en esencia adaptan sus conclusiones a hipótesis de funcionamiento diferentes. **Blackburn et. al (2000)** fusionan los sectores de producción de bienes intermedios y de innovación en una única empresa que utiliza el capital humano como único input variable; la tasa de acumulación de este será la que en última instancia haga crecer el número de variedades de bienes intermedios y, derivadamente, el output final. **Bucci (2003)** rescata la estructura en 3 sectores de Romer y la combina con la presencia del capital humano homogéneo en todos ellos, derivando un estado estacionario en la línea de Blackburn et al. y Arnold. **Zeng (2003)** reproduce un esquema similar al de Arnold con innovación horizontal y vertical, así como políticas fiscales de estímulo a la I+D y delimita la función de acumulación de capital humano -con participación del input de mercado- que posibilita la eficacia de aquellas sobre la tasa de crecimiento estacionaria.

Otra contribución paralela a la de Arnold es la de **Stadler (2013**), solo que referida a la innovación de calidad de los productos[114]. El autor plantea un modelo en el que crecimiento a largo plazo, endógeno, depende también del incremento de la calidad de los productos existentes. La actividad innovadora, sin embargo, no se canaliza hacia la producción de bienes intermedios, sino hacia los bienes de consumo. En efecto, la función de utilidad del agente representativo dependerá de un índice de consumo del tipo Dixit-Stiglitz, dependiente tanto de cantidades (x) como de calidades (q) de cada uno de los bienes finales disponibles en el mercado:

---

[114] Un precedente interesante relativo a capital humano y calidad de los productos, anterior al trabajo de Arnold y que anticipa tanto sus resultados como los de Jones es **Stokey (1991)**. Ver Anexo II.

$$C_s = \int_0^1 \left[q_{s,j}^{\alpha} x_{s,j}^{1-\alpha} dj \right]^{1/\alpha} ;0 < \alpha < 1 \quad (3.105)$$

Sobre la base de la demanda óptima de cantidades por el consumidor, es posible reconstruir un índice de precios del consumo del mismo, que se aplicará a su restricción presupuestaria en términos monetarios; dicha restricción iguala la renta monetaria a su uso en consumo de bienes finales (vector de bienes adquiridos multiplicado por su índice de precios) y en producción de capital humano a través del lucro cesante correspondiente. La acumulación de capital humano, traducida a tiempo discreto, se lleva a cabo a través de una tecnología con una parte determinística y otra parte estocástica:

$$a_{s+1}^h = Ba_s^h n_s^h + \phi a_s^h \Delta j \quad (3.106)$$

Esto es, la parte determinística presenta una estructura à la Lucas[115], mientras que la parte aleatoria sigue una distribución de Poisson que puede hacer que la trayectoria del capital humano presente saltos en el momento en que se materializa la llegada de una nueva tecnología, $\Delta j = 1$; entonces, se observa un escalón de magnitud ϕ no explicado por la parte determinística. Además, el capital humano puede emplearse bien en la producción del propio activo, bien en la producción de bienes finales de consumo en régimen de competencia monopolística o, finalmente, en el sector de I+D, generador de innovaciones en la calidad de las líneas de productos de consumo existentes.

Cada bien j es producido por una rama industrial. Dentro de cada rama, el precursor de la variedad con mayor calidad recibirá una patente que le facultará a producirla por un tiempo de duración ilimitada. Existe libre entrada en el mercado, de modo que los entrantes intentarán, mediante la utilización de capital humano en I+D, lanzar una variedad de una calidad no existente todavía en el mercado que le permita competir con las empresas ya instaladas. Las cantidades lanzadas de cada bien, con independencia de la calidad que prevalezca en el mercado en cada momento, son el resultado del funcionamiento de una tecnología de rendimientos constantes a escala, en la que las cantidades lanzadas se igualan uno a uno a la cantidad aplicada de factor trabajo efectivo (esto es, capital humano ponderado por la fracción de tiempo aplicada):

$$x_{s,j} = n_s^{xj} a_s^h \quad (3.107)$$

La tasa de innovación en la industria productora del bien j, A, se entiende como una probabilidad de éxito del proceso de investigación y se formula del siguiente modo:

[115] El autor no habla en puridad de fracciones del tiempo, sino de fracciones del capital humano total disponible.

$$A_{s,j} = \tilde{B}\frac{n_s^A a_s^h}{q_{s,j}} \quad (3.108)$$

Como se observa, la probabilidad A dependerá de un parámetro de productividad del capital humano, la proporción de este asignada a I+D e inversamente de la calidad máxima desarrollada en cada bien, de modo que cuanto mayor haya sido el número de innovaciones anteriores, tanto menos probable resultará desarrollar con éxito una nueva mejora de la calidad. En cualquier caso, un proceso de innovación desarrollado con éxito permitirá aumentar la calidad del producto en una proporción λ superior a la unidad; dicha proporción tiene también un carácter estocástico y sigue una distribución de Pareto con una media que depende positivamente del grado de dispersión tecnológica en el mercado. Además en equilibrio general la tasa de crecimiento de la calidad debe venir influida esencialmente por el valor de la tasa de éxito en la investigación.

En estado estacionario las fracciones de tiempo transcurridas en cada actividad serán constantes; en ausencia de innovaciones tecnológicas radicales que produzcan saltos en las tasas de crecimiento de capital humano, la tasa de crecimiento constante de la calidad de los productos, compatible con una probabilidad de éxito investigador A también constante, debe igualarse al ritmo de acumulación del capital humano. Dado que tanto la calidad como la cantidad de bienes finales están presentes en el índice de consumo, la tasa de crecimiento de este vendrá dada tanto por la probabilidad estacionaria de éxito en la investigación A como, en última instancia, por la tasa de crecimiento del capital humano. **Por tanto, una vez más aunque por una vía diferente serán los parámetros relativos al funcionamiento del sistema educativo como los que caracterizan la tecnología investigadora los que determinan el crecimiento a largo plazo de la economía.**

Cuando se produce un salto radical en el crecimiento del capital humano, la tasa de innovación salta también -manteniéndose constante la proporción de trabajadores o la fracción de tiempo, según cual sea la interpretación, asignada al sector-. Tras este aumento discontinuo en el nivel, la tasa de variación de la tasa de innovación será negativa hasta que alcance de nuevo su valor estacionario.

Una segunda rama de modelos de “segunda generación”, si por tal denominamos a los elaborados mayoritariamente a partir de finales de los 90 con endogeneización tanto de la inversiónt tecnológica como en capital humano, se caracteriza por introducir fricciones de tipo neo-keynesiano en los mercados, así como por estudiar el modo en que aquellas condicionan la relación entre acumulación de capital humano e innovación endógena (ver en el Anexo II una descripción más detallada de los mismos). En general todos ellos, caracterizados por imperfecciones de mercado de mayor o menor entidad, están influidos por la aportación de Acemoglu (1994) sobre búsqueda en el mercado de trabajo. En esta línea, **Redding (1996)** propone un modelo de innovación endógena cuyo efecto es incrementar la eficiencia del trabajo y que, en consecuencia, influye sobre la tasa de retorno de la formación que el trabajador adquiere antes de su entrada en la empresa, en un marco de búsqueda en el mercado de trabajo y salario determinado por un proceso de negociación à la Acemoglu. La incertidumbre que genera el éxito empresarial en la innovación se traslada a la inversión en capital humano, que a su vez es internalizada por la empresa en la construcción de su beneficio. En estas circunstancias, el equilibrio con expectativas racionales es de tipo Nash y puede ser, bien de alta inversión en I+D y elevada acumulación de capital humano, bien de bajo nivel en ambas variables. El primero de los mismos será el que, en estado estacionario, genere una mayor tasa de crecimiento del output final, el cual a su vez dependerá del conjunto de parámetros de ambas tecnologías y del valor estacionario de formación elegido por los trabajadores. **Scicchitano (2010)** amplía el modelo de Redding a un entorno en el que la procedencia de la formación de estos últimos puede ser schooling u OJT y dentro de esta última, general o específica, viniendo ligada esta útima a la participación en la actividad de innovación. La gama de equilibrios generales posibles se extiende respecto a los resultados de Redding, con la diferencia de que aquellos sin I+D no tienen por qué mostrar las tasas estacionarias de crecimiento del output final más bajas si existe una adecuada compensación vía formación general de los trabajadores. **Colonna (2014)** elabora otra variante del modelo de Redding en la que aparecen nuevos canales de interacción estratégica entre decisiones de inversión en capital humano por los trabajadores y en tecnología por la empresa, principalmente vía costes de reclutamiento en un marco de búsqueda, al tiempo que introduce la existencia de desempleo, del cual a su vez dependen los costes totales de uso de los trabajadores y que influye en las decisiones de adquisición de cualificación por el trabajador. Un entorno con una escasez de oferta de trabajo cualificado refuerza la decisión de una baja inversión en tecnología y su vez esta, se traduce en una baja demanda de trabajo cualificado, que influye en las decisiones de cualificación.

III.3.2. Modelos de OJT.

Como se anticipó en el capítulo sobre equilibrio parcial, la heterogeneidad teorica en el análisis explicativo de la formación en el seno de la empresa ha reducido sensiblemente el caudal de literatura que ha insertado estos desarrollos en equilibrio general. Un ejemplo clásico y en una línea muy beckeriana lo constituye **Einarsson y Marquis (1999**), en un marco de agente representativo. El modelo, planteado para su calibración y la simulación de ciclos reales[116], se construye en términos estocásticos, aunque en la descripción que sigue se tomarán exclusivamente los elementos determinísticos. En un horizonte infinito y economía poblada por consumidores-productores, la dotación normalizada de tiempo se asigna entre usos alternativos: el ocio (n_s^C), el tiempo transcurrido en la empresa (n_s^w) y el tiempo de aprendizaje formal n_s^{hS} . Se distinguen dos tipos de capital humano, que coexisten con el capital físico segundo activo real disponible en la economía -no se dispone de activos financieros-. Estas dos clases son, por un lado, aquel que se acumula por medio de aprendizaje formal (a_s^{hS}) y el que se adquiere gracias al OJT (a_s^{hF}). A este respecto, el tiempo transcurrido en la empresa se divide en aquel durante el que se recibe OJT y el destinado a trabajar en sentido estricto, esto es: $n_s^w = n_s^{hF} + n_s^{ww}$. La función de producción del bien final es creciente y cóncava en sus dos argumentos, el stock de capital y el tiempo efectivo de trabajo en términos de eficiencia. Al haber dos tipos de capital humano y puesto que ambos influyen en la eficiencia del tiempo trabajado, para evitar problemas de agregación se recurre a una función que relaciona dicho tiempo, corregido de eficiencia, con ambos stocks de capital y el tiempo en la empresa neto de formación. Esto es:

$$Y_s = F\left(K_s, n_s^{we}\right) \ (3.109)$$

$$n_s^{we} = n\left(a_s^{hS}, a_s^{hF}, n_s^{ww}\right);\ n_1, n_2, n_3 > 0;\ n_{11}, n_{22} \leq 0;\ n_{33} = 0 \ (3.110)$$

Las dos ecuaciones de acumulación del capital quedan representadas por las siguientes funciones:

$$a_{s+1}^{hS} = h^S\left(a_s^{hS}, n_s^{hS}\right); h_{11}^S = 0 \ (3.111)$$

$$a_{s+1}^{hF} = h^F\left(a_s^{hS}, a_s^{hF}, n_s^{hF}\right);\ h_i^F > 0;\ h_{11}^F, h_{22}^F \leq 0 \ (3.112)$$

La primera de las funciones se articula à la Lucas, con rendimientos constantes en el capital humano formal. Por otro lado, el tratamiento de los procesos de formación es asimétrico, en el sentido de que mientras el capital formal interviene en la producción OJT, el recíproco no se cumple. Respecto a la función de acumulación de capital OJT, esta presenta rendimientos constantes a escala conjuntos en los dos tipos de capital humano, siendo una posible especificación propuesta en el artículo a efectos de su calibración la siguiente:

$$a_{s+1}^{hF} = \left(a_s^{hS}\right)^{\varepsilon}\left(a_s^{hF}\right)^{1-\varepsilon}\left[1 + Bn_s^{hF}\right] (3.113)$$

En vista de este hecho, no se excluye la posibilidad de que pueda acumularse incluso aunque el tiempo dedicado al aprendizaje en el seno de la empresa sea nulo. Las cpo que

---

[116] El trabajo no contiene, por tanto, un estudio de la dinámica de transición.

describen la dinámica de la asignación del tiempo son 3. La primera refleja la tensión entre tiempo de ocio y transcurrido en el trabajo efectivo dentro de la empresa e iguala la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio a la productividad marginal del tiempo efectivo de trabajo en la empresa; a su vez este último se compone de la productividad marginal del tiempo de trabajo efectivo sobre la eficiencia del trabajo (vía la función n), aumentada con la productividad marginal del trabajo-eficiencia en F. La segunda cpo pone de relieve la decisión entre tiempo de ocio y de aprendizaje formal, de manera que la transferencia del primero al segundo implica, por un lado, la pérdida de utilidad marginal del ocio, y por otra, beneficios marginales triples, con origen en un aumento de la eficiencia del trabajo aplicado a la producción del bien final, así como un incremento de la productividad en la propia acumulación de capital formal y de capital OJT. En tercer lugar, otra cpo refleja la elección entre ocio y tiempo de aprendizaje OJT, con los mismos costes marginales que en la condición anterior y beneficios marginales dados por la productividad marginal acrecentada en la acumulación de capital propio de la empresa.

El estado estacionario se caracteriza por valores constantes de los 3 usos del tiempo y, consiguientemente, tasas de crecimiento constante à la Lucas de las dos clases de capital humano. A lo largo de dicha senda, incluso si el aprendizaje en la empresa se anula el capital OJT crecerá en proporción al stock de capital formal. En una trayectoria no estacionaria, sin embargo, la consecución de una relación proporcional exigirá la aplicación de un tiempo de formación en la empresa positivo, toda vez que el tiempo dedicado al aprendizaje formal no será constante y, en consecuencia, tampoco la tasa de acumulación del capital adquirido mediante OJT. Esta propiedad es importante, toda vez que a largo plazo tiende a confirmar la visión minceriana de salarios proporcionales al stock de capital humano total con independencia del tiempo dedicado a OJT; a lo largo de la dinámica de transición, no obstante, este tipo de patrón estaría supeditado a la dinámica de este último uso del tiempo.

La introducción de OJT en equilibrio general dinámico es especialmente importante por diferenciar varios tipos de capital humano, cada uno con procedimientos de acumulación diferentes y matrices de productividad cruzada en las funciones de acumulación de geometría variable. Esta diferenciación, como se vio antes, es similar a la que practica la literatura de innovación endógena, solo que desde la óptica del grado de sofisticación del capital y su complementariedad con el stock de innovaciones tecnológicas a la hora de producir nuevas innovaciones. A medio camino entre ambas puede encontrarse un híbrido, como es l**a corriente sobre el capital humano específico en determinadas industrias,** que ha busacado los modelos de equilibrio general plurisectorial como su marco más natural. El adjetivo híbrido es adecuado porque esta línea posee características de las otras dos: pluralidad de tipos de capital, acumulación del capital específico en el seno de cada sector productivo -bien por OJT, bien por learning-by-doing (LBD)- y, en ocasiones, diferenciación de estos tipos de capital no solamente por su sector de acumulación y utilización sino por la accesibilidad que permite a actividades de innovación.

Por el momento esta literatura sobre capital humano específico sectorial es más bien dispersa y sin un hilo conductor metodológico demasiado homogéneo, aunque algunos trabajos podrían subrayarse como especialmente interesantes. Entre estos últimos, podrían singularizarse los de Kalaitzidakis (1997) en un marco de equilibrio general estático, Tang y Wang (2012) en un contexto de competencia imperfecta en el mercado de trabajo y existencia de sindicatos y Sylvain (2014), que se centra más bien en la relevancia de la especificidad del capital humano sobre el riesgo empresarial y sus consecuencias sobre las ecuaciones de valoración de la empresa. Se deja para el final uno de los más recientes que muestra una síntesis de los rasgos más notables de esta rama: **el de Vourvachaki et al. (2014),** que exhibe una especial simplicidad analítica al considerar, en un modelo de empresa representativa y horizonte infinito, dos tipos de capital humano: uno general (a_s^{hG}) y otro específico a la empresa (a_s^{hF}), el cual a su vez se relaciona con actividades de I+D. De este modo, la tecnología del bien final será la siguiente:

$$Y_s = A\left(a_s^{hG}\right)^{\gamma_1}\left[\left(n_s^w a_s^{hF}\right)^{\gamma_2} K_s^{1-\gamma_2}\right]^{1-\gamma_1};\ 0<\gamma_1,\gamma_2<0 \text{ (3.114)}$$

Así, el capital específico y general reciben un tratamiento simétrico en el sentido de que, aunque sus elasticidades de producción son distintos, ambos son productivos solamente en tanto en cuanto hay un tiempo destinado al trabajo de mercado. También hay algunos matices que los diferencian: en comparación con un modelo estándar à la Lucas, mientras el capital específico haría las veces del capital general en este último enfoque, el capital general incrementaría la productividad del capital total, semejándose formalmente a un efecto externo en cuanto que es la integridad del stock la que ejerce su influencia, si bien su impacto en la productividad se internalizaría en las decisiones de acumulación. Los procesos de acumulación de ambas clases de capital humano tienen lugar en el entorno de la empresa, de modo que el capital específico constituye la base tanto para la ulterior acumulación del propio activo como del capital general:

$$a_{s+1}^{hF} = a_s^{hF}\left[1+B^F n_s^{hF}\right] \text{ (3.115)}$$

$$a_{s+1}^{hG} = a_s^{hG}\left[1+B^G \frac{a_s^{hF}}{a_s^{hG}} n_s^{hG}\right] \text{ (3.116)}$$

$$1 = n_s^w + n_s^{hG} + n_s^{hF} \text{ (3.117)}$$

El tiempo disponible por período se divide en aquel destinado a la producción del bien final y al aprendizaje, subdividiéndose este último en el consagrado a la formación de cada variante de capital humano. En la medida en que la adquisición del capital específico solo puede realizarse en el seno de la empresa, puede asimilarse el tiempo de su adquisición a un OJT, correspondiendo a esta las decisiones de acumulación; además, a semejanza del planteamiento de Einarsson y Marquis, serán los hogares los que decidan el tiempo asignado a este fin, lo que resulta un tanto contradictorio con el enfoque predominante en equilibrio parcial, en el que es la empresa la que decide el tiempo asignado a este fin. En cuanto al capital general, al no venir vinculado tecnológicamente a un tiempo de acumulación, deberá demandarse por la empresa, de suerte que su remuneración se generará mediante la igualdad ex ante de oferta y demanda en su mercado correspondiente. Así, mientras la remuneración de equilibrio del capital específico se entiende por unidad de tiempo y por unidad de capital (generándose en un mercado donde se ofrecen y demandan horas de trabajo), la del capital general se aplica por unidad de capital y por la integridad del tiempo disponible por período, formándose en un mercado donde se demandan y ofrecen unidades de dicho tipo de capital. El beneficio de la empresa representativa, a optimizar respecto a la demanda de capital general, capital físico y las horas trabajadas es:

$$\pi_s = Y_s - e_s^G a_s^{hG} - e_s^F n_s^{hF} a_s^{hF} - q_s K_s \quad (3.118)$$

La conexión con la innovación tecnológica viene dada porque, durante el tiempo destinado a formación, el índice tecnológico se acumula simultáneamente. El crecimiento de dicho índice es el que propicia la acumulación de unidades-eficiencia de capital físico de modo que, dado un stock inicial de este, es el avance de la tecnología y no la adquisición de nuevas unidades físicas por los hogares el que hace posible el crecimiento del stock. En otras palabras, la acumulación de capital físico y humano están completamente entrelazadas, siendo la destreza en el uso y perfeccionamiento del stock del primero el vínculo entre ambas. Esta tecnología de generación de innovaciones (cuyo índice se denotará por Λ) queda sintetizada por las siguientes ecuaciones:

$$K_s = \upsilon \Lambda_s;\ \upsilon > 0 \quad (3.119)$$

$$\Lambda_{s+1} = \Lambda_s + D\left(n_s^{hF} a_s^{hF}\right)^{\gamma_3};\ 0 \le \gamma_3 \le 1 \quad (3.120)$$

$$D = \Theta\left(n_s^{hF} a_s^{hF}\right)^{1-\gamma_3} \quad (3.121)$$

En la segunda de estas ecuaciones, D es un parámetro tecnológico constante a escala individual, pero sobre el que la acción colectiva genera efectos externos; de hecho, como se aprecia en la tercera de las ecuaciones, siempre que γ_3 sea distinto de 1 dichos efectos externos existirán; Θ será en cualquier caso una constante. Respecto a los hogares, estos maximizarán preferencias dependientes de su consumo en cada período, con elasticidad de sustitución intertemporal constante. Su restricción presupuestaria flujo, congruente con los supuestos realizados y que no incluye activo financiero alguno es[117]:

$$C_s \leq e_s^G a_s^{hG} + e_s^F a_s^{hF}\left(1 - n_s^{hG} - n_s^{hF}\right) + q_s K_s \quad (3.122)$$

La maximización de las preferencias se realiza respecto al consumo y los dos tiempos de aprendizaje (o alternativamente el tiempo de trabajo y uno de las franjas de aprendizaje), dados valores iniciales de las dos clases de capital y el índice tecnológico. Obsérvese que el tratamiento del capital físico en la restricción presupuestaria es también original, en el sentido de que no se admiten transacciones de compra ni venta sino que se conserva en términos físicos sin merma alguna en su valor y su capacidad de generar rentas se incrementa de período en período a medida que mejora su tecnología incorporada.

Las cpo exigen, por una parte, la igualdad entre las tasas de retorno de capital humano general y específico (el último de los cuales incluirá entre las rentas marginales la mejora de calidad del capital físico vía mejora de la tecnología[118]), así como una igualdad entre costes y beneficios marginales en la asignación del tiempo a sus diferentes usos: la cpo del tiempo de trabajo igualará remuneración marginal a coste, ponderado por sus respectivos valores sombra, de renuncia a acumulación de las dos clases de capital; la del tiempo de formación general, incluirá también la remuneración extra de este tipo de capital ponderada por el valor sombra de la riqueza y como costes, los derivados de una menor acumulación de capital específico. A lo largo de la senda estacionaria todos los stocks (y por añadidura el resto de las variables) crecen a la misma tasa. Esta se deriva a partir de un polinomio cuyas raíces serán reales siempre que la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo sea inferior a 1. Por lo demás, dicha tasa de crecimiento dependerá positivamente del valor sombra de la restricción de acumulación de la tecnología, en la medida en que la tasa de retorno del capital humano está positivamente correlacionado con ella. La estabilidad local de punto de silla exige el cumplimiento de condiciones paramétricas.

III.3.3. Capital humano y capital social en equilibrio general.

---

117 El modelo original contiene impuestos de distinto tipo, pero para reducir la exposición a sus elementos esenciales se han suprimido aquellos.

118 Ver en el capítulo 3 sobre tipología de las tasas de retorno el caso canónico de tasas bajo innovación tecnológica endógena basada en el stock de capital humano.

La interacción entre capital humano y capital social ha trascendido durante los últimos 15 años al campo del equilibrio general desde el de los fundamentos microeconómicos y ha dado una literatura, no excesivamente prolija, pero de reconocida importancia en el ámbito de la política económica y decididamente en expansión. Si bien la primera contribución de entidad es la de Bisin y Guaitoli (2002) en el contexto de la transición de economías rurales a urbanas[119], el trabajo realmente canónico es el de **Sequeira y Ferreira-Lopes (2011).** El modelo de estos autores se basa en la relevancia de ambos tipos de capital como factor productivo del otro, aunque la diferencia entre ambos estriba en que el capital social (a_s^S) se considera indivisible a efectos de la tecnología educativa.

Por otra parte, el tiempo disponible puede asignarse a diversas actividades (aprendizaje, trabajo de mercado y creación de redes sociales y en última instancia de capital social), marcando así 3 fracciones del capital humano, que participará como input en todos estos procesos productivos. Las respectivas funciones de acumulación resultantes de este supuesto son las siguientes:

$$a_{s+1}^h = a_s^h\left[\left(1-\delta^h\right)+B^{hn}n_s^h\right]+B^{hs}a_s^S \quad (3.123)$$

$$a_{s+1}^S = a_s^S\left[\left(1-\delta^S\right)+B^{Sn}n_s^S\right]+B^{Sh}a_s^h \quad (3.124)$$

$$1 = n_s^w + n_s^h + n_s^S \quad (3.125)$$

La función de producción del bien final es una Cobb-Douglas con rendimientos constantes en el conjunto de los 3 inputs utilizados: capital físico, humano y social.

$$Y_s = AK_s^{\alpha_k}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_h}\left(a_s^S\right)^{\alpha_S};\ 1=\alpha_k+\alpha_h+\alpha_S \quad (3.126)$$

Así, mientras en la función de acumulación capital humano y capital social son complementarios, en esta segunda tecnología ambos inputs son sustitutivos. El capital social recibe también su remuneración e^S conforme a su productividad marginal, aunque a diferencia de los otras dos clases de capital la empresa demanda directamente unidades de capital, en lugar de tiempo de prestación de los servicios del activo. Una vez determinado el tiempo de trabajo, el oferente del factor aportará simultáneamente una fracción de su capital humano, así como la totalidad de su stock de capital social. Respecto a la restricción presupuestaria flujo:

---

[119] Bartolini y Bonatti (2008) realizan también una contribución con un peculiar enfoque, basado en el supuesto de que las actividades de mercado per se generan una reducción neta del capital social. El modelo que se estudia de Sequeira y Ferreira-Lopes tiene un enafoque más general y entronca de una manera más clara con la visión predominante de capital humano en la literatura general, por lo que se ha escogido como punto de partida en esta breve incursión.

$C_S + K_{s+1} \leq (1+q_s)Ks + e_s a_s^h (1 - n_s^w - n_s^h) + e_s^S a_s^S$ (3.127)

La maximización del hogar representativo se realiza respecto a la posición en los 3 activos y la distribución del tiempo. La de la empresa representativa, respecto a las horas de trabajo y los stocks contratados de capital físico y capital social. La senda estacionaria existe y es única; esta se caracteriza por una tasa de crecimiento constante del capital humano y común al capital físico, capital social y consumo, en ausencia de crecimiento de la población. Además, el estado estacionario presenta estabilidad local de punto de silla.

Ponzetto y Troiano (2014) estudian la interrelación entre la acumulación de capital humano y el nivel de capital social cuando el nexo entre ambos es el ciclo político. El entorno en el que desarrollan su modelo es uno de horizonte infinito, con una utilidad esperada logarítmica separable que depende tanto del consumo como de la cantidad de gasto público en servicios públicos en cada período. La función de producción es una Cobb-Douglas con rendimientos constantes conjuntos en capital físico y capital humano, con jornada laboral exógena e igual a la totalidad del tiempo del período. La restricción presupuestaria flujo refleja la posibilidad de acumular solamente capital físico, toda vez que el capital humano se acumula solamente a partir de inputs públicos (esto es, gasto en educación pública). A este respecto, las funciones de producción de servicios públicos (g) y capital humano dependen tanto del gasto público destinado a estos (x_s^g y x_s^h) como del grado de competencia de los políticos que gestionan este tipo de actividades (η_s^g y η_s^h); estas variables de competencia son estocásticas, independientes la una de la otra y siguen una media móvil de orden 1. Ambas funciones adoptarían la siguiente estructura:

$g_s = x_s^g \exp(\eta_s^g)$ (3.128)

$a_{s+1}^h = x_s^h \exp(\eta_s^h)$ (3.129)

En cuanto a las innovaciones aleatorias de los procesos de competencia de los políticos (ε_s^g y ε_s^h), estas tienen media nula y soporte $[-\hat{\varepsilon}_s^g, \hat{\varepsilon}_s^g], [-\hat{\varepsilon}_s^h, \hat{\varepsilon}_s^h]$. El gobierno está sujeto al cumplimiento de una restricción presupuestaria que no contempla la posibilidad de emitir deuda pública; por esta razón, la suma de los gastos en servicios públicos y educación deberán financiarse íntegramente con cargo a impuestos. El ingreso procedente de estos se formará mediante la aplicación de un tipo constante sobre los ingresos salariales del período. El modelo contempla dos problemas de optimización simultáneos: el del agente representativo, que maximiza sus preferencias en el consumo y la inversión en capital fijo, así como el del político, que elige mediante un procedimiento independiente el tipo impositivo (y con ello el volumen total de gasto público), así como su distribución entre servicios públicos y capital humano. Los políticos, por su parte, tienen una función objetivo en la que combinan las preferencias de sus representados y una renta en términos de ego que les proporciona la permanencia en su cargo; en este sentido, cada período deben afrontar una reelección y en el momento en que son derrotados, ya no pueden volver a presentarse.

La secuencia de decisiones es la siguiente. A la vista del stock de capital físico y humano del período s, el político en el cargo elige el tipo impositivo.Tras observar las realizaciones de los shocks de competencia pasados de los políticos, así como el tipo impositivo, los ciudadanos toman sus decisiones óptimas respecto al consumo y la inversión en capital físico. Al mismo tiempo, el político elige la cuantía de cada uno de los gastos; en concreto se denominará $h(s,\tau_s)$ a su función de reacción de gasto público en educación, donde s es el vector de variables de estado en el período s. Por la propia naturaleza de las funciones de producción de outputs públicos, sus resultados son observables en diferentes períodos: los servicios en s, pero el capital humano no lo es hasta s+1. De este modo, los ciudadanos pueden inferir la competencia de los políticos en materia de servicios públicos a la vista de la realización de este gasto, pero solamente aquellos individuos mejor informados podrán predecir ajustadamente el valor del stock de capital humano en s+1 y, de ahí, inferir la competencia del político en este terreno. Se supone que solamente una fracción θ de los agentes se encuentran en condiciones de efectuar esta clase de previsiones. Dicha probabilidad será una función creciente y cóncava en ambos argumentos respecto a la imbricación de los individuos en la información social (v) -esto es, su acceso voluntario a medios de comunicación- y la profundidad de su red social (n), dimensiones cuya interacción conforma su capital social, que no es objeto de acumulación. La elección tiene lugar al final de cada período, después de conocer el valor de g y antes de que una fracción de la población tenga acceso a la información necesaria para valorar la competencia del político en el ámbito de provisión de servicios educativos. Teniendo en cuenta esta asimetría en la evaluación de los diferentes tipos de competencia por el electorado, es más probable que la reelección premie realizaciones altas de la competencia en la provisión de bienes que aquella manifestada en la provisión de servicios educativos, lo que sesga las decisiones del político en dirección a los primeros en comparación con el óptimo social[120].

[120] En el problema del planificador, este tiene información perfecta sobre la realización futura de a_{s+1}^{h} , por lo que la distorsión inducida en el comportamiento del político desaparece.

Por último, la regla de reelección, que cierra el modelo, se construye teniendo en cuenta que para que esta suceda deberá verificarse la siguiente desigualdad:

$\Delta U_I \geq \Psi_s + \xi_s^i$ (3.130)

El primer miembro recoge las preferencias políticas del individuo, esto es, el incremento en la utilidad de que se beneficiaría por permitir revalidar el cargo al político en el poder en relación con la que recibiría por apoyar a un nuevo entrante. El segundo miembro refleja las preferencias no políticas, esto es, los factores tanto generales como idiosincrásicos que le llevarían a apoyar al candidato entrante. A su vez, las preferencias políticas serán diferentes según si se trata de individuos informados o no. Para los primeros, siendo V la función de valor que caracteriza al conjunto de endógenas en s:

$\Delta U_\theta = V\left(K_{s+1}, a_{s+1}^h, \varepsilon^g\left(s,\tau_s,g_s\right), \varepsilon^h\left(s,\tau_s,a_{s+1}^h\right)\right) - E_s V\left(K_{s+1}, a_{s+1}^h, \omega_s^g, \omega_s^h\right)$ (3.131)

Los individuos bien informados pueden predecir con exactitud la inversión pública en capital humano y, consiguientemente, inferir la habilidad del político en el cargo a la luz de la cuantía de los impuestos y de la cantidad de output efectivo producido. En cuanto a la capacidad (ω) del candidato alternativo, no existen variables observables a partir de la que pueda deducirse con certeza, por lo que solamente puede formular una expectativa. Las prereferencias políticas para los individuos con una información deficiente serán:

$\Delta U_{1-\theta} = E_s V\left(K_{s+1}, e^{\varepsilon_{s-1}^h+\varepsilon_s^h} h\left(s,\tau_s\right), \varepsilon^g\left(s,\tau_s,g_s\right), \varepsilon_s^h\right) - E_s V\left(K_{s+1}, e^{\varepsilon_{s-1}^h+\varepsilon_s^h} h\left(s,\tau_s\right), \omega_s^g, \omega_s^h\right)$ (3.132)

Como se aprecia, los individuos mal informados deben formular expectativas sobre el shock de competencia del político, ya que no son capaces de inferir la competencia exacta a partir de la estimación de la inversión en capital humano. Las preferencias políticas totales se formarían a partir de la suma ponderada de las de los individuos informados y no informados. Un mayor capital social elevará la proporción de los primeros y reducirá, consiguientemente, el error social cometido en la valoración de la capacidad del político, reduciendo el sesgo ineficiente a favor del gasto en servicios públicos. Se demuestra de este modo que un capital social reducido puede constituir un obstáculo para la acumulación de capital humano. Es más, aunque el modelo considera el stock de capital social como estático, podría añadirse una ecuación de acumulación del mismo en la que el nivel de capital humano fuese su principal input, en la línea de trabajo anterior de Sequeira y Ferreira-Lopes, lo que haría que ambas restricciones se retroalimentasen, dando lugar a una trampa de crecimiento.

Un problema directamente relacionado con el capital social es la calidad de las instituciones, en la medida en que estas pueden facilitar la cohesión social entre los individuos o generar desconfianza hacia el sistema y promover las conductas descoordinadas. Otra dimensión relevante en el caso que nos ocupa es su importancia a la hora de determinar la productividad del proceso educativo. **Dias y Tebaldi (2012)** modelizan la relación entre capital humano, calidad institucional y crecimiento, introduciendo el papel de aquellas a través de esta última vía. Para un tamaño dado de la población[121], esta se divide entre individuos cualificados (h) y no cualificados (v). Se identifican dos sectores productivos, ambos dotados de una tecnología Cobb-Douglas de rendimientos constantes, dependiendo ambos de la cantidad de trabajo aplicado de cada categoría. Las funciones de producción de ambos son las siguientes:

$$Y_s^f = A\left(n_s^w v_s\right)^{1-\beta}\left(n_s^w h_s\right)^{\beta} \quad (3.133)$$

$$Y_s^e = B\left(\left(1-n_s^w\right)v_s\right)^{1-\beta}\left(\left(1-n_s^w\right)h_s\right)^{\beta};\ 0 \leq B \leq 1 \quad (3.134)$$

Dado que en este modelo no existe un stock de capital humano como tal, sino que solamente se admite la posibilidad binaria de formar parte del grupo de los trabajadores educados o no, el output educativo no es inversión bruta en el sentido habitual, al no haber un stock que se acumule en el tiempo. Desde esta óptica, Y_s^e tiene una interpretación alternativa, como incremento en los trabajadores cualificados a lo largo de cierto período de tiempo. Al ser complementarios cualificados y no cualificados en ambos procesos productivos, sus tiempos de trabajo y formación son idénticos, como también sus elasticidades. El proceso educativo se basa, a la vista de la segunda función, en la transmisión de conocimientos de los individuos formados a los carentes de educación. B se interpreta como un índice de calidad institucional, que implica una mayor productividad del proceso educativo. Una mala calidad institucional puede incidir, por ejemplo, en una desmotivación de los profesores y de ahí en una baja productividad en la transmisión de los conocimientos. La remuneración de cada clase de trabajador se realiza a conforme a competencia perfecta, esto es, basándose en su productividad marginal en el sector del bien final. En el proceso educativo, solamente los cualificados reciben remuneración (proporcionada por la sociedad), basada en el retorno social medio de su contribución, esto es, igual a $\left(Y_s^e / h_s\right)$.

Dada la libre circulación de trabajadores en el interior de la economía, los salarios de los cualificados en ambos sectores se harán iguales.

La decisión de inversión individual en capital humano se resuelve desde la perspectiva del planificador à la Ben-Porath, confrontando beneficios con costes marginales. Los beneficios están dados por la corriente descontada desde el momento de la adquisición de educación hasta el final del horizonte de salarios de trabajadores cualificados. La tasa de descuento utilizada es el tipo de interés corregido por 1/B, en el entendimiento de la la

[121] El modelo supone una tasa de crecimiento constante de la población, pero esta caracteristica no es esencial para derivar los principales resultados.

calidad institucional permite elevar el retorno de las inversiones en educación; este recurso se ha utilizado en trabajos previos, como Dias y McDermott (2006). Por el lado de los costes, estos se componen de un componente privado y otro social. El privado, la corriente de salarios en el sector de bienes finales sacrificada por los no cualificados mientras transcurre su formación. Sin embargo y a diferencia de otros problemas convencionales de acumulación de capital humano, la presencia de trabajadores cualificados en el proceso de formación supone un peso muerto, al no incrementar estos su stock de capacidades, que una decisión individual no internalizaría. Asi, el coste social medio quedará reflejado en Y_s^e / v_s . La calidad de las instituciones influye tanto en la corriente de beneficios como de costes: en los primeros, al reducir la tasa de descuento y aumentar el salario del trabajador remunerado; en los segundos, al hacer más productivos los inputs en educación y elevar consiguientemente el coste social de la transmisión de conocimientos. Para el trabajador que decide formarse, en el margen beneficios se igualarán a costes, ecuación que permite despejar la relación óptima entre trabajadores formados y no formados por período en función de una serie de parámetros: la calidad institucional (con signo positivo), la elasticidad de producción de los trabajadores cualificados (positivo) y el tipo de interés (positivo). De este modo, un incremento en la calidad de las instituciones genera: a) una mayor acumulación de capital humano, al dominar un efecto neto positivo de esta variable; b) una menor desigualdad salarial, por el decrecimiento de la productividad marginal de los cualificados en su sector.

Esta microfundamentación del mecanismo de acumulación se puede trasladar también a un entorno de equilibrio general, sin más que utilizar la relación $h_{s+1} - h_s = Y_s^e$. Así, sustituyendo en esta última ecuación la relación óptima entre los dos tipos de trabajadores, se obtiene una función de aprendizaje à la Lucas con rendimientos constantes del capital humano, aunque sin dependencia del tiempo de aprendizaje:

$$h_{s+1} - h_s = \Upsilon h_s \quad (3.135)$$

Con $\Upsilon > 0$ una combinación de los restantes parámetros del modelo, incluyendo la calidad institucional con signo positivo. Los restantes elementos del problema en equilibrio general estarían dados por una función de utilidad con elasticidad constante de sustitución en consumo y un equilibrio del mercado de bienes en el que el output total (del bien final y del sector educativo, cuyo precio relativo es la unidad)[122] se iguala a la suma de consumo e inversión neta en capital físico. Por otro lado, el efecto de la acumulación de capital

[122] Recordemos que el valor del output educativo se reparte íntegramente entre los trabajadores cualificados vía salarios, por lo que es lógico que la renta derivada genere consumo e inversión en capital físico.

físico es hacer crecer el parámetro A proporcionalmente. La senda estacionaria tiene como condición el crecimiento del output total per cápita a la misma tasa que el consumo; dicha tasa común dependerá positivamente también de la calidad institucional, toda vez que la ratio de trabajadores cualificados está correlacionada con esta última. Por tanto otra consecuencia positiva de un buen entorno institucional será la consecución de una tasa de crecimiento más robusta en el largo plazo. A una conclusión similar llega la mayor parte de la literatura más reciente, tanto aquella estrictamente teórica -como Jellal y Bouzahzah (2012)-, como empírica -Liam y Adams-Kane (2008), Patron (2014)-.

BIBLIOGRAFÍA SOBRE MODELOS DE AGENTE REPRESENTATIVO

Acemoglu, Daron (1998), 'Why Do New Technologies Complement Skills? Directed Technical Change and Wage Inequality', The Quarterly Journal of Economics, 113 (4), 1055-89.

——— (2002), 'Directed Technical Change', The Review of Economic Studies, 69 (4), 781-809.

——— (1997), 'Training and Innovation in an Imperfect Labour Market', The Review of Economic Studies, 64 (3), 445-64.

——— (2003), 'Patterns of Skill Premia', The Review of Economic Studies, 70 (2), 199-230.

Acemoglu, Daron, Gino Gancia, and Fabrizio Zilibotti (2012), 'Competing engines of growth: Innovation and standardization', Journal of Economic Theory, 147 (2), 570-601.e3.

Acemoglu, Daron and Peter Howitt (1994), 'Labour Market Imperfections and Thick Market Externalities from Innovation', CEP Discussion Papers, 0218

Acemoglu, Daron and Jörn-Steffen Pischke (1999), 'Beyond Becker: Training in Imperfect Labour Markets', The Economic Journal, 109 (453), F112-42.

Aghion, Philippe and Peter Howitt (1992), 'A Model of Growth Through Creative Destruction', Econometrica, 60 (2), 323-51.

Alonso-Carrera, Jaime and María Jesús Freire-Serén (2004), 'Multiple equilibria, fiscal policy, and human capital accumulation', Journal of Economic Dynamics and Control, 28 (4), 841-56.

Antocci, A., et al. (2012), 'Global Analysis and Indeterminacy in a Two-Sector Growth Model
with Human Capital', University of Florence Department of Social Sciences Working Papers, WP 14/2012

Arnold, Lutz G (1998), 'Growth, Welfare, and Trade in an Integrated Model of Human-Capital Accumulation and Research', Journal of Macroeconomics, 20 (1), 81-105.

Arrow, Kenneth J. (1962), 'The Economic Implications of Learning by Doing', The Review of Economic Studies, 29 (3), 155-73.

Azariadis, Costas, et al. (2013), 'A two-sector model of endogenous growth with leisure externalities', Journal of Economic Theory, 148 (2), 843-57.

Backus, David K, Patrick J Kehoe, and Timothy J Kehoe (1992), 'In Search of Scale Effects in Trade and Growth', Journal of Economic Theory, 58 (2), 377-409.

Bartolini, Stefano and Luigi Bonatti (2008), 'Endogenous Growth, Decline in Social Capital and Expansion of Market Activities', Journal of Economic Behavior & Organization, 67 (3,Äì4), 917-26.

Basu, Susantu and John G. Fernald (1997), 'Returns to Scale in U.S. Production: Estimates and Implications', Journal of Political Economy, 105 (2), 249-83.

Becker, Gary S. and Kevin M. Murphy (1992), 'The Division of Labor, Coordination Costs, and Knowledge', The Quarterly Journal of Economics, 107 (4), 1137-60.

Benhabib, Jess and Roger E.A. Farmer (1996), 'Indeterminacy and sector-specific externalities', Journal of Monetary Economics, 37 (3), 421-43.

——— (1994), 'Indeterminacy and Increasing Returns', Journal of Economic Theory, 63 (1), 19-41.

Benhabib, Jess, et al. (2000), 'Indeterminacy under Constant Returns to Scale in Multisector Economies', Econometrica, 68 (6), 1541-48.

Benhabib, Jess and Kazuo Nishimura (1998), 'Indeterminacy and Sunspots with Constant Returns', Journal of Economic Theory, 81 (1), 58-96.

Benhabib, Jess and Roberto Perli (1994), 'Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth', Journal of Economic Theory, 63 (1), 113-42.

Bessen, James and Roberto Perli (1997), 'Productivity Adjustments and Learning by Doing as Human Capital', Center for Economic Studies Working Paper, 97-17

Bisin, A. and D. Guaitoli (2002), 'Social Capital, Modernization and Growth', UFAE/IAE Working Papers, 545.02

Blackburn, Keith, Victor T.Y. Hung, and Alberto F. Pozzolo (2000), 'Research, Development and Human Capital Accumulation', Journal of Macroeconomics, 22 (2), 189-206.

Boldrin, Michele and Aldo Rustichini (1994), 'Growth and Indeterminancy in Dynamic Models with Externalities', Econometrica, 62 (2), 323-42.

Bond, Eric W., Ping Wang, and Chong K. Yip (1996), 'A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics', Journal of Economic Theory, 68 (1), 149-73.

Brito, Paulo and Alain Venditti (2010), 'Local and global indeterminacy in two-sector models of endogenous growth', Journal of Mathematical Economics, 46 (5), 893-911.

Bucci, Alberto and Roberto Perli (2003), 'R&D, Imperfect Competition and Growth with Human Capital Accumulation', Scottish Journal of Political Economy, 50 (4), 417-39.

Caballé, Jordi and Manuel S. Santos (1993), 'On Endogenous Growth with Physical and Human Capital', Journal of Political Economy, 101 (6), 1042-67.

Chakraborty, Bidisha and Manash Ranjan Gupta (2006), 'A Note on The Inclusion of Human Capital in the Lucas Model', International Journal of Bussiness and Economics, vol. 5 (3), 211-24.

——— (2007), 'Uniquenness and Indeterminacy of the Equilibrium Growth Path in the Uzawa-Lucas Endogenous Growth Model', Japanese Economic Review, 58 (3), 400-6.

Chamley, Christophe (1993), 'Externalities and Dynamics in Models of "Learning or Doing"', International Economic Review, 34 (3), 583-609.

——— (1986), 'Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives', Econometrica, 54 (3), 607-22.

Colonna, Fabrizio (2014), 'Innovation and Human Capital: Theory and Evidence from Italy', Non published paper,

Dias, Joilson and John McDermott (2006), 'Institutions, Education, and Development: The Role of Entrepreneurs', Journal of Development Economics, 80 (2), 299-328.

Dias, Joilson and Edinaldo Tebaldi (2012), 'Institutions, Human Capital, and Growth: The Institutional Mechanism', Structural Change and Economic Dynamics, 23 (3), 300-12.

Ehrlich, Isaac and Yong Yin (2013), 'Equilibrium Health Spending and Population Aging in a Model of Endogenous Growth: Will the GDP Share of Health Spending Keep Rising?', Journal of Human Capital, 7 (4), 411-47.

Einarsson, Tor and Milton H. Marquis (1999), 'Formal Training, On-The-Job Training and the Allocation of Time', Journal of Macroeconomics, 21 (3), 423-42.

Faig, Miquel (1995), 'A simple economy with human capital: Transitional dynamics, technology shocks, and fiscal policies', Journal of Macroeconomics, 17 (3), 421-46.

Findlay, Ronald and Henryk Kierzkowski (1983), 'International Trade and Human Capital: A Simple General Equilibrium Model', Journal of Political Economy, 91 (6), 957-78.

Fukuda, S. and Robert F. Owen (2008), 'Human Capital and Economic Growth: Dynamic Implications of the Insider-Outsider Problem for Macroeconomics', Public Policy Review, 2008 (4),

Galí, Jordi (1994), 'Keeping up with the Joneses: Consumption Externalities, Portfolio Choice, and Asset Prices', Journal of Money, Credit and Banking, 26 (1), 1-8.

Gancia, Gino and Fabrizio Zilibotti (2009), 'Technological Change and the Wealth of Nations', Annual Review of Economics Annu. Rev. Econ., 1 (1), 93-120.

García-Belenguer, Fernando (2007), 'Stability, global dynamics and Markov equilibrium in models of endogenous economic growth', Journal of Economic Theory, 136 (1), 392-416.

Gómez, Manuel A. (2008), 'Consumption and Leisure Externalities, Economic Growth and Equilibrium Efficiency', Scottish Journal of Political Economy, 55 (2), 227-49.

——— (2004), 'Optimality of the Competitive Equilibrium in the Uzawa-Lucas Model with Sector-Specific Externalities', Economic Theory, 23 (4), 941-48.

Grossman, Gene.M. and Elhanan Helpman (1991), 'Innovation and Growth in the Global Economy',

Hayashi, Fumio (1989), 'Is Japan´s Savings Rate High?', Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, Sping 3-9.

Howitt, Peter (1999), 'Steady Endogenous Growth with Population and R & D Inputs Growing', Journal of Political Economy, 107 (4), 715-30.

Howitt, Peter and Philippe Aghion (1998), 'Capital Accumulation and Innovation as Complementary Factors in Long-Run Growth', Journal of Economic Growth, 3 (2), 111-30.

——— (1998), 'Capital Accumulation and Innovation as Complementary Factors in Long-Run Growth', Journal of Economic Growth, 3 (2), 111-30.

Jellal, Mohamed and Mohamed Bouzahzah (2012), 'Governance, Education and Economic Growth', MPRA Papers, 38867

Jones, Charles I. (1995), 'R & D-Based Models of Economic Growth', Journal of Political Economy, 103 (4), 759-84.

Jones, Larry E. and Rodolfo Manuelli (1990), 'A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications', Journal of Political Economy, 98 (5), 1008-38.

Jones, Larry E. and Rodolfo E. Manuelli (1992), 'Finite Lifetimes and Growth', Journal of Economic Theory, 58 (2), 171-97.

Jovanovic, Boyan and Rodolfo Manuelli (1995), 'Learning and Growth', NBER Working Papers, 5383

Jovanovic, Boyan and Yaw Nyarko (1996), 'Learning by Doing and the Choice of Technology', Econometrica, 64 (6), 1299-310.

Kahanec, Martin (2006), 'Ethnic Specialization and Earnings Inequality: Why Being a Minority Hurts But Being a Big Minority Hurts More', IZA Discussion Papers, 2050

Kalaitzidakis, Pantelis (1997), 'On-The-Job Training Under Firm-Specific Innovations and Worker Heterogeneity', Industrial Relations: A Journal of Economy and Society, 36 (3), 371-90.

Kawamoto, Koichi (2008), 'Sector-specific Externalities and Status Preferences in the Uzawa-Lucas model', Japanese Economic Review, 59 (3), 312-23.

King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio T. Rebelo (1988), 'Production, growth and business cycles: I. The basic neoclassical model', Journal of Monetary Economics, 21 (2,Äì3), 195-232.

——— (1988), 'Production, growth and business cycles: II. New directions', Journal of Monetary Economics, 21 (2,Äì3), 309-41.

King, Robert. G. and Sergio Rebelo (1988), 'Business Cycles with Endogenous Growth', University of Rochester Working Papers, February 1988

Kortum, Samuel S. (1997), 'Research, Patenting, and Technological Change', Econometrica, 65 (6), 1389-419.

Ladrón de Guevara, Antonio, Salvador Ortigueira, and Manuel S. Santos (1997), 'Equilibrium dynamics in two-sector models of endogenous growth', Journal of Economic Dynamics and Control, 21 (1), 115-43.
——— (1999), 'A Two-Sector Model of Endogenous Growth with Leisure', The Review of Economic Studies, 66 (3), 609-31.
Lim, J. Jerome and Jonathon Adams-Kane (2008), 'Institutions, Education and Economic Performance', MPRA Papers, 11800
Long, John B., Jr. and Charles I. Plosser (1983), 'Real Business Cycles', Journal of Political Economy, 91 (1), 39-69.
Lucas, Robert E, Jr. (1988), 'On the Mechanics of Economic Development', Journal of Monetary Economics, 22 (1), 3-42.
Lucas, Robert. E. Jr. (1990), 'Supply-Side Economics: An Analytical Review', Oxford Economic Papers New Series, 42 (2), 293-316.
——— (1993), 'Making a Miracle', Econometrica, 61 (2), 251-72.
——— (2004), 'The Industrial Revolution: Past and Future', Federal Reserve Bank of Minneapolis Annual Report, 5-20.
Mao, Zi-Ying (2012), 'Learning-By-Doing and Its Implications for Economic Growth and International Trade', MPRA Papers, 40112
Mattana, Paolo, Kazuo Nishimura, and Tadashi Shigoka (2009), 'Homoclinic bifurcation and global indeterminacy of equilibrium in a two-sector endogenous growth model', International Journal of Economic Theory, 5 (1), 25-47.
McGuirk, Helen, Helena Lenihan, and Mark Hart (2015), 'Measuring the Impact of Innovative Human Capital on Small Firms,Äô Propensity to Innovate', Research Policy, 44 (4), 965-76.
Mino, Kazuo (2001), 'Indeterminacy and Endogenous Growth with Social Constant Returns', Journal of Economic Theory, 97 (1), 203-22.
——— (1999), 'Non-separable utility function and indeterminacy of equilibrium in a model with human capital', Economics Letters, 62 (3), 311-17.
——— (2000), 'Sector-Specific Externalities and Endogenous Growth under Constant Social Returns', MPRA Working Papers, Nº 16993
——— (2003), 'Human Capital Formation and Patterns of Gorwth with Multiple Equilibria', MPRA Working Papers, 58146
——— (2002), 'Indeterminacy in Two-Sector Models of Endogenous Growth with Leisure', MPRA Papers, 16994
Mulligan, Casey B. and Xavier Sala-I-Martin (1993), 'Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth', The Quarterly Journal of Economics, 108 (3), 739-73.
——— (1991), 'A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Dynamic Models', NBER Technical Working Papers, 116

Nelson, Richard R. and Edmund S. Phelps (1966), 'Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth', The American Economic Review, 56 (1/2), 69-75.

Ortigueira, Salvador (2000), 'A dynamic analysis of an endogenous growth model with leisure', Journal of Economic Theory, 16 (1), 43-62.

Osang, Thomas and Jayanta Sarkar (2008), 'Endogenous Mortality, Human Capital and Economic Growth', Journal of Macroeconomics, 30 (4), 1423-45.

Parente, Stephen L. (1994), 'Technology Adoption, Learning-by-Doing, and Economic Growth', Journal of Economic Theory, 63 (2), 346-69.

Patron, Rossana (2014), 'Education, institutions and Growth: Fact-Finding using Available Data', Investigaciones de la Teoría de la Educación 9, 9 (5),

Perli, Roberto (1998), 'Indeterminacy, home production, and the business cycle: A calibrated analysis', Journal of Monetary Economics, 41 (1), 105-25.

Ponzetto, Giacomo and Ugo Troiano (2014), 'Social Capital, Government Expenditures and Growth', Barcelona Graduate School of Economics Working Papers, 612

Prescott, Edward C. (1972), 'The Multi-Period Control Problem Under Uncertainty', Econometrica, 40 (6), 1043-58.

Rebelo, Sergio (1991), 'Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth', Journal of Political Economy, 99 (3), 500-21.

Redding, Stephen (1996), 'The Low-Skill, Low-Quality Trap: Strategic Complementarities between Human Capital and R & D', The Economic Journal, 106 (435), 458-70.

Romer, Paul M. (1990), 'Human Capital and Growth: Theory and Evidence', Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 32 (0), 251-86.

——— (1990), 'Endogenous Technological Change', Journal of Political Economy, 98 (5), S71-S102.

Scicchitano, Sergio (2010), 'Complementarity Between Heterogeneous Human Capital and R&D: Can On-The-Job-Training Avoid Low Development Traps?', Empirica, 37 (4), 361-80.

Segerstrom, Paul S. (1998), 'Endogenous Growth without Scale Effects', The American Economic Review, 88 (5), 1290-310.

Sequeira, Tiago Neves and Alexandra Ferreira-Lopes (2011), 'An Endogenous Growth Model with Human and Social Capital Interactions', Review of Social Economy, 69 (4), 465-93.

Shell, Karl (1966), 'Toward A Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation', The American Economic Review, 56 (1/2), 62-68.

Solow, Robert M. (1956), 'A Contribution to the Theory of Economic Growth', The Quarterly Journal of Economics, 70 (1), 65-94.

——— (1957), 'Technical Change and the Aggregate Production Function', The Review of Economics and Statistics, 39 (3), 312-20.

Stadler, Manfred (2013), 'Scientific breakthroughs, innovation clusters and stochastic growth clusters', University of Tuebingen Working Papers in Economics and Finance, 60
Stokey, Nancy L. (1995), 'R&D and Economic Growth', The Review of Economic Studies, 62 (3), 469-89.
——— (1991), 'Human Capital, Product Quality, and Growth', The Quarterly Journal of Economics, 106 (2), 587-616.
——— (1988), 'Learning by Doing and the Introduction of New Goods', Journal of Political Economy, 96 (4), 701-17.
Sylvain, S. (2014), 'Does Human Capital Risk Explain the Value Premium Puzzle?', MPRA Papers, 54551
Tang, Y. and P. Wang (2012), 'General vs. Specific Human Capital, Endogenous Job Turnover and Within Group Wage Inequality', Paper prepared for the 2012 Society for Advanced Economic Theory Conference,
Uzawa, Hirofumi (1965), 'Optimum Technical Change in An Aggregative Model of Economic Growth', International Economic Review, 6 (1), 18-31.
——— (1961), 'Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium', The Review of Economic Studies, 28 (2), 117-24.
Varvarigos, Dimitrios and IntanZanariah Zakaria (2013), 'Endogenous Fertility in a Growth Model with Public and Private Health Expenditures', J Popul Econ, 26 (1), 67-85.
Vourvachaki, E., V. Jerbashian, and S. Slobodyan (2014), 'Specific and General Human Capital in an Endogenous Growth Model', CERGE-EI Working Papers, 520
Wen, Yi (1998), 'Capacity Utilization under Increasing Returns to Scale', Journal of Economic Theory, 81 (1), 7-36.
Wilson, Robert (1975), 'Informational Economies of Scale', The Bell Journal of Economics, 6 (1), 184-95.
Young, Alwyn (1998), 'Growth without Scale Effects', Journal of Political Economy, 106 (1), 41-63.
——— (1991), 'Learning by Doing and the Dynamic Effects of International Trade', The Quarterly Journal of Economics, 106 (2), 369-405.
Zeng, Jinli (2003), 'Reexamining the interaction between innovation and capital accumulation', Journal of Macroeconomics, 25 (4), 541-60.

BIBLIOGRAFIA SOBRE MODELOS DE GENERACIONES SOLAPADAS

Abel, A.B. (1986), 'Long-Run Effects of Fiscal Policy Under Altruism and Endogenous Fertility', *Harvard University Working Paper,*
Acemoglu, Daron and Simon Johnson (2007), 'Disease and Development: The Effect of Life Expectancy on Economic Growth', *Journal of Political Economy*, 115 (6), 925-85.

Aiyagari, S.R. (1989), 'Equilibrium existence in an overlapping generations model with altruistic preferences', *Journal of Economic Theory*, 47 (1), 130-52.

Aiyagari, S.Rao and Ellen R. McGrattan (1998), 'The optimum quantity of debt', *Journal of Monetary Economics*, 42 (3), 447-69.

Altonji, Joseph J., Fumio Hayashi, and Laurence J. Kotlikoff (1997), 'Parental Altruism and Inter Vivos Transfers: Theory and Evidence', *Journal of Political Economy*, 105 (6), 1121-66.

Azariadis, Costas and Allan Drazen (1990), 'Threshold Externalities in Economic Development', *The Quarterly Journal of Economics*, 105 (2), 501-26.

Azarnert, Leonid V. (2006), 'Child Mortality, Fertility, and Human Capital Accumulation', *Journal of Population Economics*, 19 (2), 285-97.

Barro, Robert J. (1974), 'Are Government Bonds Net Wealth?', *Journal of Political Economy*, 82 (6), 1095-117.

Barro, Robert J. and Gary S. Becker (1989), 'Fertility Choice in a Model of Economic Growth', *Econometrica*, 57 (2), 481-501.

Becker, Gary S. (1972), 'Schooling and Inequality from Generation to Generation: Comment', *Journal of Political Economy*, 80 (3), S252-55.

Becker, Gary S. and Robert J. Barro (1988), 'A Reformulation of the Economic Theory of Fertility', *The Quarterly Journal of Economics*, 103 (1), 1-25.

Becker, Gary S. and Kevin M. Murphy (1988), 'The Family and the State', *Journal of Law and Economics*, 31 (1), 1-18.

Becker, Gary S., Kevin M. Murphy, and Robert Tamura (1990), 'Human Capital, Fertility, and Economic Growth', *Journal of Political Economy*, 98 (5), S12-37.

Bencivenga, Valerie R. and Bruce D. Smith (1988), 'Financial Intermediation and Endogenous Growth', *University of Rochester Economic Research Centre Working Papers*, 124

Bhattacharya, Joydeep and Xue Qiao (2007), 'Public and Private Expenditures on Health in a Growth Model', *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31 (8), 2519-35.

Blackburn, Keith and Giam Pietro Cipriani (2002), 'A Model of Longevity, Fertility and Growth', *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26 (2), 187-204.

Boldrin, Michele (1992), 'Dynamic externalities, multiple equilibria, and growth', *Journal of Economic Theory*, 58 (2), 198-218.

——— (1991), 'Threshold Externalities and Economic Development: A Note', *Kellog Northwestern University Discussion Papers*, 953

Boldrin, Michele and Larry E. Jones (2002), 'Mortality, Fertility, and Saving in a Malthusian Economy', *Review of Economic Dynamics*, 5 (4), 775-814.

Boucekkine, Raouf, David De la Croix, and Omar Licandro (2002), 'Vintage Human Capital, Demographic Trends, and Endogenous Growth', *Journal of Economic Theory*, 104 (2), 340-75.

Caballé, Jordi and Manuel S. Santos (1993), 'On Endogenous Growth with Physical and Human Capital', *Journal of Political Economy*, 101 (6), 1042-67.

Cervellati, Matteo and Uwe Sunde (2005), 'Human Capital Formation, Life Expectancy, and the Process of Development', *The American Economic Review*, 95 (5), 1653-72.

——— (2011), 'Life expectancy and economic growth: the role of the demographic transition', *Journal of Economic Growth*, 16 (2), 99-133.

Cervellati, Matteo and Uwe Sundre (2007), 'Human Capital, Mortality and Fertility: A Unified Theory of the Demographic Transition', *IZA Discussion Paper Series*, DP 2905

Chamley, Christophe (1993), 'Externalities and Dynamics in Models of "Learning or Doing"', *International Economic Review*, 34 (3), 583-609.

Chen, Hung-Ju (2010), 'Life expectancy, fertility, and educational investment', *Journal of Population Economics*, 23 (1), 37-56.

Chou, Chien-Fu and Oz Shy (1991), 'An overlapping generations model of self-propelled growth', *Journal of Macroeconomics*, 13 (3), 511-21.

——— (1993), 'The Crowding-Out Effects of Long Duration of Patents', *The RAND Journal of Economics*, 24 (2), 304-12.

Coulombe, S. and J.F. Trembay (2004), 'Literacy, Human Capital and Growth', *University of Ottawa, Department of Economics Working Papers*, 04007E

De Gregorio, José (1996), 'Borrowing Constraints, Human Capital Accumulation and Growth', *Journal of Monetary Economics*, 37 (1), 49-71.

De la Croix, David and Omar Licandro (1999), 'Life Expectancy and Endogenous Growth', *Economics Letters*, 65 (2), 255-63.

Diamond, Peter A. (1965), 'National Debt in a Neoclassical Growth Model', *The American Economic Review*, 55 (5), 1126-50.

Doepke, Matthias (2004), 'Accounting for Fertility Decline During the Transition to Growth', *Journal of Economic Growth*, 9 (3), 347-83.

——— (2005), 'Child Mortality and Fertility Decline: Does the Barro-Becker Model Fit the Facts?', *Journal of Population Economics*, 18 (2), 337-66.

Drazen, Allan (1978), 'Government Debt, Human Capital, and Bequests in a Life-Cycle Model', *Journal of Political Economy*, 86 (3), 505-16.

Duncan, Otis Dudley (1968), 'Ability and Achievement', *Eugenics*, 15 (March 1968), 1-11.

Echevarría, Cruz A. and Amaia Iza (2006), 'Life expectancy, human capital, social security and growth', *Journal of Public Economics*, 90 (12), 2323-49.

Ehrlich, Isaac (1990), 'The Problem of Development: Introduction', *Journal of Political Economy*, 98 (5), S1-S11.

Ehrlich, Isaac and Hiroyuki Chuma (1990), 'A Model of the Demand for Longevity and the Value of Life Extension', *Journal of Political Economy*, 98 (4), 761-82.

Ehrlich, Isaac and Jinyoung Kim (2005), 'Endogenous Fertility, Mortality and Economic Growth: Can a Malthusian Framework Account for the Conflicting Historical Trends in Population?', *Journal of Asian Economics*, 16 (5), 789-806.

Ehrlich, Isaac and Francis T. Lui (1991), 'Intergenerational Trade, Longevity, and Economic Growth', *Journal of Political Economy*, 99 (5), 1029-59.

Fiaschi, Davide and Tamara Fioroni (2012), 'The Role of the Mortality Rate in the Transition from Stagnation to Growth', *DEGIT Conference Papers*, C17_008

Finlay, Jocelyn 'The Role of Health in Economic Development', *PGDA Working Papers*, 21

Fioroni, Tamara (2010), 'Child mortality and fertility: public vs private education', *Journal of Population Economics*, 23 (1), 73-97.

——— (2010), 'Optimal Savings and Health Spending Over the Life Cycle', *Eur J Health Econ*, 11 (4), 355-65.

Flemming, J. S. (1979), 'The Effects of Earnings Inequality, Imperfect Capital Markets, and Dynastic Altruism on the Distribution of Wealth in Life Cycle Models', *Economica New Series*, 46 (184), 363-80.

Freeman, Scott and Stephen Polasky (1992), 'Knowledge-based growth', *Journal of Monetary Economics*, 30 (1), 3-24.

Galor, Oded (2005), 'Chapter 4 From Stagnation to Growth: Unified Growth Theory', in Philippe, Aghion and Steven N. Durlauf (ed.), *Volume 1, Part A* (Elsevier), 171-293.

——— (1992), 'A Two-Sector Overlapping-Generations Model: A Global Characterization of the Dynamical System', *Econometrica*, 60 (6), 1351-86.

Galor, Oded and Omer Moav (2006), 'Das Human-Kapital: A Theory of the Demise of the Class Structure', *The Review of Economic Studies*, 73 (1), 85-117.

Gong, Liutang, Hongyi Li, and Dihai Wang (2012), 'Health Investment, Physical Capital Accumulation, and Economic Growth', *China Economic Review*, 23 (4), 1104-19.

Hansen, Gary D. and Edward C. Prescott (2002), 'Malthus to Solow', *The American Economic Review*, 92 (4), 1205-17.

Hanushek, Eric A. (1992), 'The Trade-off between Child Quantity and Quality', *Journal of Political Economy*, 100 (1), 84-117.

Hayashi, Fumio (1989), 'Is Japan´s Savings Rate Too High?', *Federal Reserve of Minneapolis Quarterly Review*, 13 (Spring), 3-9.

Heijdra, Ben J. and Ward E. Romp (2006), 'Ageing and Growth in the Small Open Economy', *CESifo Working Paper Series*, 1740

Hu, Sheng-Cheng (1999), 'Economic growth in the perpetual-youth model: Implications of the annuity market and demographics', *Journal of Macroeconomics*, 21 (1), 107-24.

Jones, Charles I. (2001), 'Was an Industrial Revolution Inevitable? Growth over the Very Long Run', *The B.E. Journal of Economics*, 1 (August), 1-45.

Jones, Larry E. and Rodolfo Manuelli (1990), ‘A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications’, *Journal of Political Economy*, 98 (5), 1008-38.

Jones, Larry E. and Rodolfo E. Manuelli (1992), ‘Finite Lifetimes and Growth’, *Journal of Economic Theory*, 58 (2), 171-97.

Kalemli-Ozcan, Sebnem (2002), ‘Does the Mortality Decline Promote Economic Growth?’, *Journal of Economic Growth*, 7 (4), 411-39.

Kalemli-Ozcan, Sebnem, Harl E. Ryder, and David N. Weil (2000), ‘Mortality decline, human capital investment, and economic growth’, *Journal of Development Economics*, 62 (1), 1-23.

Kehoe, Timothy J. and David K. Levine (2001), ‘Liquidity Constrained Markets Versus Debt Constrained Markets’, *Econometrica*, 69 (3), 575-98.

Kremer, Michael (1993), ‘Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990’, *The Quarterly Journal of Economics*, 108 (3), 681-716.

Kremer, Michael and DanielL. Chen (2002), ‘Income Distribution Dynamics with Endogenous Fertility’, *Journal of Economic Growth*, 7 (3), 227-58.

Lagerlof, Nils-Petter (2003), ‘Mortality and Early Growth in England, France and Sweden’, *Scandinavian Journal of Economics*, 105 (3), 419-40.

Laitner, John (1988), ‘Bequests, Gifts, and Social Security’, *The Review of Economic Studies*, 55 (2), 275-99.

Lucas, Jr., Robert E and Nancy L Stokey (1984), ‘Optimal growth with many consumers’, *Journal of Economic Theory*, 32 (1), 139-71.

Ludwig, Alexander and Edgar Vogel (2010), ‘Mortality, fertility, education and capital accumulation in a simple OLG economy’, *Journal of Population Economics*, 23 (2), 703-35.

Morand, Oliver F. (1999), ‘Endogenous Fertility, Income Distribution, and Growth’, *Journal of Economic Growth*, 4 (3), 331-49.

Morand, OlivierF. (2004), ‘Economic growth, longevity and the epidemiological transition’, *HEPAC*, 5 (2), 166-74.

Samuelson, Paul A. (1968), ‘The Two-Part Golden Rule Deduced as the Asymptotic Turnpike Catenary Motions’, *Western Economic Journal*, 6 85-89.

——— (1958), ‘An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money’, *Journal of Political Economy*, 66 (6), 467-82.

Schmitz, James A., Jr. (1989), ‘Imitation, Entrepreneurship, and Long-Run Growth’, *Journal of Political Economy*, 97 (3), 721-39.

Schultz, Theodore. W. (1964), ‘Transforming Traditional Agriculture’,

Soares, Rodrigo R. (2005), ‘Mortality Reductions, Educational Attainment, and Fertility Choice’, *The American Economic Review*, 95 (3), 580-601.

Srinivasan, T.N. (1988), ‘Fertility and Old Age Security in an Overlapping Generations Model’, *Journal of Quantitative Economics*, 4 (January), 11-17.

Stokey, Nancy L. (1988), 'Learning by Doing and the Introduction of New Goods', *Journal of Political Economy*, 96 (4), 701-17.

——— (1991), 'Human Capital, Product Quality, and Growth', *The Quarterly Journal of Economics*, 106 (2), 587-616.

Tray, Dennis N. De (1973), 'Child Quality and the Demand for Children', *Journal of Political Economy*, 81 (2), S70-95.

Van Groezen, Bas, Theo Leers, and Lex Meijdam (2003), 'Social security and endogenous fertility: pensions and child allowances as siamese twins', *Journal of Public Economics*, 87 (2), 233-51.

Varvarigos, Dimitrios (2013), 'A Theory of Demographic Transition and Fertility Rebound in the Process of Economic Development', *University of Leicester Discussion Papers in Economics*, 13/19

Varvarigos, Dimitrios and IntanZanariah Zakaria (2013), 'Endogenous Fertility in a Growth Model with Public and Private Health Expenditures', *J Population Economics*, 26 (1), 67-85.

Weil, David N. (2014), 'Health and Economic Growth', in Philippe, Aghion and Steven N. Durlauf (ed.), (Handbook of Economic Growth, volume 2, Elsevier), 623-82.

Willis, Robert J. (1986), 'Chapter 10 Wage Determinants: A Survey and Reinterpretation of human Capital Earnings Functions', in Orley, C. Ashenfelter and Richard Layard (ed.), *Volume 1* (Elsevier), 525-602.

Yaari, Menahem E. (1965), 'Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer', *The Review of Economic Studies*, 32 (2), 137-50.

Zhang, Jie and Junsen Zhang (1997), 'Fertility and Wage Rates in an Overlapping-Generations Model', *The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d'Economique*, 30 (1), 224-34.

CAPÍTULO IV. TASAS DE RETORNO DEL CAPITAL HUMANO.

IV.1. Concepto beckeriano. El modelo canónico.

En su artículo de 1962, Becker distingue varias vías de acumulación humano complementarias entre sí. Todas ellas comparten varios elementos en común, pero presentan a la vez algunas diferencias conceptuales. Mientras el aprendizaje de las habilidades laborales en el centro de trabajo fue la variedad que predominó históricamente en los primeros tiempos de la industrialización, progresivamente determinadas disciplinas pasaron a poder conocerse y asimilarse en mayor profundidad en determinadas instituciones especializadas, que denominamos escuelas. En esencia, escuelas y actividades de aprendizaje en el trabajo suelen compartir tecnologías de formación, mientras que se diferencian por rasgos secundarios como la duración de los procesos de aprendizaje (habitualmente superiores en las empresas) y los organizadores de dichos procesos, que en un caso suelen ser los gerentes de las propias empresas y en otros los de las escuelas. Incluso puede suceder que, de poseer el trabajador la tecnología de formación, él mismo sea quien se forme a sí mismo a partir de análogos elementos que los empleados en cualquiera de los otros dos canales; este es el fenómeno de autoproducción a que se hizo referencia al hablar de la estrategia modelizadora de la adquisición de capital humano en equilibrio parcial.

Entre las concomitancias entre los diversos procedimientos de inversión en capital humano, la principal de ellas es que, en cualquiera de los casos considerados, la inversión en el activo implica un sacrificio de recursos: cuando es la empresa la que organiza la actividad de aprendizaje, será sacrificio productivo; cuando la formación tiene lugar en el seno de una escuela, entonces será el propio individuo el que sacrifique recursos a consecuencia de una remuneración de mercado a la que se renuncia. En cualquier caso, el tiempo es el vínculo entre la intensidad del aprendizaje acometido y sus costes, en la medida en que el tiempo consagrado al aprendizaje entraña una renuncia a llevar a cabo actividades productivas, de las que se deriva una productividad marginal sacrificada en el seno de la empresa y un salario para el trabajador (veremos que cuando se inserta la adquisición de capital humano en un entorno de equilibrio general ambos costes acaban coincidiendo al aplicad la condición de maximización del beneficio empresarial).

Por otro lado, como todo proceso de inversión, existe un pago que se obtiene con el transcurso del tiempo como contraprestación al sacrificio realizado. Esta compensación viene dada por una mayor productividad del trabajador como resultado del proceso de aprendizaje o, equivalentemente, una mayor remuneración diferencial al trabajador. Esta será la renta del activo. La mayor diferencia con la inversión en otros activos reales estriba en que las ganancias de capital realizadas al vender el activo, tras la obtención de sus rentas, no son directamente observables al no pasar por el mercado el capital humano. Matizaremos no obstante esta cuestión más adelante.

Antes de pasar a establecer la tasa de retorno sobre la inversión en escolarización, habrá que definir el pay-off que se deriva de la realización de este tipo de inversión. En su ausencia, el trabajador percibiría un determinado salario real por hora e_0 . Tras la escolarización y siempre que se finalice con éxito, estará en condiciones de percibir un salario real más elevado e_1 (los subíndices denotan situaciones alternativas). Pero tampoco puede olvidarse que el acceso a la escolarización habrá conllevado una serie de gastos directos (desplazamientos, eventualmente formalización de una matrícula escolar, alojamiento, compra de material académico...) que, expresados también en unidades del numerario, ascenderán a p^h . En un escenario sin inversión en capital humano, el ingreso total del trabajador será, siendo r la tasa de descuento dada por un activo financiero libre de riesgo:

$$e_0 + \frac{e_0}{1+r} \quad (4.1)$$

Cuando se invierte en capital humano, se dejará de ingresar en el primer período salario alguno; supondremos inicialmente -si bien después se relajará este supuesto- que el tiempo dedicado a educación impide desempeñar en el primer período actividad productiva alguna-. En el segundo período, una vez ha madurado la inversión a finales del primero, se percibe otro salario superior coherente con un nivel de productividad superior; además se incurren en los mencionados costes directos de adquisición de la educación. De este modo, el valor actualizado de los flujos ligados a esta segunda alternativa o ganancia neta en una situación de inversión será:

$$-p_0^h + \frac{e_1}{1+r}; e_1 > e_0 \quad (4.2)$$

Por tanto, las ganancias netas derivadas de acometer la inversión serán iguales a la diferencia entre ambos flujos descontados:

$$pay-off \equiv \frac{(e_1 - e_0)}{1+r} - p_0^h - e_0 \quad (4.3)$$

Este pay-off se descompone en varios términos: uno, la ganancia incremental de salario en el segundo período, que es la renta del activo. A este se descuentan los costes directos y el salario al que renuncia el trabajador durante el primer período por estar inmerso en el proceso educativo. El paso del pay-off a la tasa de retorno es inmediato; si suponemos que E abarca la suma de los costes directos e indirectos en la inversión, la obtención de la tasa exigirá igualar el flujo inicial de desembolsos a la corriente descontada -a la tasa- de pagos, luego:

$$rrn_s^h = \frac{(e_1 - e_0)}{E_0} - 1; E_0 = p_0^h + e_0 \quad (4.4)$$

La tasa de retorno bruta podrá calcularse sin más que sumar 1 a la tasa de retorno neta.

Visto este precedente, se abordará a continuación la obtención de la tasa de retorno del capital humano en un modelo de equilibrio general dinámico canónico, un marco como el planteado por Ghez y Becker (1975) con una función de acumulación de capital humano tipo Ben-Porath (1967). Uno de los objetivos del análisis es verificar hasta qué punto el resultado es consistente con la intuición de Becker en su artículo de 1962 y estudiar las propiedades de la tasa. En los próximos apartados se extenderá este enfoque a diversas variantes del caso canónico.

Recordemos que el modelo elegido implica un entorno institucional de autoproducción del capital humano a partir de dos inputs: tiempo de aprendizaje y bien compuesto de mercado. La novedad respecto los trabajos mencionados es que el proceso de acumulación de capital humano se insertará en equilibrio general con una estructura en la línea de Lucas (1988). A su vez existen algunas diferencias con el citado trabajo de Lucas, como la extensión del análisis a distintos inputs del capital humano, a un escenario sin efectos externos en la función de producción del bien final, la no imposición de un tipo concreto de rendimientos a la función de acumulación de capital humano y, finalmente, la perspectiva será la de un equilibrio descentralizado de mercado a la hora de definir las restricciones presupuestarias, en lugar de la de planificador de mercado que emplearía la restricción de recursos del conjunto de la economía[123].

Comenzaremos por un caso más sencilo de equilibrio parcial. Inicialmente resolveremos el problema de un hogar consumidor y oferente de trabajo con unas funciones de comportamiento genéricas, para pasar después a trabajar con especificaciones concretas. Comenzaremos por suponer que el hogar individual planifica paramétricamente respecto

[123] En cualquier caso, las condiciones de primer orden deberían ser coincidir con las que caracterizan el óptimo social en ausencia de efectos externos. Aun así, el enfoque es el descrito por explicitar en mayor medida los fundamentos microeconómicos del modelo de Lucas.

a precios a lo largo de un número finito de períodos T, a lo largo de los cuales maximiza su función de utilidad dependiente exclusivamente del consumo de una cierta commodity. En el caso canónico supondremos también que el tiempo de ocio -en terminología beckeriana, el dedicado a la producción doméstica de lamencionada commodity- presenta una productividad marginal nula, por lo que la commodity puede generarse solamente a partir de la aplicación del bien compuesto de mercado C. Bajo esta hipótesis, las preferencias intertemporales del hogar representativo se formularán del siguiente modo:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^{s} u\left(C_{s}\right) \quad (4.5)$$

La función es estrictamente creciente, cóncava, y la utilidad marginal verifica las condiciones de Inada, tal que:

$$u_C > 0;\ u_{CC} < 0;\ \lim_{C\to\infty} u_C = 0;\ \lim_{C\to 0} u_C = \infty \quad (4.6)$$

La economía doméstica puede consumir, adquirir inputs para la producción de capital humano o ahorrar sus recursos (denotando al ahorro mediante la letra s). Si adopta esta última decisión, el producto de su ahorro se remunerará a un tipo de interés real dado por r[124]; el ahorro puede ser positivo o negativo (indicando en este último caso que la posición negativa en activos financieros más que compensa la posición en activos reales, si ambos tipos de activos formaran parte de la cartera del hogar representativo). La condición de solvencia del hogar individual exigirá que, siendo b su posición en activos financieros al final de su horizonte de planificación, se verifique:

$$\frac{b_{T+1}}{\prod_{j=0}^{T-1}\left(1+r_j\right)} = 0 \quad (4.7)$$

Respecto a la producción de capital humano, se lleva a cabo mediante una función de acumulación del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} &a_{s+1}^{h} = i_s^h + \left(1-\delta^h\right) a_s^h;\ i_s^h = h\left(a_s^h n_s^h, x_s^h\right); \\ &h_{an}, h_x > 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Esto es, la función de acumulación h utiliza como inputs tanto la fracción de capital humano destinada al aprendizaje como los gastos en educación materializados en el bien final, que tiene este uso alternativo además del consumo que genera directamente utili-

124 Por el momento no se realizará ninguna distinción adicional en cuanto a los activos financieros o reales en que puede materializarse dicho ahorro. En el apartado de equilibrio general se distinguirá un activo financiero, bonos, y otro activo real, capital productivo. Por el momento esta diferenciación no es necesaria.

dad. La función h está definida en $\mathbb{R}^+$, de modo su el output solamente puede ser un valor real positivo. Además, sus primeras derivadas son positivas o nulas en todos sus argumentos, mientras que respecto a las segundas, se efectuarán supuestos alternativos a lo largo de este capítulo. Las primeras derivadas cruzadas se considerarán positivas en todos los casos.

Siguiendo a Ben-Porath (1967), se considerará que el capital humano y la fracción de tiempo de aprendizaje constituye un input unitario y, como tal, ambas variables interactúan siempre multiplicativamente y están sujetas a los mismos rendimientos[125]. Cuando el input principal del proceso de acumulación es la cuantía de servicios del capital humano asignados a la producción del activo, se tomará en general $h_{an} > 0$ y $h_x = 0$ a la hora de derivar las tasas de retorno. Alternativamente, se analizará también la tasa de retorno cuando la inversión en capital humano toma la forma de gasto educativo, suponiendo que el tiempo de trabajo es exógeno, pudiendo destinarse la parte residual de la dotación de tiempo del período a aprendizaje. Por tanto, en este caso ambas derivadas parciales de h serán positivas, solo que, aun dependiendo la tecnología de dos inputs, solo uno de ellos constituirá en puridad una variable de control. Así, se tendrá:

$$i_s^h = h\left(a_s^h \overline{n}_s^h, x_s^h\right);\ \overline{n}_s^h = 1 - \overline{n}_s^w;\ h_{an} > 0;\ h_x > 0 \quad (4.9)$$

Salvo en algunos apartados en que se hace explícito el supuesto contrario, la intervención del capital humano en las tecnologías del bien final y de aprendizaje se hace a título de input privado, por lo que en principio no se consideran efectos externos. Los agentes internalizan plenamente, por tanto, las consecuencias de la acumulación de unidades adicionales del activo en los períodos futuros. Por último, comentar que en los apartados dedicados al modelo básico se consideran solamente rendimientos constantes en el capital humano (y, cuando es variable, en el tiempo de aprendizaje). Sin embargo, los rendimientos del input de mercado x se considerarán sucesivamente tanto crecientes como decrecientes.

---

[125] La inmensa mayoría de aquellos autores más vinculados al enfoque original beckeriano utilizan este supuesto, de manera no menor Lucas. No obstante, una parte no desdeñable de la literatura, en modelos más débilmente microfundamentados admiten la posibilidad de que capital humano y fracción de tiempo de su utilización en aprendizaje constituyan inputs distintos, por lo que pueden estar sometidos a distintos rendimientos a escala. En este capítulo se optará por la primera posibilidad, por considerarse más firmemente entroncada con el origen de la teoría del capital humano en los años 60, así como por tener una base conceptual más clara.

Dado el supuesto realizado sobre el signo del output de h, la inversión bruta solamente podrá ser positiva o nula y por lo tanto la única forma de desacumulación de capital humano será la existencia de una tasa de depreciación mayor que cero. Además, en el primer período se supondrá que el individuo parte con una dotación natural a_0^h . Como supuesto general se asumirá también que $a_0^h \geq 1$. Esta última hipótesis será importante en equilibrio general al introducir el sector productor, ya que implicará que, en ausencia de depreciación, el stock del capital potenciará la productividad del tiempo destinado a trabajar, en lugar de reducirla. No obstante, si la tasa de depreciación fuera mayor que cero y la producción de capital humano, lo suficientemente reducida en comparación con la tasa de depreciación, sería posible concebir una situación en la que el stock del activo disminuyera por debajo de la unidad, erosionando por tanto la productividad del trabajo. Para que ello sucediera bastaría que $\frac{1}{\left(1-\delta^h\right)a_s^h} > h_s$

En cualquier caso, se impondrá en todo momento la condición de que el stock de capital humano sea positivo o nulo, estableciendo con ello un techo a la desacumulación del activo y evitando que la cantidad de input trabajo aplicada a la función de producción del bien de consumo (o eventualmente a propia función h) sea negativa, quebrando con ello la definición habitual de estas funciones (de vectores de reales positivos a escalares reales positivos).

Realizados estos supuestos y siendo e la remuneración de mercado por unidad de capital humano y por unidad de tiempo (o equivalentemente, la retribución a los servicios del capital humano por unidad de tiempo), la restricción presupuestaria flujo del individuo tomará la siguiente forma si el tiempo de trabajo es exógeno:

$$C_s + x_s^h + e_s a_s^h \left(1-\overline{n}_s^w\right) + b_{s+1} \leq e_s a_s^h + \left(1+r_s\right)b_s \quad (4.10)$$

O equivalentemente, sin más que sustituir la ecuación de asignación del tiempo por período en la restricción presupuestaria, podemos reformular esta última conforme aparece a continuación, poniendo de relieve más claramente esta versión que el tiempo dedicado al aprendizaje lleva aparejado un coste de oportunidad en términos de salario de mercado que deja de percibirse por la aportación de los servicios del trabajo a la producción del bien compuesto de consumo[126]:

$$C_s + x_s^h + b_{s+1} \leq e_s a_s^h \overline{n}^w + \left(1+r_s\right)b_s \quad (4.11)$$

Un aspecto destacable de esta restricción es el hecho de que, siendo la renta disponible la suma de la “renta total”, en un sentido beckeriano -esto es, la remuneración

[126] En ausencia del input x, el tiempo de trabajo se consideraría endógeno

máxima que podría obtenerse si se dedicase el tiempo máximo posible al trabajo- más la renta de los bonos, pueden distinguirse dos formas de materialización del ahorro: en bonos y en capital humano, por medio de la adquisición de x. Cuando el tiempo de trabajo es endógeno, la restricción podría reescribirse del siguiente modo, reflejando un concepto más purista de renta total laboral y reemplazando el gasto en x por el tiempo de aprendizaje como vía de canalización del ahorro hacia el activo real:

$$C_s + x_s^h + e_s a_s^h n_s^h + b_{s+1} \leq e_s a_s^h + (1+r_s) b_s \quad (4.12)$$

Por último, se establecen restricciones de no negatividad sobre una serie de variables, a saber:

$$C_s, x_s^h, n_s^h, n_s^w, a_{s+1}^h \geq 0 \quad (4.13)$$

Con estos elementos, se plantea un problema genérico con los dos inputs del capital humano como variables endógenas, para después establecer las restricciones antes comentadas sobre el tiempo de trabajo cuando $h_x \neq 0$. Para ello, se formula una función lagrangiana que tenga por objeto la maximización de las preferencias, sujeta a las restricciones presupuestarias, de acumulación y de no negatividad. Las variables de control del problema serán el consumo, los inputs que intervienen en la producción de capital humano, el tiempo de trabajo y el ahorro. La variable de estado, que permitirá describir la evolución en el tiempo del valor sombra del capital, será el stock de capital humano. Con estas premisas, la función lagrangiana adoptará la forma:

$$\Omega = \sum_{s=0}^{T} \beta^s \left\{ \begin{array}{l} u(C_s) + \lambda_s \left[e_s a_s^h + (1+r_s) S_s - C_s - x_s^h - e_s a_s^h n_s^h - b_{s+1} \right] + \\ + \mu_s \left[h\left(a_s^h n_s^h, x_s^h\right) + \left(1-\delta^h\right) a_s^h - a_{s+1}^h \right] + \gamma_s \left[1 - n_s^h \right] \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Las condiciones de primer orden que permiten resolver el problema son las que se recogen a continuación:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial C_s} = \beta^s \left[u'(C_s) - \lambda_s \right] \leq 0; \ (4.20)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial S_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} (1 + r_s) = 0; \ (4.21)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_s^h} = \beta^s \left(-\lambda_s + \mu_s h_{x,s} \right) \leq 0; \ (4.22)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n_s^h} = \beta^s \left(-\lambda_s e_s a_s^h + \mu_s h_{n,s} - \gamma_s \right) \leq 0; \ (4.23)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{s+1}^h} = -\beta^s \mu_s + \beta^{s+1} \left[\lambda_{s+1} e_{s+1} n_{s+1}^w + \mu_{s+1} \left\{ (1 - \delta) + h_{a,s+1} \right\} \right] \leq 0; \ (4.24)$$

$$\beta^T \mu_T a_{T+1}^h = 0; \ (4.25)$$

$$\lambda_s \left[C_s + x_s^h + e_s a_s^h n_s^h + b_{s+1} - e_s a_s^h - (1 + r_{s-1}) b_s \right] = 0; \ (4.26)$$

$$\gamma_s \left[1 - n_s^h \right] = 0 \ (4.27)$$

Las dos primeras condiciones son las habituales que permiten conformar la ecuación de Euler y la relación marginal de sustitución intertemporal entre consumos de períodos consecutivos en función de sus precios relativos: el tipo de interés real constituye el precio relativo del consumo presente en términos del consumo futuro. Las dos cpo relativas a los precios de inputs vinculan sus costes marginales, en términos de recursos que conlleva su aplicación, con sus ganancias marginales, dadas por la productividad marginal en la función de producción h ponderada por el valor sombra del capital humano. Siempre que no haya un equilibrio esquina en la asignación de tiempo entre sus usos alternativos $\gamma_s = 0$. Cerrando el sistema se encuentra la condición de transversalidad en horizonte finito y las últimas dos ecuaciones son las condiciones de holgura asociadas a las dos restricciones con desigualdad -aparte de las de no negatividad-.

En el período terminal T el valor sombra de la acumulación de capital humano es nulo, en la medida en que no podrá ser ya utilizado en la producción del período siguiente y no hay altruismo intergeneracional en la función de utilidad. Por tanto, $\mu_T = 0$ [127], lo que permitirá que la condición de transversalidad del capital humano se cumpla y al mismo tiempo el individuo muera con un stock positivo de capital humano. Obviamente esto implicará que en T no se aplica ningún input a la producción de este activo real y su variación a lo largo del período se produce exclusivamente por la acción de la depreciación. Esta demanda nula de inputs es consistente con las cpo, ya que:

$$-\beta^s \lambda_s \leq 0;\ -\beta^s \lambda_s e_s a_s^h - \gamma_s \leq 0 \text{ (4.28)}$$

Para obtener la tasa de retorno, despejaremos μ en las respectivas ecuaciones de demanda de los inputs y lo sustituiremos en la cpo de la variable de estado real. Adicionalmente se sustituirá en esta última ecuación el valor de λ despejado de la condición de Euler.

Comenzaremos derivando la tasa de retorno del input x. Por el momento supondremos que el tiempo de trabajo es exógeno, por lo que la cpo del tiempo de aprendizaje queda inoperativa. Realizando la manipulación algebraica descrita, se llega al siguiente resultado:

$$\mu_s = \frac{\lambda_s}{h_{x,s}};$$

$$\text{Entonces } \frac{\beta(1+r_s)\lambda_{s+1}}{h_{x,s}} = \beta\left[\lambda_{s+1}e_{s+1}\overline{n}^w + \frac{\lambda_{s+1}}{h_{x,s+1}}\left\{\left(1-\delta^h\right)+h_{a,s+1}\right\}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+r_s = \frac{e_{s+1}\overline{n}^w}{1/h_{x,s}} + \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)h_{a,s+1}}{1/h_{x,s}} + \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)\left(1-\delta^h\right)}{1/h_{x,s}} \equiv rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe} (4.29)$$

La ecuación anterior refleja, en condiciones de inversión bruta positiva en todos los activos disponibles, la necesaria igualdad en equilibrio entre la tasa de retorno de cualquiera de ellos. En concreto, la tasa de retorno de capital humano aparece en el miembro derecho como suma de tres componentes. Ambas tasas se expresan en términos marginales brutos. El primero de los sumandos del miembro derecho refleja la renta del activo, como ganancia marginal en términos de salario (para la totalidad del tiempo traba-

---

[127] La anulación de μ_T es compatible con la saturación de la cpo del input del capital humano. En efecto, si las productividades marginales de h respecto a los inputs cumplen las condiciones de Inada, $\lim_{j\to 0}\frac{\lambda_T}{h_{jT}} = 0;\ j = x,n$. Esto a su vez es coherente con el cumplimiento de la restricción de no negatividad $\omega_T a_{T+1}^h = 0$, dado que la saturación implica que $\omega_T = 0$.

jado, dado exógenamente) de elevar una unidad adicional la posición en capital humano. En el denominador, común a todos los sumandos de esta tasa de retorno, aparece el coste marginal de obtener una unidad adicional de capital humano por medio del input x; dicho coste se iguala al inverso de la productividad marginal de x en la función h, o cantidad marginal de x necesaria para producir 1 unidad adicional del activo.

En el segundo y tercer sumando puede encontrarse la “ganancia de capital del activo capital humano”. En un activo real ordinario, la ganancia de capital viene dada por el cociente de precios (de venta y adquisición) multiplicado por el valor residual del activo tras haber generado una renta en el período posterior al de su adquisición. En este caso el término “ganancia de capital” debe usarse con toda cautela ya que, como se indicó desde el principio, el capital humano como tal no pasa por el mercado. Como primer elemento diferencial con la tasa de retorno de un activo ordinario, el valor residual en s+1 de una unidad adicional de capital humano producida en s no solamente es el neto de la depreciación, sino que además viene aumentada por la productividad marginal de la unidad adicional del stock en la función de inversión bruta h (ver segundo sumando de la tasa de retorno). Como segunda diferencia, encontramos una equivalencia con la tasa bruta de crecimiento de los precios del activo entre s y s+1: el cociente entre sus costes de obtención a partir del input x, o lo que es lo mismo, el cociente entre los inversos de las productividades marginales de x en la función h. Dicho cociente será más elevado cuanto menor sea la productividad marginal de x en s+1 frente a s, o en otras palabras, cuanto mayor sea el coste de producción de una unidad adicional de capital humano en s+1 en comparación con s. A mayor valor del cociente, mayor será la tasa de retorno, ya que ello denotará un menor coste de producción futuro como consecuencia de haber anticipado la producción a s. Por tanto, a semejanza de lo que sucede con otros activos reales, el término de la tasa de retorno correspondiente a las ganancias de capital proporciona el incremento que se opera en la riqueza del individuo solamente a consecuencia de efectos valoración del mismo, incluso aunque este no se llegue a enajenar. -de hecho, en el caso del capital del humano la enajenación es imposible-.

Diseccionados los componentes de la tasa, hay una diferencia notable que se observa en comparación con las tasas de retorno de otros activos, financieros o reales: la constancia de los precios del activo (o de sus costes, en este caso). Mientras en un caso estándar los precios del activo vienen dados por el mercado y el inversor reacciona paramétricamente frente a los mismos, en este los costes de producción reemplazan a los precios de un activo no comercializable directamente; estos costes, en general, varían período a período en función de las cantidades de inputs aplicadas a la función de producción. En apartados posteriores dentro de este capítulo realizaremos algunas disquisiciones sobre las hipótesis bajo las cuales este resultado podría llegar a evitarse. En cualquier caso y en un caso general en que la parametrización de los costes de producción del capital humano no sea factible, la principal implicación de esta particularidad es que esta tasa de retorno exhibe, en general, “path-dependency”, esto es, son sensibles a la senda de decisiones endógenas del individuo sobre gasto en factores productivos y a la dotación genética de capital humano con la que se cuenta desde s=0.

Otra característica importante de la tasa es que, en general, presenta efectos escala, esto es, es sensible al vector de inputs de la función h elegidos en el período s+1. Incluso aunque en el primer sumando el tiempo de trabajo en s+1 (que constituye la base de obtención de la renta marginal de una inversión en el activo en s) es exógena y no es producto de una decisión óptima del individuo, en el segundo sumando podría muy bien estar presente x^h_{s+1} como parte de la derivada $h_{a,s+1}$ o incluso en $h_{x,s+1}$. Sin embargo, es claro que sin más que abandonar el supuesto sobre la exogeneidad del tiempo de trabajo el problema emerge de nuevo[128], en tanto se restableciera la cpo respecto al tiempo de aprendizaje.

Pasemos a considerar ahora las características de la tasa de retorno cuando las cantidades marginales de capital humano se producen por medio del otro input, el tiempo de aprendizaje. Para ello supondremos, simétricamente a como se hizo antes, que la productividad marginal del input x es nula. La primera expresión genérica de la tasa de retorno a la que llegamos, producto de la sustitución del valor sombra del capital en la cpo de posición en el activo, es la siguiente:

$$1+r_s=\frac{e_{s+1}\left(1-n^h_s\right)}{e_s a^h_s / h_{n,s}}+\frac{\left(\dfrac{e_{s+1}a^h_{s+1}}{h_{n,s+1}}\right)h_{a,s+1}}{e_s a^h_s / h_{n,s}}+\frac{\left(\dfrac{e_{s+1}a^h_{s+1}}{h_{n,s+1}}\right)\left(1-\delta^h\right)}{e_s a^h_s / h_{n,s}}\equiv rr^{h,n}_{s,s+1}\Big|_{pe} \quad (4.30)$$

La estructura formal de la tasa, como se aprecia más arriba, es similar a la obtenida cuando considerábamos que la producción marginal de capital humano se llevaba a cabo solamente con x. En el segundo miembro de la igualdad, que es el que alberga la tasa, el primer sumando recoge la renta del activo y el segundo y el tercero las ganancias de capi-

---

128 La presencia de efectos escala no implica necesariamente una tasa de retorno creciente con la escala de inputs aplicados en s+1. Piénsese, por ejemplo, en un caso en que se observasen efectos escala conjuntos en ambos inputs. En tal escenario, un aumento de x aumenta la productividad marginal del capital humano en s+1, pero al mismo tiempo un incremento del tiempo aprendizaje reduce el tiempo trabajado y, por tanto, la renta del activo.

tal generadas a través del efecto valoración comentado. La principal diferencia viene dada por el coste marginal de la inversión, ahora llevada a cabo por un input con otros costes en términos de renuncia al bien de consumo. En efecto, en el denominador de los 3 sumandos tenemos ahora este coste marginal, dado por dos elementos: i) el inverso de la productividad marginal en h del aprendizaje, denotando las necesidades de input tiempo dadas por la producción de 1 unidad adicional de capital humano y ii) el coste en unidades del bien de consumo de cada unidad infinitesimal adicional de tiempo aprendizaje: el salario por unidad de capital humano multiplicado por el stock disponible en s. Este coste de producción en s+1 es también el que figura en el numerador de los dos últimos sumandos, permitiendo calcular la ganancia de capital.

Para extraer conclusiones más concretas sobre las propiedades de la tasa de retorno y las implicaciones sobre el sistema de equilibrio general, evaluaremos la forma de la tasa para una función de producción de capital humano específica, que anida la inmensa mayoría de funciones utilizadas en esta literatura. Comenzando por el caso en el que $h_x > 0$ y el tiempo de trabajo exógeno, se tendrá la siguiente función, que anida la mayor parte de las que pueden encontrarse en la literatura cuando el input relevante es el gasto educativo:

$$a_{s+1}^h = a_s^h \left[\left(1-\delta^h\right) + B\left(\overline{n}_s^h\right)\left(x_s^h\right)^\gamma \right];\ 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.31)$$

Dicho de otra forma, cuando los rendimientos en el capital son constantes entonces la tasa neta de crecimiento del capital humano, será igual a un parámetro de escala B multiplicado por $\left(x^h\right)^\gamma$. Cabe precisar que a menudo en esta literatura, por abuso de lenguaje, cuando se habla de rendimientos a escala constantes, crecientes o decrecientes se hace referecia exclusivamente a aquellos asociados al capital humano en la tecnología educativa. La calificación, sin embargo, variaría al considerar la totalidad de los inputs. Pensemos por ejemplo en la anterior función de inversión en capital humano dependiente linealmente de la fracción de tiempo de aprendizaje y cóncava en el gasto educativo; en tal caso, a pesar de ser los rendimientos constantes en capital humano, en el conjunto de los inputs serían crecientes, ya que, siendo l una constante positiva:

$$h\left(l\left(a_s^h\overline{n}_s^h\right), l x_s^h\right) = l^2 B a_s^h \overline{n}_s^h x_s^h \quad (4.32)$$

IV.2. El modelo canónico en equilibrio parcial.

A lo largo del presente apartado. supondremos que la función de aprendizaje presenta rendimientos constantes a escala en los servicios de capital humano asignados a este tipo de producción, caso típico en la literatura de crecimiento endógeno (como en Uzawa (1965) y Lucas (1988)), mientras que dejaremos abierta la puerta a rendimientos constantes o decrecientes en x. El tiempo en la economía de referencia se estructura en dos períodos (T=1), con s=0,1.Por último y en un espíritu de simplicidad analitica, asumiremos también que $\delta^h = 0$ [129]. Podría recurrirse a un supuesto que simplificaría aún en mayor medida los cálculos, como un valor unitario de la tasa de depreciación, aunque esta opción presentaría varios inconvenientes, como la convergencia inevitable del stock de capital humano a cero bajo rendimientos decrecientes.

El supuesto inicial de dos períodos implica que, además de poder calcularse la tasa de retorno solamente en el primero de ellos (ya que en el segundo la ecuación dinámica del valor sombra del capital humano queda reemplazada por la condición de transversalidad), al anularse el valor sombra del capital humano en s=1, la tasa de retorno comprenderá solamente su primer sumando. Realizados estos supuestos, la tasa de retorno adoptará la siguiente expresión:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T=2} = e_{s+1}\overline{n}^{w}B\left(1-\overline{n}^{w}\right)\gamma a_s^h\left(x_s^h\right)^{\gamma-1} \quad (4.33)$$

La tasa de retorno, al estar definida inicialmente para 2 períodos, queda libre del efecto escala en la cantidad de input x utilizado en s+1. No así, sin embargo, del stock de capital humano en s y por tanto está sujeta a “path-dependency”. También es interesante anotar que los rendimientos constantes a escala del capital humano en h permitirían definir esta tasa de retorno por unidad de capital humano en s, en cuyo caso el factor de “path-dependency” desaparecería. Sin embargo, la imposibilidad de realizar análoga operación con la tasa de retorno respecto al tiempo de aprendizaje resta interés a esta transformación.

En cuanto al conjunto de variables que definen la tasa, hay una, x, que es la que determina la inversión adicional en el activo en s para aumentar la posición marginal en este en s+1. Por tanto, la tasa de retorno puede entenderse como una curva dependiente de esta variable, que presentará con bajo rendimientos decrecientes una pendiente negativa, ya que:

---

[129] Este es el supuesto, habitualmente extendido a la tasa de depreciación del capital físico, que se realiza en la mayor parte de la literatura de crecimiento, incluyendo el artículo de Lucas de 1988, para potenciar la simplicidad analítica de la resolución, si bien los resultados obtenidos podrían obtenerse con generalidad para valores de la tasa de depreciación comprendidos entre 0 y 1.

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|}{dx_s^h} = (\gamma - 1)\gamma e_{s+1} B\bar{n}^w \left(1-\bar{n}^w\right) a_s^h \left(x_s^h\right)^{\gamma-2} < 0 \quad (4.34)$$

La forma que adoptaría esta curva en el plano (rr,x) sería decreciente y convexa, asintótica respecto al eje de ordenadas en el que se situaría rr (ya que conforme x tiende a 0 la tasa tiende a infinito) y también asintótica respecto al eje de las abscisas que representaría a x, puesto que un nivel nulo de la tasa solo podría ser el resultado de la aplicación de un volumen de x que tendiera a infinito. Los restantes parámetros o endógenas provocan desplazamientos de la curva, frente a los desplazamientos a lo largo de la curva que generan cambios en x. Es inmediato observar que la derivada parcial respecto al salario en s+1 es positiva, en la medida en que esta variable hace aumentar la renta del activo. El mismo signo se verifica respecto a la productividad del proceso de aprendizaje y el stock de capital humano en s, puesto que al incrementar ambos la productividad de x reducen los costes unitarios de la inversión y, consiguientemente, incrementan la tasa de retorno. En definitiva:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}}{\partial B}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}}{\partial a_s^h}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}}{\partial e_{s+1}} > 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}}{\partial \gamma} <> 0 \quad (4.35)$$

Cuando los rendimientos a escala son constantes en x, la tasa de retorno sería una constante, por lo que su representación en el plano aludido devendría una línea horizontal. Mientras en el primer caso, conocido el tipo de interés, es posible despejar directamente la cantidad aplicada de x, en el segundo esta cpo no permite obtener esta información. Cuando x puede despejarse en la condición de no arbitraje, el modelo puede resolverse despejando una relación entre C_0 y C_1 a partir de la igualdad entre la relación marginal de sustitución intertemporal y el tipo de interés, de suerte que, sustituyendo en la restricción presupuestaria intertemporal, la renta descontada es conocida, como lo es también x; por tanto la ecuación puede resolverse para C_0 y, una vez obtenido su valor, puede derivarse el de C_1 y la posición en bonos tomada al final de s=0. Cuando la tasa de retorno del capital humano es constante, sin embargo, el modelo no puede resolverse salvo que se trate de un equilibrio esquina, ya que ni se conoce la totalidad de la renta vital descontada -por desconocerse el capital humano acumulado durante s=0- ni, al permanecer x como una incógnita, puede despejarse C_0 en la restricción presupuestaria intertemporal. No obstante, de la comparación entre el tipo de interés en s=0 y la tasa de retorno constante puede colegirse un equilibrio esquina en bonos, en cuyo caso el sistema podrá resolverse. En este sentido, los rendimientos constantes cuando solo existe un input variable en la tecnología del capital humano maximizan la probabilidad de alcanzar un equilibrio esquina en la composición de la cartera. Volveremos sobre esta cuestión al analizar de modo más general la forma de los beneficios y los costes marginales en T períodos.

La utilización de la una ecuación de acumulación en el input x lineal respecto al capital humano -y, eventualmente, también respecto a x- suscita una pregunta sobre la suficiencia del teorema de Kuh-Tucker para determinar el óptimo del programa. Dicho de otra forma, la suficiencia de las condiciones K-T depende tanto de la concavidad de la función objetivo (o de la convexidad, si se tratara de un problema de minimización) como de la convexidad del conjunto de condiciones al que se somete la optimización de aquella, pero la función que marca la dinámica de una de las variables de estado no es estrictamente cóncava en todos sus argumentos. A este respecto, el teorema de Arrow establece como condición suficiente la concavidad -no estricta- de la función lagrangiana respecto a la variable de estado, una vez sustituidas las de control en función de las variables de estado a través de las cpo del problema. En el contexto de equilibrio general esta comprobación ha sido llevada a cabo para funciones de acumulación dependientes del tiempo de aprendizaje à la Lucas por autores como Benhabib y Perli (1994).

Para verificar este teorema alternativo es necesario, por lo tanto, que las cpo permitan establecer esta relación, lo que no sucede cuando los rendimientos son constantes, en que el problema queda indeterminado. Sin embargo, cuando son decrecientes es posible definir esta función sin más que despejar de la igualdad entre la RMS intertemporal y la tasa de retorno del capital humano:

$$x_0^h = \left[\frac{e_1 \overline{n}^w B\left(1-\overline{n}^w\right)\gamma a_0^h}{1+r_0} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} ;\ x_1^h = 0 \quad (4.36)$$

El lagrangiano puede reexpresarse sustituyendo la primera de las variables de control, el consumo, a partir de la restricción presupuestaria flujo (lo que equivale a eliminar la necesidad de emplear la ecuación de acumulación de la riqueza financiera separadamente) y puede hacerse la propio con x utilizando la ecuación que acaba de derivarse. Se tendría por tanto:

$$Max_{a_1^h, b_1}\Omega = u\left(e_0 a_0^h \overline{n}^w + (1+r_{-1})b_0 - b_1 - \left[\frac{e_1\overline{n}^w B(1-\overline{n}^w)\gamma a_0^h}{1+r_0}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}\right) +$$

$$+\mu_0\left[a_0^h\left[1+B(1-\overline{n}^w)\left[\frac{e_1\overline{n}^w B(1-\overline{n}^w)\gamma a_0^h}{1+r_0}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}\right]-a_1^h\right] \text{ (4.37)}$$

En un modelo de dos períodos la parcial respecto a la posición futura en capital humano no tiene efectos de desbordamiento hacia el segundo período, de suerte que no cabe estudiar el impacto de la acumulación adicional en el presente sobre la demanda futura de x, que es nula. Así, se tiene que esta derivada parcial está dada por:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_1^h} = -\mu_0 + u_0{}' e_{s+1}\overline{n}^w \text{ (4.38)}$$

Ahora, sin más que atender a la cpo del lagrangiano sin transformar se observa que esta expresión se iguala a 0, por lo que el lagrangiano transformado sería lineal respecto a la variable de estado capital humano. Por tanto, la condición suficiente de validez del teorema de K-T, según Arrow, se verificaría para la función de acumulación elegida. Este resultado es un factor más que explica, entre otros, la profusión de la utilización del input de mercado en la producción de capital humano en los modelos OLG de dos períodos. Otras razones que comentaremos más tarde explican, por su parte, su escasa utilización en modelos de agente representativo con horizonte infinito.

Pasaremos ahora a definir la tasa cuando el tiempo de aprendizaje es el único input bajo idénticos supuestos:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T=2} = \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma \text{ (4.39)}$$

Formalmente esta segunda versión de la tasa presenta tres novedades fundamentales: i) desaparece el stock de capital humano en s, ya que se compensa su impacto en la producitividad marginal con los costes de oportunidad de producción del activo, anulándose su presencia en el coste de producción unitario, que constituye el denominador de la tasa de retorno; ii) pasa a ser relevante no solamente el salario real en s+1, sino su relación con el salario real en s, al influir este último negativamente en el coste de producción unitario; iii) al partir de una oferta no rígida de tiempo trabajado por el tránsito de x a n como input en h, el tiempo trabajado en s+1 eleva la renta del activo o, equivalentemente, el tiempo de aprendizaje en s+1 la recorta. Además, este hecho es importante en la medida en que hace depender la tasa de una variable endógena en s+1, a diferencia de la tasa de x, aunque esta diferencia se debe solamente al supuesto sobre la exogeneidad del tiempo de trabajo efectuado en el primer caso; sin este, la tasa estaría afectada también por esta variable endógena. En el caso especial de dos períodos este problema desaparece, ya que al ser la inversión bruta en capital humano nula durante el segundo período, $n_1^w = 1$. De este modo la tasa elimina completamente su problema de path dependency a resultas de la condición de transversalidad, en lo que al tiempo futuro de trabajo se refiere y en cuanto al stock de capital humano en s por simple construcción.

El hecho de que otras variables endógenas formen parte de ambas tasas de retorno no es sorprendente y de hecho es relativamente habitual en modelos de crecimiento. Pensemos, por ejemplo, en funciones de producción donde el capital físico per cápita no es el único factor productivo. En el contexto de este trabajo veremos en los sucesivos apartados que esto ocurre en varias formulaciones de la tasa de retorno, tanto en equilibrio general como parcial. Lo único que revelan estas situaciones es que las condiciones de no arbitraje entre el activo financiero y el activo real de referencia no son suficientes para resolver todas las endógenas del sistema y que hacen falta más ecuaciones para despejar todas las variables que intervienen en la tasa. Volveremos sobre tema a continuación.

Por lo demás, los signos de la pendiente y las parciales de la tasa son los apropiados:

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}}{dn_s^h} = 0; \quad \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}}{\partial B}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}}{\partial e_{s+1}} > 0; \quad \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}}{\partial e_s}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}}{\partial n_{s+1}^h} < 0; \quad \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}}{\partial \gamma} <> 0 \quad (4.40)$$

En cuanto a la función tasa de retorno-tiempo de aprendizaje, estaría definida solamente en el intervalo [0,1)[130]. Respecto al eje de las ordenadas, si tanto tiempo como capital humano estuvieran sujetos a rendimientos constantes (como se ha supuesto desde un principio) la relación funcional vendría dada por una línea horizontal. Si los rendimientos del capital humano fueran constantes y los del tiempo de aprendizaje decrecientes, se retomaría la pendiente negativa de la función, que por lo demás sería de nuevo asintótica a medida que el tiempo de aprendizaje se aproxima a cero, mientras que al cortar con la vertical 1 sobre el eje de abscisas tomaría el valor $\frac{e_{s+1}}{e_s} B\gamma\left(1-n_{s+1}^h\right)$.

[130] Un tiempo de aprendizaje unitario implica producción nula de bien de consumo final y, al no ser este almacenable, consumo nulo y utilidad marginal del consumo no acotada por las condiciones de Inada.

En el escenario central en que la combinación entre capital humano y tiempo de aprendizaje se consideran el mismo factor, sometido a rendimientos constantes[131], este segundo tampoco puede despejarse de la condición de no arbitraje entre activos, como también se observaba en la tasa de retorno respecto a x. Al desconocerse el valor de equilibrio de n_0^h no puede cuantificarse la renta descontada y, con ello, tampoco el consumo en 0 ni la posición en bonos. Este podría ser un problema, al ser esta la especificación más utilizada de la función de acumulación en la literatura, aunque como veremos existen diferentes procedimientos para resolverlo en equilibrio general.

En los dos anteriores ejemplos estudiamos las tasas de retorno cuando, aparte del propio capital humano, solamente intervenía un input endógeno en la inversión bruta en este activo real. Merece la pena revisar brevemente el caso en que los dos inputs intervienen simultáneamente en la producción y ninguno de ellos está sujeto a una restricción de exogeneidad. Como veremos a continuación, las principales conclusiones no varían sustancialmente, solo que aparecen nuevas variables endógenas que complican la expresión de las tasas de retorno.

La ecuación de acumulación en este caso general se definiría como:

$$a_{s+1}^h = a_s^h\left[1 + B\left(x_s^h\right)^\gamma\left(n_s^h\right)\right]; 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.41)$$

Las dos tasas serán, en este caso:

$$rr_{0,1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T=2} \equiv e_1 B\gamma a_0^h\left(x_0^h\right)^{\gamma-1}\left(n_0^h\right) \quad (4.42)$$

$$rr_{0,1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T=2} \equiv \frac{e_1}{e_0}B\left(x_0^h\right)^\gamma \quad (4.43)$$

Para la derivación de ambas se ha utilizado $n_1^h = 0$. Es inmediato reconocer que estas tasas son iguales a las derivadas mediante la utilización de un solo input en la función h, solo que afectadas por el otro input que se introduce en aquella. La tasa de retorno del input x muestra además otra diferencia que se hará más evidente al derivarse para T períodos: el hecho de que el tiempo de trabajo en s=1 deviene endógeno, aunque con 2 períodos este problema de nuevo queda salvado por el hecho de que $n_1^w = 1$ y, en conse-

[131] Si los rendimientos del tiempo fueran decrecientes, al poderse despejar n^h -dado el tipo de interés- quedaría determinado la fracción de trabajo, la renta intertemporal y podrían despejarse el consumo inicial y la posición en bonos.

cuencia, no permea hacia la expresión formal de la tasa de retorno. Salvando esta diferencia, podrá escribirse por lo tanto:

$$rr_{0,1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T=2(x,n)} = rr_{0,1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T=2(x)}\left(n_0^h\right) \quad (4.44)$$

$$rr_{0,1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T=2(x,n)} = rr_{0,1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T=2(n)}\left(x_0^h\right)^{\gamma} \quad (4.45)$$

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la igualdad entre las tasas y la de cualquiera de ellas al tipo de interés del ahorro constituye un sistema de dos ecuaciones que permite despejar los dos inputs del capital humano como incógnitas, incluso aunque el gasto en educación x presente rendimientos constantes a escala. Esto está en coherencia con el teorema de separación de Fisher, en virtud del cual en el subsistema de cpo de relativo a la inversión en el activo real se determinarían todas las varibles que configuran la riqueza del individuo con cargo a la que maximizar su consumo. Así, igualando las dos tasas de retorno podemos obtener la siguiente relación entre los dos inputs del capital humano:

$$\gamma a_0^h\left(x_0^h\right)^{\gamma-1} n_0^h = \left(x_0^h\right)^{\gamma} \Rightarrow n_s^h = \frac{1}{a_0^h}\frac{1}{\gamma}x_s^h \quad (4.46)$$

A su vez, esta igualdad puede sustituirse en la igualdad de cualquiera de las dos tasas de retorno al tipo de interés, permitiendo despejar sucesivamente los valores endógenos en equilibrio parcial de x y n. Cuando los rendimientos en x son constantes, de la primera condición de no arbitraje puede despejarse directamente n^h y de la segunda x, de modo que:

$$n_0^h = \frac{\left(1+r_0\right)}{e_1 B};\ x_0^h = \frac{\left(1+r_0\right)}{\frac{e_1}{e_0}B} \quad (4.47)$$

El caso es peculiar al ser las dos endógenas positivamente dependientes del tipo de interés en el primer período. La razón es la ausencia del propio input en la tasa de retorno directa. Así, ambas vienen dadas por una línea horizontal, que a su vez se superpondrá con la que representa el rendimientos de los bonos. Así, si el tipo de interés se incrementa, la única forma de que la tasa de retorno respecto a x se eleve será aumentando el tiempo de aprendizaje y viceversa en cuanto a la tasa de retorno respecto a n. Este sistema contrasta con el planteamiento de un solo input, en el que una sola ecuación (la igualdad entre la tasa de retorno y el tipo de interés) permite obtener el valor en equilibrio parcial del input correspondiente cuando los rendimientos en x son decrecientes y, cuando los rendimientos de cualquiera de los inputs son constantes, falta una ecuación para poder resolver el sistema; en este sentido la coexistencia de dos inputs endógenos del capital humano proporciona la ecuación restante que permite resolver todas las endógenas del probema de optimización. Finalmente, cabe destacar que en un entorno de dos períodos la utilización de una función de acumulación con rendimientos constantes en todos sus inputs variables volverá a satisfacer el Teorema de Arrow, arrojando un estructura lineal del lagrangiano respecto al capital humano.

T períodos en equilibrio parcial. Cuando el número de períodos pasa a ser uno genérico de T, existen dos posibilidades: i) Si la tasa de retorno se calcula entre los períodos T-1 y T, formalmente de nuevo tendremos el mismo resultado obtenido en el apartado anterior, ya que el valor sombra del capital humano en T de nuevo se anula. ii) Si las tasas se calculan para períodos anteriores a T-1, su contenido varía, ya que el valor sombra de las ganancias de capital no se anula. Visto desde otro ángulo, puede afirmarse que en este último caso la cpo de la posición en capital humano es una verdadera ecuación en diferencias que vincula valores presentes y futuros del valor sombra del capital humano y que, por tanto, permite desarrollar una verdadera ecuación de valoración en tiempo finito del activo capital humano.

Veamos este último punto algo más detenidamente, con conclusiones que serán extrapolables al caso en el que T=2. Centrándonos primero en la tasa de retorno a partir de la producción de capital humano por medio del input x con tiempo de trabajo exógeno y sustituyendo iterativamente en la cpo esta puede escribirse como[132]:

$$\mu_s = \beta\left\{\lambda_{s+1} e_{s+1}\overline{n}^w + \mu_{s+1}\left[\left(1+h_{a,s+1}\right)\right]\right\} =$$
$$= \beta\left\{\lambda_{s+1} e_{s+1}\overline{n}^w + \left(1+h_{a,s+1}\right)\left\{\beta\left[\lambda_{s+2} e_{s+2}\overline{n}^w + \mu_{s+2}\left(1+h_{a,s+2}\right)\right]\right\}\right\} = \ldots =$$
$$= \beta\lambda_{s+1} e_{s+1}\overline{n}^w + \sum_{i=2}^{T-s}\beta^i\left(\prod_{j=1}^{i}\left[1+h_{a,s+j}\right]\right)\lambda_{s+i} e_{s+i}\overline{n}^w \quad (4.48)$$

Pero esta expresión todavía admite una mayor simplificación. Por una parte, habrá que tener en cuenta que con la tecnología educativa à la Uzawa-Lucas que estamos manejando se verifica:

$$h_{a,s} = B\overline{n}_s^h\left(x_s^h\right)^\gamma \Rightarrow 1+h_{a,s} = \frac{a_{s+1}^h}{a_s^h},\ s = 0 \ldots T-1;\ 1+h_{a,T}\left(x_T^h\right) = 1 \quad (4.49)$$

---

[132] Obsérvese que cuando $T \to \infty$ la convergencia de la ecuación de valoración a un valor finito es equivalente al cumplimiento de la condición de transversalidad, ya que $1+h_{a,s+j} = 1+Bx_{s+j}^h$.

Aplicando esta transformación a la ecuación anterior, tendremos:

$$\mu_s = \beta\lambda_{s+1}e_{s+1}\overline{n}^w + \sum_{i=2}^{T}\beta^i\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+h_{a,s+j}\right]\right)\lambda_{s+i}e_{s+i}\overline{n}^w =$$

$$= \beta\lambda_{s+1}e_{s+1}\overline{n}^w + \frac{1}{a^h_{s+1}}\sum_{i=2}^{T-s}\beta^i a^h_{s+i}\lambda_{s+i}e_{s+i}\overline{n}^w \quad (4.50)$$

Lo que esta ecuación de valoración indica, por tanto, es que el valor sombra (en términos de bienestar) de la posición adquirida en capital humano a finales del período s se iguala a su corriente de rentas marginales hasta el final del horizonte de planificación, estando las mismas adecuadamente corregidas por tres tipos de factores: i) el valor sombra de la riqueza, al estar expresado el salario en términos del numerario o bien de consumo; ii) la tasa de descuento subjetivo que permite comparar valores sombra de distintos períodos; iii) otro factor de actualización dado por uno (o uno menos la tasa de depreciación del activo, si esta no se supusiera nula) más la productividad marginal del capital humano en su propia función de producción, que supone un factor de crecimiento autónomo a lo largo del tiempo de una inversión realizada en el período s.

En comparación con una ecuación de valoración típica de cualquier otro activo real, posiblemente el elemento más atípico venga dado por la presencia del stock del mismo como factor multiplicativo en los sumandos que integran la corriente de rentas descontada. A su vez, esto es consecuencia de la existencia de una función de produccion del activo en la que él mismo constituye un input; de lo contrario, $h_{a,s} = 0$ y este componente del sumatorio se haría igual a 1. También por ser un activo producido, en la ecuación de valoración la variable explicada es un valor sombra y no un precio de mercado. Precisamente el hecho de que el sumatorio de rentas salariales a partir de i=2 esté multiplicado por el inverso del stock de capital humano en s+1 responde a este factor de "aumento": a mayor posición en s+1 en el activo, menor será la "auto-reproducción" de este en períodos posteriores y más reducidas consiguientemente las rentas marginales.

La ecuación de valoración puede reordenarse, sustituyendo μ_s por su valor despejado en la cpo de x y dejando en el primer miembro el coste marginal de producción y en el primer término la corriente descontada de beneficios marginales. En este caso la lectura pasa a ser la de una mera cpo desplegada a lo largo de todo el horizonte de planificación. Despejando de este modo, la ecuacion resultante, en unidades reales, tendría la siguiente configuración:

$$\frac{1}{h_{x,s}}=\frac{e_{s+1}\overline{n}^{w}}{\left(1+r_{s}\right)}+\frac{1}{a_{s+1}^{h}}\sum_{i=2}^{T-s}R_{i}a_{s+i}^{h}e_{s+i}\overline{n}^{w};\ R_{i}=\prod_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\left(1+r_{s+j}\right)};h_{xs}=a_{s}^{h}\left(\overline{n}_{s}^{h}\right)B\gamma\left(x_{s}^{h}\right)^{\gamma-1} \quad (4.51)$$

En este punto resulta de interés comparar los costes beneficios marginales que se desprenden de esta segunda versión de la ecuación de valoración con los derivados por Becker y Ghez en su trabajo de 1975. El coste marginal viene dado por el inverso de la productividad marginal de x en h, por lo que su forma respecto al tamaño de la inversión (que podemos asociar con el input variable aplicado, x) será distinto según los rendimientos que se supongan a x en dicha función de acumulación. Si estos son decrecientes, $h_{xx}<0$, por lo que los costes marginales serán crecientes, como en el artículo de Becker y Ghez; si son constantes, los costes marginales serán horizontales y no presentan ninguna sensibilidad respecto a x. En cualquiera de los dos casos, dada una cantidad máxima disponible del bien final en equilibrio parcial, los costes marginales se harían verticales a partir de un volumen de inversión que supusiese el agotamiento de aquella. Los costes marginales presentan path-dependency cuando el capital humano se utiliza en su propia acumulación, siendo mayores cuando menor sea el stock de capital humano al inicio de la vida del individuo.

Respecto a los beneficios marginales, su forma depende esencialmente del número de períodos considerados. Cuando T=2, en su definición solo interviene la renta marginal obtenida en s=1, toda vez que el valor sombra del capital humano en s=1 es nulo. Por lo tanto, el beneficio marginal es inelástico en el volumen de inversión realizado en s, tanto para rendimientos constantes como decrecientes. Cuando $T>2$, hay dos formas de enfocar el problema de igualdad entre beneficios y costes marginales, como se anticipó al describir la aportación de Becker y Ghez en este campo. Si se toma “a valor facial” la ecuación de igualdad entre costes marginales y beneficios marginales, el beneficio marginal vuelve a ser constante, al depender de una secuencia de x futuros y no estar presente directamente x_{s}^{h} . Esta interpretación es equivalente a la lectura “estándar” de la tasa de retorno que se realiza en modelos dinámicos. Sin embargo, este enfoque no permite despejar esta última variable de la igualdad entre beneficios y costes marginales (objetivo último de Becker y Ghez), ya que toda la senda futura de x es desconocida. Para solucionarlo, puede resolverse conjuntamente el sistema de ecuaciones dado por la igualdad entre los costes y beneficios marginales de la inversión en capital humano en todos los períodos posteriores a s=0, sustituyendo en la ecuación de s=0 los valores de x_{s+i}^{h} en función de x_{0}^{h} ; esto equivale a un tratamiento de la tasa de retorno a posteriori, en la medida en que se está resolviendo el modelo en su conjunto y después integrando el resultado en la tasa de retorno. Este último procedimiento es un mero artificio para dotar de mayor poder explicativo la igualdad entre costes y beneficios marginales y que es posible solamente debido a la recursividad de que el Teorema de Fisher dota al sistema. Si se opta por este último camino, la dependencia entre los futuros gastos educativos y el presente es positiva, a través de la senda de posiciones en capital humano, que forman parte de la renta marginal de la tasa de retorno[133]. Visto de otra manera, los costes marginales en períodos posteriores al inicial serían decrecientes respecto al nivel de capital humano acumulado entre s y s+1, por lo que darán lugar a niveles superiores de inversión futuros. En consecuencia, mediante este enfoque los beneficios marginales serían crecientes en x cuando los rendimientos a escala son decrecientes en este factor. Si los rendimientos son constantes, como veremos más adelante la función también será creciente, pero solamente algunos valores de su dominio podrán ser solución al sistema de ecuaciones formado por las cpo hasta T-1.

La tipología de equilibrios que puede encontrarse es variada según la forma de los costes marginales, la longitud del período y la consideración de una sola ecuación o de todo el sistema completo. Comenzando por T=2 y si los costes marginales presentan un doble tramo en forma de L invertida (rendimientos constantes[134]), la confluencia con los beneficios marginales constantes, salvo que haya una coincidiencia exacta entre las dos curvas daría lugar a un equilibrio en el que la intersección entre las dos curvas se produce en el tramo vertical de los costes marginales, el consumo se anularía y toda la producción del bien final se destinaría a la producción de capital humano; si la utilidad marginal verifica la propiedad de Inada este equilibrio no sería factible, sin embargo[135]. Con rendimientos decrecientes en x, pueden encontrarse varios tipos de equilibrio. Si los beneficios

[133] Al no haber tiempo de ocio en esta versión del modelo y ser perfecto el funcionamiento de los mercados de crédito, el teorema de Fisher es aplicable y este efecto sustitución es suficiente para garantizar que la dependencia de los futuros x respecto a la misma variable en s=0 es positiva; no procede por tanto estudiar efectos riqueza sobre el consumo, ya que la determinación óptima de este se apoyará sobre la renta intertemporal dada por la senda de posiciones en capital humano.

[134] En el análisis con rendimientos constantes se presupone que no hay un equilibrio esquina en ninguno de los dos activos, ya que de lo contrario no podría reexpresarse la cpo como una ecuación de igualdad entre costes marginales y beneficios marginales descontados.

[135] Los beneficios marginales también podrían situarse por debajo de los costes marginales en todo su recorrido, lo que conduciría a un equilibrio con inversión nula del capital humano.

marginales, de nuevo constantes, intersectan a los costes marginales en su tramo creciente, se tendriá un equilibrio interior en inversión bruta en capital humano localmente estable (costes marginales superiores a beneficios marginales a la derecha y viceversa a la izquierda). Si la intersección de nuevo se produce en el tramo vertical de los costes marginales, es válido el comentario efectuado con rendimientos constantes. Y si se localiza en el origen de ordenadas, se tiene un equilibrio esquina con inversión nula en capital humano, siendo este último también localmente estable.

Cuando $T > 2$ y si se sustituye el resto del sistema de ecuaciones en la de s=0, los beneficios marginales serán crecientes para cualquier tipo de rendimientos en x. Si los costes marginales son constantes, habría varias situaciones posibles. Los beneficios marginales podrían quedar completamente por debajo de los costes marginales, en cuyo caso se tendría un equilibrio esquina en el que el ahorro se canalizaría exclusivamente hacia bonos en s=0. Si existe intersección entre beneficios y costes marginales, a su vez pueden darse varios posibles escenarios. La sustitución del sistema de ecuaciones desde T-1 a s=1 en los beneficios marginales de s=0 implica que esta función adoptará una especificación polinómica en x_0^h , pudiendo tener hasta dos puntos de corte con los costes marginales, uno de los cuales correspondería a un equilibrio interior en x_0^h -con intersección en el tramo horizontal de los costes marginales- y el otro a un equilibrio esquina en capital humano dentro del mismo período -intersección en el tramo vertical de los costes marginales- , que al llevar consigo un consumo nulo solo sería factible si la utilidad marginal no cumpliese la propiedad de Inada. Por último, tampoco podría excluirse una curva de beneficios marginales con una ordenada en el origen por encima del tramo horizontal de los costes marginales y que cortase a los mismos en su tramo vertical, aunque este equilibrio de nuevo sería esquina en capital humano. De existir un equilibrio con inversión bruta positiva en capital humano en s=0, será necesario comprobar, efectuadas las oportunas sustituciones en los x de la senda, que el stock de capital humano a que da lugar en T-1 es tal que garantiza un equilibrio esquina en este período, como se detallará al analizar la secuencia de tasas de retorno.

Siguiendo con $T > 2$, si los rendimientos en x fueran decrecientes, tanto beneficios marginales como costes marginales tendrían un tramo creciente, aunque estos últimos se tornarían verticales una vez x agotara la producción del bien de consumo final. La tipología de equilibrios cuando hay puntos de intersección entre las curvas se complicaría, ya que de nuevo los beneficios marginales mostrarían una estructura polinómica en x_0^h , pudiendo tener múltiples puntos de corte con los costes marginales, pudiendo dar lugar a varios equilibrios con valores reales positivos. Caso de existir varios, su estabilidad local dependería de las pendientes relativas de costes y beneficios marginales los equilibrios en el tramo elástico de los costes marginales podrían ser estables o inestables (en concreto, serían estables cuando a la derecha de los mismos la pendiente de los costes marginales fuera mayor a la de los beneficios marginales). Tampoco puede excluirse una ausencia de puntos de intersección, en cuyo caso se tendría un equilibrio esquina en bonos, o un solo punto de intersección en el tramo vertical de los costes marginales, lo que conduciría de nuevo a un equilibrio esquina en capital humano.

En cuanto a la path-dependency de los beneficios marginales, estos no dependen, a diferencia de los costes marginales, del nivel de capital humano en s, por lo que no se verían afectados por la diferencia en la dotación de nacimiento del individuo. **En consecuencia, el efecto neto de una menor dotación de partida tenderá a ser de reducción de la inversión en educación cuando exista un equilibrio interior en la inversión en capital humano.** Es más, dado que ex post un menor nivel de inversión en x al principio de la senda se traslada a los períodos posteriores, una dotación inferior de partida tendría un grado de persistencia considerable a lo largo del ciclo vital del individuo.

Pasemos a enfocar ahora el problema desde la perspectiva de la tasa de retorno, a partir de la cual es posible justificar la forma de los beneficios marginales en s=0. Desde este ángulo queda más clara la distinción entre la aproximación ex ante y ex post. Por lo que respecta a la tasa de retorno ex ante en x que puede derivarse en T períodos, sin más que aplicar la fórmula general obtenida antes se llega a la siguiente expresión:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T} \equiv e_{s+1}\left(\bar{n}^{w}\right)B\gamma a_{s}^{h}\left(1-\bar{n}^{w}\right)\left(x_{s}^{h}\right)^{\gamma-1}+\frac{\left(x_{s+1}^{h}\right)^{1-\gamma}}{\left(x_{s}^{h}\right)^{1-\gamma}}\frac{\left[1+B\left(1-\bar{n}^{w}\right)\left(x_{s+1}^{h}\right)^{\gamma}\right]}{\left[1+B\left(1-\bar{n}^{w}\right)\left(x_{s}^{h}\right)^{\gamma}\right]} \quad (4.52)$$

La tasa presenta las siguiente pendiente respecto a x_{s}^{h} y derivadas parciales:

$$\frac{d\,rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T}}{dx_{s}^{h}}<0;\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T}}{\partial x_{s+1}^{h}}>0;\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T}}{\partial B}<>0 \quad (4.53)$$

Un aspecto interesante es que el signo de las dos primeras derivadas se mantiene incluso aunque los rendimientos sean constantes. En este caso, si bien se anularía el primero de los factores del término de ganancias de capital, el segundo no lo haría, lo que permitiría mantener el signo positivo respecto a x_{s+1}^{h} y reforzar el negativo de la renta marginal respecto a x_{s}^{h}. Por otro lado, mientras los dos primeros signos son coincidentes con los que mostraba la tasa para T=2, el de B es ahora ambiguo. La razón es la adición a la tasa del término de ganancias de capital, de modo que B influye negativamente sobre el coste relativo de producción entre s+1 y s . De este modo, el signo dependerá de la diferencia $\left(x_{s+1}^{h}\right)^{\gamma}-\left(x_{s}^{h}\right)^{\gamma}$: si esta es positiva, el signo de la derivada parcial será inequívocamente positivo; si es negativo, puede ser positivo o negativo. Dependiendo de la senda de x, el signo podría ser diferente dependiendo del punto de la trayectoria en el que se produjera la variación de B. En un escenario alternativo en el que el capital humano no formara parte de la tecnología de aprendizaje, el único efecto relevante de B se canalizaría a través de la renta marginal del activo y la derivada parcial sería siempre positiva. Nótese que si la tecnología dependiera del capital humano, pero la influencia de este se materializara como input social y no privado, la indefinición de signos persistiría, ya que B seguiría pesando negativamente sobre el cociente de costes relativos entre s+1 y s.

Considerando la totalidad de las ecuaciones de no arbitraje entre las tasas de retorno de los bonos y del capital humano (y entrando por tanto en el enfoque ex post del problema), l**a resolución del sistema es posible con rendimientos decrecientes** y debe efectuarse retroactivamente en este caso. Comenzando por el período T-1, la tasa de retorno de T-1 contendrá solamente la renta marginal, al anularse las ganancias de capital. Esto permite formular despejar $x_{T-1}^{h}\left(a_{T-1}^{h}\right)$ y sustituirlo en las ecuaciones de los períodos precedentes, generando un sistema de T ecuaciones utilizando las restantes igualdades entre el tipo de interés y las tasas de retorno y en el que las T incógnitas serían $x_{s}^{h}, s=0..T-1$. Habitualmente la obtención de soluciones para las endógenas exigirán la utilización de procedimientos de cálculo numérico, al conducir la sustitución de la senda de los stocks de capital humano por sus respectivas ecuaciones de acumulación a un sistema de ecuaciones no lineales. Al no poderse obtener una solución cerrada en general, no es factible la verificación de las condiciones suficientes de Kuhn-Tucker mediante el teorema de Arrow. Estos inconvenientes explican por qué es tan poco común encontrar modelos de ciclo vital de más de 2 períodos con el gasto educativo como input variable en la tecnología de acumulación de capital humano cuando este tiene rendimientos decrecientes.

La recursividad del bloque de ecuaciones relativas a la inversión en capital humano en equilibrio parcial permite plantear el signo de la pendiente de la tasa una vez que toda la cadena de x posteriores a s han sido sustituidos en la tasa de retorno. Cuando algunos párrafos atrás se determinó que ante cambios en x_{s+1}^{h} la tasa experimenta desplazamientos positivos, se tomaban dichos cambios como exógenos, pero en realidad la lectura conjunta de la cpo permite establecer que dicha variable no puede modificar su valor autónomamente, sino cuando cambia x_s^h o alguno de los parámetros tecnológicos. Análogamente, cuando se calculó la pendiente de la tasa no se tuvo en cuenta el impacto que la variación de x_s^h acarrea en x_{s+1}^h y lo mismo puede decirse sobre la derivada parcial respecto a B. En este sentido, podrían diferenciarse unas propiedades de la tasa de retorno tomando la senda de x como exógena y otras considerando dicha senda endógena.

Si se deseara calcular la pendiente de la tasa con senda del input endógena, habría que tener en cuenta que el análisis de signos efectuado para la tasa con senda exógena garantiza que se produce la siguiente dependencia funcional:

$$x_{s+1}^h = x\left(x_s^h, B\right);\ x_x > 0;\ x_B <> 0 \quad (4.54)$$

Sustituyendo en las ganancias de capital, se observa que ahora:

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T>2,\,xend}}{dx_s^h} <> 0;\ \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T>2,\,xend}}{\partial B} <> 0 \quad (4.55)$$

Esto es, el signo de la pendiente deviene indeterminado, ya que una variación de x_s^h afecta a numerador y denominador de las ganancias de capital simultáneamente y en sentido diferente. El signo de la derivada parcial respecto a B continúa siendo indeterminado, aunque ya lo era cuando la senda de x se consideraba exógena. Este tipo de indefiniciones en signo constituyen otra razón para descartar operativamente la utilización del input x en entornos superiores a 2 períodos o con rendimientos constantes, circunstancias en las que se convierte en un instrumento más operativo y con propiedades más intuitivas.

Con rendimientos constantes hay que tener en cuenta que la cpo correspondiente a T-1 tomaría la siguiente forma:

$$\left(1 + r_{T-1}\right) \geq e_T \overline{n}^w B\left(1 - \overline{n}^w\right) a_{T-1}^h \quad (4.56)$$

Esto es, la tasa tomaría una forma análoga a la estudiada cuando el problema se resolvía solamente a lo largo de 2 períodos. Es fundamental tener en cuenta que solamente la ecuación de T-1 se verá privada de las ganancias de capital; en cualquiera de los restantes períodos la tasa recupera su forma habitual. Este hecho implica que el sistema de ecuaciones solo tendrá solución si la ecuación en T-1 presenta un equilibrio esquina en capital humano, en cuyo caso la demanda de x se igualaría a la cantidad disponible del bien final durante el período. En efecto, si la desigualdad se verificase con signo igual se generaría indefinición, por lo que el sistema no podría resolverse, mientras que si lo hiciese con signo igual, se tendría un equilibrio esquina en bonos y, por tanto, $x_{T-1}^{h}=0$, lo que haría infinitas las ganancias de capital en los períodos anteriores, privando consiguientemente al sistema de una solución acotada. Por otra parte, la solución en T-1 será esquina o indefinida dependiendo del stock de capital acumulado hasta T-1. La única forma de resolver el sistema hacia atrás será suponer un equilibrio esquina en T-1, esto es, $x_{T-1}^{h}=\frac{1}{N}y_{T-1}$, donde N es el número de agentes considerados, siendo posible este tratamiento simétrico por sus características idénticas. La iteración del sistema dará lugar a unos beneficios marginales especificados como función polinómica en x_{0}^{h} y, una vez que se calcule su (o sus) valores de equiibrio al confrontarlos con los costes marginales, deberá verificarse que el stock de capital humano acumulado en T-1 garantiza que la tasa de retorno del capital humano es superior a la de los bonos.

Una reflexión de interés concierne al grado en que estos resultados se mantendrían cuando el tratamiento de la eficiencia del trabajo fuera asimétrico entre el sector productor de bienes finales y el educativo. Esto es, se alude a una situación en la que en este último sector la función de acumulación correspondiera al modelo básico de Becker y Ghez, dependiente exclusivamente del tiempo de aprendizaje -sin cualificar por el capital humano- y de x. De las ecuaciones anteriores puede deducirse que la forma creciente de los beneficios marginales, considerando simultáneamente todas las ecuaciones del sistema, no se vería modificada en presencia de rendimientos decrecientes en x. De hecho, la inspección de las cpo lleva a concluir que la dependencia de las ganancias de capital de x_{s}^{h} se produce siempre que la tasa de depreciación del activo es distinta de 1, aunque $h_{a}=0$. Así, tanto el número de períodos del horizonte como el rango de valores de la tasa de depreciación serían los factores críticos para el mantenimiento de este resultado.

En apartados próximos se verá cómo, con funciones de utilidad de elasticidad de sustitución constante, capital humano como único activo en la cartera de los agentes, horizontes infinitos y efectos externos en la función h, es posible llegar a algunos resultados que simplifican la resolución del sistema bajo rendimientos constantes. El estudio de estos casos se reserva no obstante al epígrafe sobre equilibrio general, en la medida en que se trata de modelos dinásticos frente a los de ciclo vital individual y que los primeros suelen encontrarse en la literatura insertos en marco de equilibrio general; esto no quita sin embargo para que fueran también adaptables a equilibrio parcial, sin más que introducir el supuesto de comportamiento paramétrico respecto a precios.

Hecha esta interpretación de la ecuación de valoración, otro tanto podría decirse de la que se deduce cuando el input de aprendizaje es el tiempo. A continuación de transcriben las dos versiones de las tasas de retorno, tanto en términos de bienestar como en unidades del numerario:

$$\mu_s = \beta\lambda_{s+1}e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)+\sum_{i=2}^{T}\beta^i\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+h_{a,s+j}\right]\right)\lambda_{s+i}e_{s+i}\left(1-n_{s+i}^h\right)=$$

$$=\beta\lambda_{s+1}e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)+\frac{1}{a_{s+1}^h}\sum_{i=2}^{T-s}\beta^i a_{s+i}^h\lambda_{s+i}e_{s+i}\left(1-n_{s+i}^h\right);$$

$$\frac{e_s a_s^h}{h_{n,s}}=\frac{e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)}{\left(1+r_s\right)}+\frac{1}{a_{s+1}^h}\sum_{i=2}^{T-s}R_i a_{s+i}^h e_{s+i}\left(1-n_{s+i}^h\right);\ R_i=\prod_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\left(1+r_{s+j}\right)};h_{ns}=a_s^h B\ \ (4.57)$$

El coste marginal en este caso se compone del precio unitario (o coste de oportunidad) por unidad adicional de tiempo precisa para producir una unidad adicional de capital humano; a su vez, dicho coste de oportunidad se compone del salario real por unidad de capital humano y hora trabajada, por el stock acumulado hasta el período s. Otra diferencia reseñable con análogas ecuaciones respecto al input x es que , tanto si los rendimientos en n son constantes como si fueran decrecientes, la senda futura de n no depende del valor inicial de esta variable, por lo que los beneficios marginales serán constantes en cualquiera de los dos supuestos.

Antes de pasar a estudiar la pendiente de los beneficios y costes marginales, es notable la similitud que presentan los primeros con la ecuación minceriana de ganancias salariales. En efecto, **Mincer (1958)** formula una ecuación de valoración para los conocimientos adquiridos por un individuo -el concepto de capital humano todavía no había sido elaborado suficientemente por Becker y otros autores-, bajo los supuestos de homogeneidad de todos los agentes, adquisición de los conocimientos mediante inversión de tiempo en escolarización, funcionamiento perfecto de los mercados de capitales y diferenciación de los trabajos de acuerdo con el grado de conocimientos que precisan acumular; este último supuesto lleva a que aquellos que precisan una inversión mayor paguen una “prima” salarial para compensar el sacrificio de tiempo y recursos durante el período de atesoramiento de los conocimientos. De acuerdo con estos supuestos, el valor descontado de los conocimientos/habilidades adquiridas por el individuo era la siguiente:

$$V=\frac{e^{-rs}w\left(n^h\right)}{r}\ \ (4.58)$$

Expresión que, trasladada a logaritmos, permite calcular la ecuación salarial minceriana en su versión básica y en tiempo continuo:

$\ln w(s) = \ln w(0) + rn^h$ (4.59)

Comparando con la ecuación de igualdad entre benefcios y costes marginales desarrollada, hay dos diferencias de segundo orden con el planteamiento de Mincer: la ausencia de ecuación dinámica en el concepto de conocimiento de Mincer, lo que priva de comparabilidad a los elementos de los beneficios marginales relacionados con la ganancia de capital de la tasa de retorno (esto es, $1+h_a$), así como la ausencia de definición de costes marginales por Mincer, en buena medida porque la teoría beckeriana sobre asignación del tiempo todavía estaba por desarrollar. Por lo demás, es lógico pensar que en cualquier situación de equilibrio el valor del conocimiento se igualaría a los costes de su obtención. El tercer elemento de discrepancia es que, mientras la ecuación de valoración de Mincer está expresada en términos medios, la elaborada en este capítulo se encuentra en términos marginales. Por lo demás, obsérvese que la suma descontada de las rentas marginales del activo está presente en ambas, lo que resulta especialmente meritorio en el trabajo de Mincer habida cuenta del grado de desarrollo de la teoría del capital humano a finales de los años 50. Precisamente de la relación constante entre salario y acumulación de experiencia que se desprende de la ecuación salarial minceriana parte el modelo de Ben-Porath de 1967, una de las contribuciones clave en esta literatura.

A la vista de la última de estas dos ecuaciones, los costes marginales serán de nuevo constantes hasta un nivel de inversión que agote todo el tiempo disponible; a partir de ahí se harán verticales, conformando una L invertida. Si se admitieran diferentes rendimientos para a_s^h y n_s^h , siendo decrecientes para esta última variable, los costes marginales serían crecientes (y también path-independent) hasta el límite del tiempo disponible, tornándose verticales a partir de dicho punto. Esta taxonomía, unida a la comentada constancia de los beneficios marginales genera otra tipología de equilibrios diferente a la estudiada para el input x cuando el horizonte temporal excede los 2 períodos, ya quepara cualquier longitud del horizonte solo caben equilibrios esquina o indefiniciones.

En efecto, la tasa de retorno para T períodos resultante de la reordenación de las anteriores ecuaciones es la siguiente:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T} \equiv \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1-n_{s+1}^h\right)B + \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1+Bn_{s+1}^h\right) = \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1+B\right) \quad (4.60)$$

Los signos de las derivadas son los siguientes:

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T}}{dn_s^h} < 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T}}{\partial n_{s+1}^h} = 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T}}{\partial B} > 0 \quad (4.61)$$

El signo negativo de la pendiente de la tasa está garantizado, a diferencia de lo que sucedía con 2 períodos, al depender negativamente las ganancias de capital de n_s^h. Sin embargo, el desplazamiento de la curva ante una variación de n_{s+1}^h es nulo, al ejercer la variable dos efectos de signo opuesto: uno negativo sobre la renta marginal y uno positivo, sobre las ganancias de capital, al aumentar el efecto multiplicador sobre la producción del activo en s+1, que se compensan perfectamente entre sí. Por último y de lo concluido respecto a x, el sentido desplazamiento ante cambios en la productividad del aprendizaje será inequívocamente positivo, al acumularse el impacto sobre la renta marginal y sobre las ganancias de capital.

Con esta espeficicación del sistema de T-1 ecuaciones, aun conociendo el valor terminal de equilibrio del tiempo de aprendizaje ($n_T^h = 0$), no pueden derivarse soluciones interiores, a diferencia de lo que sucedía con las tasas de retorno respecto a x, al no aparecer en la cpo de s n_s^h ni formar parte de la misma a_s^h. De este modo, en cualquier período T-1 se tendrá bien un equilibrio esquina o una indefinición en el caso muy especial de que el tipo de interés coincida exactamente con la tasa del retorno del período; cuál de estas posibilidades es el resultado dependerá solamente del cociente de salarios reales $\left(e_T / e_{T-1}\right)$, así como del tipo de interés del período. Es además central el hecho de que tampoco n_{s+1}^h forma parte de la tasa de retorno, por lo que cada una de las ecuaciones correspondientes a un período pueden resolverse independientemente. Además y a diferencia de lo concluido para la tasa de retorno de x, un valor nulo en la senda de n no imposibilita obtener una solución al sistema, ya que n_{s+1}^h no forma parte del denominador de las ganancias de capital en la tasa de retorno. En cualquier caso, esta configuración demuestra que los beneficios marginales no dependerán de n_0^h.

Sería posible llegar a una solución interior, sin embargo, si n estuviera sujeto a rendimientos decrecientes (planteamiento conceptualmente menos sólido, como se comentó antes), ya que entonces la tasa de retorno de s sí contendría la variable n_s^h:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T;\gamma<1} \equiv \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma\left(n_s^h\right)^{\gamma-1} + \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(\frac{n_{s+1}^h}{n_s^h}\right)^{1-\gamma}\left[1+B\left(n_{s+1}^h\right)^{\gamma}\right] \quad (4.62)$$

Conocido entonces iterativamente n_{s+1}^h, en cada cpo podría despejarse sin necesidad de recurrir a cálculo numérico n_s^h, obteniendo:

$$n_s^h = \begin{cases} \left[\dfrac{e_{s+1}}{e_s} \dfrac{\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma + \left(n_{s+1}^h\right)^{1-\gamma}\left[1+B\left(n_{s+1}^h\right)^{\gamma}\right]}{\left(1+r_s\right)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} & ;\ s=0..T-2; \\ \left[\dfrac{e_{s+1}}{e_s} \dfrac{\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma}{\left(1+r_s\right)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} & ;\ s=T-1 \end{cases} \qquad (4.63)$$

Desde la perspectiva de costes y beneficios marginales descontados, esta última variante supondría seguir considerando beneficios marginales constantes, aunque los costes marginales serían ahora crecientes hasta el punto de agotamiento de la dotación de tiempo del período. Esta configuración haría posible la existencia de un solo equilibrio para n_0^h , que podría ser interior y localmente estable si la intersección entre ambas curvas se produjese en el tramo creciente de los costes marginales. Sin embargo, no podrían excuirse a priori equilibrios esquina en cualquiera de los dos activos. Comentario análogo al efectuado con x podría hacerse sobre los resultados cuando es el mero tiempo de aprendizaje -en lugar de este último, aumentado por el capital humano- la variable relevante en la ecuación de acumulación del activo. En este sentido, la ausencia de vínculos entre $n_s^h\ y\ n_0^h$ se mantiene, tanto con rendimientos constantes como decrecientes en el aprendizaje, sea cual sea el valor de h_a , lo que justifica la afirmación anterior en el sentido de que los beneficios marginales descontados a s=0, considerando conjuntamente todo el sistema de ecuaciones, serían constantes respecto a x_0^h .

Como última reflexión en el contexto de equilibrio parcial, resulta de interés verificar las tasas de retorno con T períodos cuando se utilizan simultáneamente como inputs variables n y x, siendo los rendimientos a escala en el primer factor constantes. Conforme al supuesto estándar que viene realizándose, el tiempo de aprendizaje en h viene aumentado por la eficiencia del individuo, materializada en su stock de capital humano. De este modo, las tasas de retorno, que deben igualarse al tipo de interés de los bonos para obtener soluciones interiores en ambos inputs, se escribirán como:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{pe}^{T} \equiv e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)Ba_s^h n_s^h \gamma \left(x_s^h\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{x_{s+1}^h}{x_s^h}\right)^{1-\gamma} \frac{\left[1+Bn_{s+1}^h\left(x_{s+1}^h\right)^{\gamma}\right]}{\left[1+Bn_s^h\left(x_s^h\right)^{\gamma}\right]} \frac{n_s^h}{n_{s+1}^h} \quad (4.64)$$

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{pe}^{T} \equiv \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1-n_{s+1}^h\right)B\left(x_s^h\right)^{\gamma} + \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(\frac{x_s^h}{x_{s+1}^h}\right)^{\gamma}\left[1+B\left(x_{s+1}^h\right)^{\gamma} n_{s+1}^h\right] \quad (4.65)$$

En cuanto a la resolución del sistema de cpo que permite esta estructura de la tecnología educativa, se hará referencia en primer lugar al caso de rendimientos constantes en x. Como se ha considerado cuando se tomaba un único input variable en h, la resolución del sistema debe comenzar considerando que $n_T^h = x_T^h = 0$. Dado que $\mu_T = 0$, los términos de ganancias de capital en las tasas de retorno desaparecen en T-1 (no así en el resto de los períodos anteriores), quedando solamente las rentas marginales. La primera de las ecuaciones permitiría despejar n_{T-1}^h en función de a_{T-1}^h , mientras que la segunda posibilita lo propio respecto a x_{T-1}^h . Estos valores/funciones pueden sustituirse iterativamente hacia atrás, de suerte que en las ecuaciones relativas al período T-2 ya se contaría con las ganancias de capital, pudiéndose sustituir x_{T-1}^h ; así, se precisaría el sistema completo de 2T ecuaciones para resolver las 2T incógnitas. Con rendimientos decrecientes el procedimiento sería el mismo, solo que el sistema solo sería soluble por procedimientos de cálculo numérico. Dada la estructura de las tasas de retorno, además, en ningún período anterior a T puede haber valores nulos de equilibrio de la demanda de inputs, ya que los valores futuros de ambos forman parte de los denominadores de las ganancias de capital, generándose una tasa de retorno no acotada.

IV.3. El modelo canónico en equilibrio general.

Dos estructuras alternativas se considerarán para derivar las tasas de retorno en equilibrio general, con resultados algo distintos. Un primer escenario supondrá una mera extensión del que se ha usado en equilibrio parcial, con un hogar representativo y una empresa representativa cuyo nexo (aparte de la propiedad accionarial) viene dado por el alquiler de servicios y su remuneración en mercados de factores perfectamente competitivos; los precios de equilibrio de los servicios seguirán constituyendo parámetros a los que uno y otra adaptarán sus decisiones óptimas. Para transformar las tasas de retorno a un entorno de equilibrio de general habremos de tener en cuenta, primero, que los salarios devienen endógenos a partir de la interacción de la oferta y la demanda de trabajo, debiendo ser compatible la oferta de trabajo que formulan los hogares con la demanda que realizan las empresas. En cuanto a esta última, en una primera alternativa se deriva a partir de la optimización del beneficio empresarial, dado por la producción del numerario menos los gastos en alquiler de los inputs, tanto trabajo como capital físico, ambos propiedad de las economías domésticas. De la cpo del tiempo de trabajo puede derivarse la siguiente curva implícita de demanda de trabajo:

$$\max_{\{n_s^w, K_s\}} \ \pi = F\left(K_s, a_s^h n_s^w\right) - e_s a_s^h n_s^w - q_s K_s; \ a_s^h n_s^w = L_s$$

$$s.a: a_s^h, n_s^w, K_s \geq 0; \ 1 \geq \mathrm{n}_s^w;$$

$$\Omega = F\left(K_s, a_s^h n_s^w\right) - e_s a_s^h n_s^w - q_s K_s + \gamma_s\left(1 - n_s^w\right) \ (4.66)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_s^w} = F_{L,s}\left(K_s, a_s^h n_s^w\right) a_s^h - e_s a_s^h - \gamma_s \leq 0 \ (4.67)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K_s} = F_{K,s}\left(K_s, a_s^h n_s^w\right) - q_s \leq 0 \ (4.68)$$

Para soluciones interiores del tiempo de trabajo, se tendrá que la demanda implícita de horas de trabajo por la empresa viene dada por la ecuación:

$F_{L,s} = e_s$ (4.69)

Además, en la restricción presupuestaria del consumidor representativo se incluirá hasta un máximo de 2 activos: crédito, representado a través de títulos o bonos, cuyas características se enumeraron antes, así como capital físico que se alquila a las empresas, el cual, simétricamente al capital humano, presenta una tasa de depreciación nula. De estos dos activos, para facilitar la claridad del análisis se considerará siempre en equilibrio general el capital físico, mientras que se hará alusión a las consecuencias de la introducción de bonos en aquellos epígrafes más relevantes. Teniendo en cuenta estas modificaciones, la restricción presupuestaria podrá expresarse como[136]:

$C_s + x_s^h + e_s a_s^h n_s^h + K_{s+1} + b_{s+1} \leq e_s a_s^h + \left(1 + q_s\right) K_s + \left(1 + r_{s-1}\right) b_s$ (4.70)

Un problema que debere tenerse en cuenta al trabajar con hogares representativos en equilibrio general es el de la irreversibilidad de caital físico y capital humano. En efecto, al ser idénticos todos los agentes y en ausencia de cualquier restricción, su conducta óptima consistirá en desahacerse a finales del período T de su posición en capital físico, al no poderse consumir este a pesar de compartir su naturaleza física con el bien de consumo. Esta pauta de comportamiento se puede apreciar en las siguientes condiciones de primer orden:

---

[136] A pesar de que tanto el input x como el tiempo forman parte de la restricción flujo del hogar representativo, supondremos para simplificar el análisis que el capital humano no se produce en ningún momento a partir de más de uno de estos dos factores. Por lo tanto, cuando x sea variable se supondrá que el tiempo de trabajo es exógeno, mientras que cuando el tiempo de aprendizaje sea el input variable se tomará nula la productividad de x en la función de inversión h.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} \left[q_{s+1} + 1 \right] \le 0 \ (4.71)$$
$$\beta^T \lambda_T K_{T+1} = 0 \ (4.72)$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} \left(1 + r_s \right) = 0 \ (4.73)$$

Centrándonos en la cpo de posición en el el capital físico y combinando las dos condiciones de primer orden de b y K, llegamos a la expresión habitual de que la tasa de retorno del activo financiero se igualará a la tasa del retorno del capital físico, que sustituyendo a su vez en la cpo de maximización del beneficio será igual a la tasa de alquiler:

$$1 + r_s = q_{s+1} + 1 = F_{K,s+1} + 1 \ (4.74)$$

Prestando atención ahora a la segunda de las ecuaciones, la de transversalidad, que no deja de ser una particularización de la cpo de posición en el activo para el período terminal, pueden verse sus implicaciones si se analizan conjuntamente los valores posibles del valor sombra de la riqueza con el multiplicador de Lagrange no negatividad del stock de capital físico. De esta manera, denotando ω este segundo multiplicador, la cpo en el período terminal puede reconvertirse en:

$$\beta^T \left(-\lambda_T + \omega_T \right) = 0 \Rightarrow \lambda_T = \omega_T \ (4.75)$$

Como el multiplicador de Lagrange de la riqueza no puede ser nulo (ya que conduciría a una utilidad marginal del consumo no acotada, por la propiedad de Inada), entonces $\omega_T > 0$, lo cual implica, por la correspondiente condición de holgura, que $K_{T+1} = 0$. Con lo cual, si la posición en capital físico en T era positiva, habrá que desahacerla. Puesto que todos los propietarios del capital físico, los hogares, son idénticos entre sí, esto implicará la imposibilidad de intercambiar entre ellos el bien de capital por bien compuesto en su modalidad de uso de consumo. Una posible solución a este problema sería que para todo hogar el capital fuese reversible en consumo. Este es un supuesto relativamente exigente que no todos los autores están dispuestos a utilizar. Hay que tener en cuenta que, en un horizonte infinito la cpo no implicaría necesariamente la igualdad entre los dos multiplicadores de Lagrange, al adoptar la forma:

$$\lim_{s \to \infty} \beta^s \left(-\lambda_s + \omega_s \right) = 0 \ (4.76)$$

Una alternativa es imponer al capital físico una restricción de irreversibilidad, en virtud de la cual la inversión bruta debe ser positiva o nula en todo período. Equivalentemente, podría decirse que $K_{s+1} \ge K_s$.

Si el stock de capital físico inicial $K_0 > 0$, la simple imposición de la condición de irreversibilidad evitará utilizar dos multiplicadores diferentes, uno para la restricción de no negatividad y otro para la irreversibilidad. Si denotamos por ς el multiplicador asociado a esta última restricción, la cpo del capital físico que transcribimos más arriba se verá modificada en el siguiente sentido:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_{s+1}} = \beta^s\left(-\lambda_s + \varsigma_s\right) + \beta^{s+1}\left[\lambda_{s+1}\left(\rho_{s+1}+1\right) - \varsigma_{s+1}\right] = 0 \text{ (4.77)}$$

Evaluando esta condición en s=T, tendremos:

$$\lambda_T = \varsigma_T \text{ (4.78)}$$

Esta solución haría vinculante en T la restricción de irreversibilidad, de modo que se cumpliría simultáneamente $K_{T+1} = K_T$ y $K_{T+1} \geq 0$. Por tanto, implicaría que el hogar representativo finalizaría su existencia con una cantidad positiva de capital físico, al tiempo que haría la inversión bruta nula en el último período. Esta es una posibilidad factible, ya que se compensaría la desutilidad que genera la falta de conversión del capital físico en consumo en el último período con la utilidad adicional que se disfruta gracias al valor sombra de la restricción de irreversibilidad. Por otro lado, la cpo del capital físico para períodos anteriores a T, siempre que la inversión bruta sea positiva (supuesto que se adoptará), mostrará su forma habitual, ya que en ese caso se cumplirá $\varsigma_s = \varsigma_{s+1} = 0$. En caso contrario debería arrastrarse una prima de iliquidez del activo en su tasa de retorno. Si no se realiza este supuesto, la cpo del capital físico, reordenada, se puede escribir como $\left(1+r_s\right) + \frac{\varsigma_{s+1} - \varsigma_s}{\beta \lambda_{s+1}} = q_{s+1} + 1$. El segundo sumando del primer miembro es la prima de iliquidez. Obsérvese que, para que sea positiva, $\varsigma_{s+1} > 0$, lo que implica que en s+1 la restricción de irreversibilidad deviene vinculante. Para profundizar en el significado de un signo positivo de la prima y en aras de la simplificación, supongamos también que $K_{s+1} > K_s \Rightarrow \varsigma_s = 0$. Lo que en este caso indica la cpo es que, en ausencia de un valor positivo de ς_{s+1} , no se invertiría en capital físico, puesto que las ganancias marginales de hacerlo serían inferiores a los costes marginales. El elemento que en última instancia inclina la decisión a favor de la inversión en s es el contar con una contraprestación a la saturación de la restricción de irreversibilidad en el período futuro. La formulación de la prima de iliquidez implica también que esta solo puede construirse hasta T-1 y que, siempre que en dicho período $\varsigma_{T-1} = 0$, su valor sería independiente del valor sombra del activo irreversible, ya que sabemos que en T debe verificarse $\varsigma_{s+1} = \lambda_{s+1}$.

Así pues, la irreversibilidad del capital físico podría salvarse (si la reversibilidad se considera un supuesto relativamente restrictivo) imponiendo una condición adicional al problema, si bien al coste de suponer desinversiones brutas en el activo a través de su convertibilidad a bien de consumo si se quiere evitar la presencia de la prima de iliquidez en el problema[137]. Otra posibilidad, relativamente frecuente especialmente en marcos OLG, es la imposición de una tasa de depreciación unitaria al capital físico, por lo que al final del horizonte el stock de capital físico se habrá depreciado completamente y no tendrá sentido calcular la pérdida de utilidad derivada de la muerte del agente con una cantidad física del activo; en tal caso, será imprescindible utilizar la condición de no negatividad sobre la posición futura en el stock[138]. Otra solución es un marco OLG en el que los mayores puedan vender su stock de capital físico a los adultos al final de la vida de los primeros, de modo que la oferta agregada de este incluyera tanto la producción del bien final por período como el stock de capital previamente alquilado a las empresas por los viejos. Finalmente conviene recordar que, aunque la utilización de horizontes infinitos permite diluir el problema del período terminal, no resuelve la cuestión en los períodos anteriores, en los que la condición de no negatividad, unida a la restricción de acumulación del capital físico, no garantiza una inversión bruta positiva o nula.

El problema de la irreversibilidad concierne también al capital humano, no ya porque ambos activos forman parte de las carteras de un conjunto de agentes idénticos, sino por

[137] La introducción de incertidumbre es el marco natural para abordar estos problemas de irreversibilidad sin necesidad de imponer restricciones exógenas sobre el comportamiento inversor en horizontes finitos. De lo contrario, el conocimiento de la senda completa de precios de los inputs en un entorno de certidumbre, unida a la irreversibilidad del activo, puede dar lugar con relativa facilidad a equilibrios esquina en inversión bruta. Bajo incertidumbre e irreversibilidad, la adición de algunos elementos como opciones reales en los proyectos de inversión permitiría aceptar con mayor naturalidad una inversión en capital físico positiva durante todos los períodos, al tener esta última implicaciones estratégicas más allá de la pura rentabilidad entendida en un sentido convencional. Sin embargo, el hecho de centrar nuestro análisis en las tasas de retorno del capital humano justifica la realización de esta simplificación.

[138] Esta última tampoco es una solución perfecta, ya que por simetría suele requerir la imposición de una tasa de depreciación unitaria al capital humano, reduciendo las posibilidades de que el modelo genere crecimiento endógeno a largo plazo. No solamente se trata de una cuestión de simetría en el tratamiento de los dos activos, sino que la aplicación de supuestos diferentes sobre la tasa de depreciación dificulta la conseucución de soluciones cerradas.

la propia naturaleza del activo, que hace imposible su enajenación una vez adquirido. Sin embargo existe una diferencia conceptual entre ambos que mitiga la importancia de esta dificultad en este segundo caso: el hecho de que el capital humano es un activo producido a través de una función de aprendizaje definida solamente para valores reales positivos del input y los outputs, así como las propias restricciones de no negatividad de sus inputs. Por otro lado, ninguna propiedad de las funciones de comportamiento impide que el valor sombra del capital humano se anule en un determinado período, a diferencia de lo que ocure con el valor sombra de la riqueza λ . Teniendo en cuenta todos estos aspectos, no será necesaria la introducción ad-hoc de una restricción de irreversibilidad para el capital humano y la cpo relativa a su posición, evaluada en T y siendo ϑ el multiplicador de la restricción de no negatividad del capital humano, toma la forma:

$$\beta^T\left(-\mu_T+\vartheta_T\right)=0 \Rightarrow \mu_T=\vartheta_T \text{ (4.79)}$$

Puesto que el valor sombra del capital humano en el último periodo puede anularse, entonces ambos multiplicadores se hacen cero, posibilitando que el stock de capital humano terminal pueda tomar un valor positivo. En el caso contrario, multiplicadores positivos, el stock de capital humano debería anularse, lo que unido a la irreversibilidad de su acumulación traería consigo una senda nula del activo en todo el horizonte.

Los dos activos reales también pueden compararse desde el punto de vista de su prima de iliquidez asociada. En efecto, aunque el capital humano no presenta explícitamente una prima de iliquidez, implícitamente está vinculado a una, aunque hay que construirla a partir de las cpo ya que la no negatividad de la inversión bruta está garatizada por un conjunto de restricciones secundarias. En realidad, la cpo de inversión en cualquiera de los inputs de capital humano solamente rige con igualdad cuando la utilización de estos es estrictamente positiva. Pensemos, sin embargo, de un modo paralelo al razonado con el capital físico, que en el período s tiene lugar una producción estrictamente positiva de capital humano mientras que en s+1 la ganancia marginal de la producción es inferior a su coste marginal, por lo que la inversión bruta en este último activo es nula. Estos supuestos implican el cumplimiento simultáneo de las siguientes desigualdades:

$$\mu_s=\frac{\lambda_s}{h_{xs}};\ \mu_{s+1}<\frac{\lambda_{s+1}}{h_{x,s+1}} \text{ (4.80)}$$

Visto de otra forma, en s+1 la igualdad entre el valor sombra del activo y sus costes marginales de producción exigirían la adición al primero de un cierto valor positivo ψ_{s+1} , de modo que:

$$\mu_{s+1}=\frac{\lambda_{s+1}}{h_{x,s+1}}-\psi_{s+1} \text{ (4.81)}$$

Llevando estas dos igualdades a la cpo de la posición en capital humano, se obtendría que la tasa retorno de este activo se igualaría en s, para un número de períodos $T > 2$, a la tasa de los bonos también en s más un cierto componente positivo, que constituiría la prima de iliquidez aunque no pudiera expresarse, como se hizo con el capital físico, en función de los multiplicadores de la restricción de irreversibilidad, por no ser aplicable esta *sensu estricto* al capital humano. Este componente positivo sería la consecuencia de la imposibilidad de aplicar un cantidad negativa de inputs en s+1. Si bien en este período la estrategia óptima, si el activo no fuera irreversible, sería la desinversión, sin embargo se produce en s una posición superior a la que se desearía mantener al cabo de un período. La compensación necesaria para aun así tenga lugar una inversión positiva bruta positiva en capital humano en s constituiría, por tanto, la prima de iliquidez. Más formalmente y tomando como ejemplo la tasa de retorno derivada a partir del input x, la cpo con inversión bruta nula en s+1 (y positiva en s) sería la siguiente:

$$1+r_s+\frac{\psi_{s+1}\left[h_{a,s+1}+1-\delta\right]}{\lambda_{s+1}\left(1/h_{x,s}\right)}=\frac{e_{s+1}\overline{n}^{w}}{\left(1/h_{x,s}\right)}+\frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{x,s}\right)}\left[h_{a,s+1}+1-\delta\right] \quad (4.82)$$

Siendo por tanto la prima de iliquidez igual al segundo sumando del primer miembro. Cuando se tiene un modelo de dos períodos, la condición de transversalidad exige que $\mu_T = 0$, lo que implica que $\frac{\lambda_T}{h_{x,T}} = \psi_T$. Llevada esta última igualdad a la tasa de retorno entre T-1 y T, no aparecerá en la condición de no arbitraje con el activo financiero ninguna prima de iliquidez. Esta aparente contradicción (la situación en T no sería sino un caso particular del caso general en el que en s+1 la inversión bruta es nula y la irreversibilidad, vinculante) se debe a que el valor de la prima se compensaría perfectamente con las ganancias de capital del activo, por lo que ambos términos desaparecerían de la condición de no arbitraje. Este resultado replica de algún modo el obtenido para el capital físico: para ambos activos, en el período terminal la irreversibilidad implica que se establece una relación entre la prima y el valor sombra de la riqueza (de igualdad directa, para el capital físico y de proporcionalidad, para el humano).

Tras esta reflexión sobre los problemas de irreversibilidad y en aras de la simplificación del análisis, se adoptará el supuesto de que ni la tasa de retorno del capital físico ni la del capital humano presentan primas de iliquidez sobre el retorno del activo financiero, para lo cual una inversión bruta positiva en todos los períodos anteriores al terminal constituye una condición suficiente. Puesto que tanto las tasas de retorno del capital humano (en cualquiera de sus dos versiones) como las del capital físico se igualan a la del activo financiero, por transitividad se llega a la igualdad en las tasas de retorno de los dos activos reales, capital físico y capital humano, o mejor dicho, a la igualdad entre el retorno del capital físico y el de las dos variantes de los retornos del capital humano, según cuál sea el input que interviene en su elaboración.

Para describir la tecnología de producción del bien final, se utilizará en lo sucesivo de una función de producción Cobb-Douglas en capital físico y trabajo productivo, de rendimientos privados constantes y ausencia de efectos externos (esto es, rendimientos sociales a escala también constantes), que denotaremos como:

$$Y_s = AK_s^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{1-\alpha};\ 0<\alpha<1 \quad (4.83)$$

En equilibrio, el empresario se colocará sobre su curva, luego sea cual sea el valor del salario que vacíe el mercado, se verificará su cpo de demanda de trabajo. Para la especificación sugerida, este principio se concretará en la siguiente igualdad:

$$AK_s^{\alpha}(1-\alpha)\left(n_s^w a_s^h\right)^{-\alpha} = e_s \quad (4.84)$$

Un caso especial lo constituirá aquel en el que el input x es el único variable en la producción de capital humano, ya que, como se ha venido suponiendo, se tomará el tiempo de trabajo como exógeno en el análisis de la tasa. En esa stuación, el mantenimiento del empresario sobre su curva de demanda de trabajo implicará que el salario real de equilibrio se determinará íntegramente por el lado de la oferta de trabajo, siendo el resultado de sustituir en la cpo el valor exógeno $\bar{n}^w$. Al ser todos los hogares idénticos, el salario real dependerá ex-post negativamente del stock de capital acumulado acumulado hasta el período de su percepción siempre que, como en la Cobb-Douglas elegida, la productividad marginal del trabajo efectivo sea decreciente; en este sentido, las consecuencias de una mayor acumulación en s serían un desplazamiento a la izquierda de la curva de demanda de horas de trabajo por la empresa representativa. Ahora bien, **caben dos posibilidades en cuanto a la consideración que hagan los hogares de este salario de equilibrio, incluso teniendo en cuenta que deba igualarse a la productividad marginal del trabajo para la empresa representativa del sector proveedor de bienes finales. Si, siguiendo el esquema sugerido en equilibrio parcial, los trabajadores son meros oferentes de servicios de capital humano y las decisiones de producción son adoptadas por otros agentes (los gerentes de la empresa), aunque estas sean propiedad de los hogares, las tasas de retorno del capital humano serán las mismas que las estudiadas en equilibrio parcial y paramétricas respecto a los salarios reales.** Pese a que estos vienen dados por la productividad marginal del trabajo efectivo, ampliar la cpo de la acumulación de capital humano incluyendo en ella el impacto de una posición mayor sobre los salarios reales en el período siguiente equivaldría a atribuir un poder de mercado al agente representativo del que carece en el entorno de competencia perfecta que caracteriza a los modelos utilizados. En una línea de razonamiento similar, expresar la tasa de retorno en función del input variable en la tecnología de capital humano teniendo en cuenta la relación implícita del stock del período siguiente y el input aplicado en la actualidad equivaldría también a que el hogar representativo interiorizase una capacidad de fijación de salarios de equilibrio a partir de su comportamiento unilateral.

Una segunda estructura institucional pasaría por que cada hogar fuese propietario de su propia empresa y adoptase simultáneamente las decisiones de consumo, inversión y producción. En este supuesto la restricción presupuestaria del hogar representativo se modificaría, al percibirse no una retribución a la aportación de los inputs sino el valor total de la producción, que constituiría la principal fuente de recursos del agente representativo, junto a la renta de sus activos financieros. Esta alternativa implicaria la siguiente restricción presupuestaria flujo:

$$C_s + x_s^h + K_{s+1} + b_{s+1} \leq F\left(K_s, a_s^h\left(1-n_s^h\right)\right) + K_s + \left(1+r_s\right)b_s \quad (4.85)$$

El subsistema de cpo correspondiente a la inversión en los dos activos reales quedaría así:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K_{s+1}} = -\lambda_s + \beta\lambda_{s+1}F_K\left(K_{s+1}, a_{s+1}^h\left(1-n_{s+1}^h\right)\right) \leq 0 \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_s^h} = -\lambda_s + \mu_s B a_s^h \leq 0 \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_s^h} = -\lambda_s F_L\left(K_s, a_s^h\left(1-n_s^h\right)\right) + \mu_s B \leq 0 \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_{s+1}^h} = -\mu_s + \beta\left[\lambda_{s+1}F_L\left(K_s, a_{s+1}^h\left(1-n_{s+1}^h\right)\right)\left(1-n_{s+1}^h\right) + \mu_{s+1}\left(h_{a,s+1}+1\right)\right] \leq 0 \quad (4.89)$$

Formalmente las condiciones son idénticas a las obtenidas con decisiones productividas separadas cuando, bajo la primera alternativa, los precios de los factores productivos se sustituyen por sus valores conforme a las cpo de maximización del beneficio de la empresa representativa. Sin embargo, existe una diferencia conceptual que resultará esencial a la hora de obtener una expresión simplificada de la tasa de retorno: en F_L , el capital humano podrá sustituirse por su correspondiente ecuación de acumulación, que lo liga a la cantidad de input aplicada en s. Con empresa representativa independiente, efectuar dicha sustitución, como se indicó más arriba, no sería posible en ausencia de poder de mercado del hogar representativo. La dependencia funcional de la tasa de retorno y el input variable a partir del que se produce el capital humano es, por tanto, diferente en ambos casos, al resultar una expresión más compleja cuando se desarrolla al máximo la productividad marginal del activo. Por otra parte, la comparación entre ambas clases de tasas en equilibrio general permite identificar una diferencia con las que se obtendrían en análogas situaciones para el capital físico: mientras la de equilibrio parcial (o equilibrio general con consumidor representativo) depende del input generador del activo además de la remuneración del trabajo, la del capital físico solo lo hace solo de la tasa de alquiler del capital, lo que hace imposible resolver para un equilibrio interior en equilibrio parcial.

Esta última modificación será la principal que se opere en la estructura formal de la tasa en equilibrio general (que se denotará por ge) frente a equilibrio parcial. Desde un punto de vista interpretativo, el tipo de interés dejará de ser exógeno, por lo que las decisiones de consumo de inversión se tomarán a partir del mismo sistema de cpo y sus determinantes estarán entrelazados. Así, por ejemplo, los parámetros que conformen las preferencias, como la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, influirán sobre la inversión óptima, aunque no aparezcan directamente en las tasas de retorno. A este respecto puede efectuarse una distinción entre tasa ex ante y ex post paralela a la que se hizo en equilibrio parcial. Mientras la tasa de retorno ex ante en equilibrio general, a la que se referirán las siguientes páginas, se obtiene directamente a partir de las condiciones de primer orden de la posición en el activo y la demanda de inputs, para una senda del resto de las variables endógenas, la tasa ex post se derivaría a partir de una sustitución del resto de ecuaciones dinámicas del sistema de equilibrio general en la igualdad entre beneficios marginales y costes marginales de inversión en capital humano en el período s; por tanto, recogerá la influencia del capital humano como variable estado en las restantes endógenas del sistema presentes en la tasa de retorno. Ambos conceptos son análogos a los delimitados en equilibrio parcial, solo que en aquel caso la separabilidad entre decisiones de ahorro e inversión permitía construir la igualdad entre costes y beneficios marginales ex post exclusivamente a partir de las cpo de no arbitraje entre el activo financiero y el real; en equilibrio general, sin embargo, sería preciso involucrar las cpo relativas a la demanda del bien de consumo en la derivación de las relaciones ex post.

Antes de cerrar estas reflexiones introductorias, hay que resaltar que el entorno de equilibrio general (y en particular, la derivación de los estados estacionarios dentro de los mismos) permitirán particularizar la tasa a dichas sendas y obtener algunas simplificaciones y/o propiedades interesantes. Este análisis podrá realizarse, como es obvio, cuando existan sendas de crecimiento estacionario en el sentido convencional, que no será ni para todos los inputs ni todas las clases de rendimientos del capital humano.

Tasa de retorno respecto a n^h . Pasaremos ahora a derivar la tasa cuando el tiempo de aprendizaje es el único input variable en la producción de capital humano. De acuerdo con el planteamiento efectuado en este modelo, n^h es siempre el tiempo de aprendizaje asignado por el individuo a la acumulación de su propio capital humano. En parte de la literatura, especialmente en la de OLG en la que son los padres los que toman las decisiones relevantes sobre la educación de sus hijos, esta variable es el tiempo invertido por aquellos en la transmisión de conocimientos a estos últimos, cambiando así su connotación de un sentido activo a otro pasivo. Más adelante se encontrarán algunos ejemplos dentro de este enfoque.

En este caso, las propiedades de unicidad del estado estacionario así como la existencia de dinámica de transición, tanto cuando las tecnologías se basan solamente en inputs privados como cuando se observan efectos externos, están perfectamente apoyadas en una extensa literatura por la que se realiza un recorrido en el capítulo 3. Como es habitual, supondremos que el tiempo de aprendizaje tiene el mismo tipo de rendimientos que el capital humano, en este apartado constantes. **Comenzando por la tasa de 2 períodos**, que podría encontrarse, por ejemplo, en un modelo OLG sin altruismo intergeneracional:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T=2} = B\left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left[1-n_{s+1}^{h}\right]^{1-\alpha}\left[1+Bn_s^{h}\right]^{-\alpha}\left[1-n_s^{h}\right]^{\alpha} \quad (4.90)$$

7Tal como sucedía con el input x, la introducción de la productividad marginal del trabajo efectivo, decreciente respecto al input tiempo, tiene como principal consecuencia que, incluso con rendimientos constantes de este input en la tecnología educativa, la tasa depende del mismo. Los siguientes signos de las derivadas totales y parciales se verifican en esta nueva versión de la tasa:

$$\frac{d\,rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}}{dn_s^{h}}<0;\;\; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}}{\partial B},\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}}{\partial K_{s+1}}>0;\;\; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}}{\partial K_s},\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}}{\partial n_{s+1}^{h}}<0 \quad (4.91)$$

A diferencia de la tasa de retorno respecto a x, solamente los shocks en la productividad de la tecnología educativa afectan a la tasa de retorno, ya que el impacto del parámetro A, al afectar en la misma proporción a salarios reales presentes y futuros, se cancelan. Por lo demás, los shocks sobre la productividad multifactorial de B ejercen también un efecto inequívocamente positivo con T=2. Respecto al tiempo de aprendizaje en s+1, con solamente dos períodos y por tanto sin ganancias de capital en la tasa su signo es negativo a causa de su impacto del mismo signo sobre la renta marginal del activo, toda vez que detrae horas de trabajo sobre las cuales pueda materializarse el incremento de la cualificación del individuo. La principal novedad la constituye el signo negativo de la derivada parcial respecto al capital físico de s: al afectar este positivamente al coste de producción salarial en s, reduce la tasa de retorno, efecto análogo pero de signo opuesto al ejercido por el stock del mismo activo en s+1.

En este entorno de 2 períodos[139] conviene reseñar -y este sería un comentario aplicable también a funciones de acumulación dependientes de x, si generaran dinámicas tratables con rendimientos constantes del capital humano- una estructura de generaciones solapadas (OLG) plantea cuestiones nuevas en cuanto a la obtención de la tasa de retorno, suscitadas en torno a la relación entre generaciones cuando media algún tipo de altruismo intergeneracional. En general, cuando esta última no se articula en torno a una internalización completa de las preferencias de la generación próxima, sino en la consideración parcial de ciertas proxys de bienestar de esta, **el bloque de cpo referentes a la producción de capital humano no permiten obtener una tasa de retorno explícita**. Por el contrario, cuando se produce dicha internalización total entonces se obtiene una expresión de la tasa análoga a la que caracterizaría un horizonte vital de más de 2 períodos.

Veámoslo con dos ejemplos sobre el segundo de estos escenarios, dejando el escenario de internalización plena de las preferencias de la cohorte adyacente para el siguiente apartado. En ambos se supone que los individuos viven tres períodos. En el primero de ellos no se toman decisiones autónomas, solamente se reciben y procesan los inputs educativos proporcionados por los padres, no realizándose ninguna optimización de las preferencias. En el segundo período se trabaja, ofreciendo servicios del capital humano proporcionado por los padres, se decide la cantidad de tiempo a dedicar a la educación de la siguiente generación (que, en idéntico tamaño normalizado a 1, nace durante este segundo período) y se ahorra, canalizando dichos ahorros a la adquisición de capital físico, que se alquilará al sector productor a cambio de una tasa q. Finalmente, en el tercer período de vida el consumo se realiza con cargo a los ahorros del segundo período y no se trabaja. En el primero de los ejemplos a analizar, la función de utilidad de cada cohorte dependerá tanto de sus consumos en los dos períodos de vida adulta como del stock de capital humano de la siguiente generación, que se supone generará satisfacción una vez se perciba operativo y generando ingresos, esto es, durante el tercer período de vida del individuo. Para facilitar el análisis, se tomará utilidad logarítmica en los 3 argumentos. Las tasas de depreciación de ambas clases de capital son nulas y se supone el capital fisico reversible para reducir el problema a sus elementos básicos. Puesto que no es imprescindible desarrollar al máximo la cpo en este caso, supondremos para simplificar que se trata de una economía con hogar y empresa representativos. Con estas premisas, la función de

[139] La problemática que se describe en este párrafo sería extrapolable a un número mayor de períodos, solo que la mayor parte de modelos OLG se circunscriben a dos efectivos, esto es, a dos en los que se optimiza, por razones de operatividad analítica.

utilidad y las restricciones presupuestarias flujo de los dos períodos, así como la función lagrangiana a optimizar, serán las siguientes:

$$U = \ln C_s^{s-1} + \beta\left[\ln C_{s+1}^{s} + \psi \ln a_{s+1}^{h}\right];\ \psi > 0 \ (4.92)$$

$$C_s^{s-1} + K_{s+1} \le e_s a_s^h \left(1 - n_s^h\right) \ (4.93)$$

$$C_{s+1}^{s-1} \le \left(1 + q_{s+1}\right) K_{s+1} \ (4.94)$$

$$\Omega = U + \lambda_s\left[e_s a_s^h\left(1-n_s^h\right) - C_s^{s-1} - K_{s+1}\right] + \beta\lambda_{s+1}\left[q_{s+1}K_{s+1} - C_{s+1}^{s-1}\right] + \mu_s\left[a_s^h\left(1+Bn_s^h\right) - a_{s+1}^h\right] \ (4.95)$$

En las preferencias, ψ representa el grado de altruismo intergeneracional. Las cpo relativas a la inversión en capital físico y humano se transcriben a continuación:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K_{s+1}} = -\lambda_s + \beta\lambda_{s+1}\left(1 + q_{s+1}\right) \le 0 \ (4.96)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_s^h} = -\lambda_s e_s a_s^h + \mu_s a_s^h B + \omega_s \le 0 \ (4.97)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_{s+1}^h} = -\mu_s + \frac{\beta\psi}{a_{s+1}^h} \le 0 \ (4.98)$$

En la cpo respecto al tiempo, ω es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de que la franja destinada a este propósito debe ser inferior a la dotación normalizada por período; se analizan, como es habitual, las soluciones interiores. La ausencia de la tasa de retorno al reordenar las cpo se produce porque la inversión en capital humano del segundo período ya no afecta a la renta del tercero, al estar esta última constituida únicamente por el alquiler y el valor residual del capital físico. Existe, sin embargo, un pay-off en términos de la utilidad marginal del stock de capital humano de los hijos. La manipulación de estas cpo lleva a establecer las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\lambda_s}{\beta\lambda_{s+1}} \ge 1 + q_{s+1} \ (4.99)$$

$$\lambda_s \ge \frac{\beta\psi B}{a_s^h\left[1 + Bn_s^h\right]e_s} \ (4.100)$$

A pesar de la aparente asimetría entre las dos ecuaciones, dividiendo la segunda por λ_{s+1} y reordenando se obtiene[140]:

$$\frac{\lambda_s}{\beta\lambda_{s+1}} \ge \frac{\left(\psi U_{h,s+1} / U_{C,s+1}\right)}{\left(e_s / B\right)} \ (4.101)$$

[140] A su vez, conocida la cpo de maximización de beneficios de la empresa representativa, el salario real podría sustituirse por la productividad marginal del trabajo efectivo.

De este modo, puede derivarse otra igualdad entre la relación marginal de sustitución intertemporal (o, bajo inversión bruta positiva en capital físico, la tasa de retorno marginal de este activo) y la tasa de retorno marginal del capital humano, que manteniendo en su denominador el coste marginal de producción ahora tiene una composición algo diferente en su pay-off marginal. En efecto, dada la estructura del modelo este ya no podrá identificarse con la renta marginal, sino que se tratará de la valoración marginal del capital humano de la siguiente generación en términos de la valoración marginal del consumo de idéntico período. La inclusión de este cociente evita definir la tasa de retorno en términos de útiles, al eliminar esta dimensión y permite expresar el denominador adimensionalmente, mientras que en una tasa de retorno convencional se construye en unidades del numerario; por lo demás, la imposibilidad de adquirir el capital humano a través del mercado impide que este cociente de utilidades marginales se exprese en función de unos precios relativos. **Así pues, aun sin ser una tasa de retorno en un sentido financiero convencional, en este tipo de problemas puede reconstruirse una aproximación a la misma por el lado de las preferencias**.

En el segundo ejemplo, que puede encontrarse también con cierta frecuencia en la literatura de OLG, es el consumo en la etapa adulta de la siguiente generación la variable relevante en la función de utilidad, que entra como argumento de forma análoga a como lo hacía el stock de capital humano:

$$U = \ln C_s^{s-1} + \beta\left[\ln C_{s+1}^{s} + \psi \ln C_{s+1}^{s}\right] \text{(4.102)}$$

Sustituyendo el consumo de los descendientes a partir de su restricción presupuestaria en la madurez, se obtiene la misma cpo respecto al tiempo pero una ligeramente distinta respecto a la posición en capital humano:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_{s+1}^{h}} = -\mu_s + \frac{\beta\psi}{C_{s+1}^{s}} e_{s+1} n_{s+1}^{w} \leq 0 \text{ (4.103)}$$

Reordenando las cpo y efectuando análoga operación a la del primer ejemplo con el valor sombra de la riqueza, la condición puede reducirse a los siguientes términos:

$$\frac{\lambda_s}{\beta\lambda_{s+1}} \geq \frac{\left[\psi U_{C_{s+1}^{s}} / U_{C_{s+1}^{s-1}}\right]}{\left(e_s / B\right)} e_{s+1} n_{s+1}^{w} \text{ (4.104)}$$

El resultado es similar al del primer ejemplo, solo que ahora la utilidad marginal del consumo de los descendientes inmediatos se ve corregido por el sueldo futuro y las horas trabajadas por la siguiente generación. Lo fundamental es, no obstante, que de nuevo la pseudo tasa de retorno debe ser también reconstruida, ya que no es proporcionada de una manera natural por las cpo, y que esta contiene en su pay-off un término que en puridad no es una renta marginal, al menos si entendemos esta como un recurso adicional en unidades del numerario[141].

Pasemos ahora a derivar la tasa de retorno en T períodos en una economía de agente representativo, que tomará la siguiente forma[142]:

$$\left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T>2} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s} \right)^{\alpha} \left[1 + Bn_s^h \right]^{-\alpha} \frac{\left[1 - n_{s+1}^h \right]^{-\alpha}}{\left[1 - n_s^h \right]^{-\alpha}} (1 + B) \quad (4.105)$$

La pendiente de la tasa de retorno sigue siendo negativa respecto al input utilizado, como tampoco cambian los signos de las restantes derivadas parciales que venimos estudiando. El Anexo proporciona los detalles de los cálculos. En cualquier caso he aquí un resumen de los resultados:

$$\frac{d \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T>2}}{dn_s^h} < 0; \frac{\partial \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T>2}}{\partial n_{s+1}^h}, \frac{\partial \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T>2}}{\partial B}, \frac{\partial \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T>2}}{\partial K_{s+1}} > 0; \frac{\partial \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T>2}}{\partial K_s} < 0 \quad (4.106)$$

Los signos coinciden en casi todos los casos con los obtenidos en equilibrio parcial. El signo de las dos derivadas parciales respecto a los stocks de capital es inmediato; en el caso de la derivada respecto a n_{s+1}^h el signo es positivo en lugar de nulo, como sucedía en la tasa obtenida para la tasa de equilibrio parcial. Esta diferencia se debe a la presencia de n_{s+1}^h en la productividad marginal del trabajo, de suerte que un aumento en el tiempo de aprendizaje futuro, al disminuir el tiempo de trabajo, eleva la productividad marginal y con

[141] Este problema aparece también cuando la decisión de acumulación se produce en el primer período de vida y los hijos se tienen en el segundo, de suerte que la acumulación de capital humano obedece tanto a la generación de rentas propias como a la internalización en las preferencias de la contribución del capital humano futuro a la formación de la siguiente generación.

[142] Excepcionalmente en horizontes infinitos la tasa puede coincidir con la derivada para 2 períodos si, a pesar de poseer el cabeza de familia preferencias dinásticas, es miope en cuanto a las consecuencias de su acumulación para futuras generaciones más allá de la renta del trabajo de sus hijos, esto es, no percibe los efectos que la mayor acumulación de capital humano por la generación inmediata tendrá como input en generaciones venideras, tanto por la vía de la no depreciación como de la productividad añadida. Sin embargo este supuesto equivale a privar de racionalidad completa a los agentes y/o atribuirles un fuerte desconocimiento del entorno en el que operan, por lo que no se contempla. Cuestión distinta es que la acción del capital humano en la tecnología educativa se produzca a través de efectos externos, caso que se abordará más adelante.

ella el salario; el resto de efectos se cancelan entre sí. Como se aprecia también en el Anexo, el signo respecto a la productividad multifactorial del aprendizaje en la tecnología educativa continúa siendo positivo, a pesar de confluir sobre él un doble efecto con signo opuesto. Por un lado, el impacto en equilibrio parcial es positivo, como vimos. Sin embargo, en equilibrio general un mayor coeficiente B implica una mayor producción de capital humano en s+1, ceteris paribus. A su vez, la concavidad de la función F respecto al factor trabajo implica que la productividad marginal del mismo descenderá ante una mayor acumulación de capital humano. Como pone de manifiesto la derivada parcial, sin embargo, el signo predominante es el primero.

En la línea de la reflexión que se hará más adelante, hay que ser cauteloso al interpretar los signos de estas derivadas parciales, ya que implican pendientes y desplazamientos de la tasa bajo dos supuestos: i) cuando se trata de cambios en el parámetro B, se ignoran los efectos indirectos que tendría B a través de las alteraciones que origina en las restantes endógenas que intervienen en la tasa y lo mismo podría decirse al calcular la pendiente respecto a n_s^h ; ii) cuando se evalúa el signo de los desplazamientos debido a cambios en otras endógenas, como el stock de capital físico o el tiempo de aprendizaje futuros, hay que tener en cuenta que dicho cambio estaria a su vez originado, bien por un parámetro, bien por los valores de las variables de estado en el momento inicial, aspecto que se abstrae también al calcular las derivadas parciales. **Por tanto en ningún caso deben tomarse dichos signos como una variación ex post de la tasa, esto es, como la variación que esta experimentaría al resolver conjuntamente todo el sistema de ecuaciones dinámicas que caracteriza el equilibrio general[143].** Este problema no es exclusivo de los modelos de crecimiento con capital humano, sino que afectaría también a todo aquel modelo en equilibrio general y, de manera particular, a aquellos en los que más de una variable endógena interviene en a tasa de retorno de un activo.

---

143 En la sección dedicada a la derivación de la tasa en equilibrio parcial, en un caso muy concreto (tasa basada en el input x, con rendimientos decrecientes en el mismo) se señaló la posibilidad de estudiar sus propiedades considerando exógena o endógena la senda completa de valores de x. Esto es posible por el carácter recursivo del subsistema de ecuaciones de inversión en equilibrio parcial, de modo que se pueden sustituir un conjunto de ecuaciones en la cpo a partir de la que se ha construido la tasa de retorno. Sin embargo, en equilibrio general esta posibilidad desaparece, ya que el sistema pierde su recursividad y todas las ecuaciones se resuelven conjuntamente. Por tanto, desaparece la noción de propiedades de la tasa "considerando endógenas las restantes variables", al no poder explicitarse tal relación de endogeneidad sin resolver todo el sistema conjuntamente.

Además, esta tasa ofrece la posibilidad de una cierta simplificación importante al evaluarse en equilibrio estacionario. Tomando, por ejemplo, $T \to \infty$, la tasa de crecimiento bruto del capital físico se igualará a la tasa de crecimiento bruto del capital humano y otros términos también se cancelarían. De esta manera:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T>2} = 1+B \quad (4.107)$$

O, si se tratara de un marco de dos períodos:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T=2} = B \quad (4.108)$$

De este modo, la tasa de retorno pasa a tener una sensibilidad nula respecto al valor estacionario n^h, aunque experimenta desplazamientos positivos ante una elevación de la productividad multifactorial. A pesar de que la tasa es constante, esto no implica una indefinición de la inversión en capital humano, puesto que se iguala a otra tasa de retorno decreciente en la cantidad invertida en el activo, como la del capital físico y no a una constante conocida, como sucedía en equilibrio parcial. De hecho, la primera de las versiones se corresponde con el modelo de Lucas sin efectos externos y en tiempo discreto, por lo que el estado estacionario está correctamente definido, es único y presenta estabilidad local y global, siendo en él la inversión bruta en capital humano positiva.

La tasa de retorno puede calcularse también para el caso de hogar + empresa representativa. En este último caso, se define $k_s = K_s / a_s^h n_s^w$ y se considera que $e_s = f(k_s) - k_s f'(k_s)$, con $e'(k_s) > 0$. Los salarios reales se expresarán dentro de la tasa como $e(k_s)$ con k_s dado, reflejando de este modo que el hogar representativo que toma la decisión de acumulación de capital humano no puede influir individualmente sobre el salario real, sino que lo toma como un parámetro más del sistema. Así, para un horizonte que excede los dos períodos la tasa podrá escribirse como:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\bar{e}} = \frac{e_{s+1}(k_{s+1})}{e_s(k_s)}[1+B] \quad (4.109)$$

La expresión es ahora más comptacta y depende únicamente de la variable k, siendo su derivada parcial respecto a B inequívocamente positiva al venir dados los salarios reales. Puesto en estado estacionario k se hace constante, la tasa coincide con la derivada para un agente representativo a lo largo de la senda estacionaria:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T>2;\bar{e}} = 1+B \quad (4.110)$$

Equilibrios esquina y tasas de retorno. A pesar de que un equilibrio esquina no es inevitable, estas tecnologías constituyen el caso a priori más propicio para la emergencia de las denominadas trampas de pobreza, dada la constancia de la productividad marginal. La literatura ha estudiado especialmente esta posibilidad en marcos OLG tanto por razones de mayor simplicidad analítica como por el hecho de que la identificación de estas situaciones cobra especial sentido en los estudios de movilidad intergeneracional. Tales "trampas" se alojan en aquellas soluciones del sistema que incluyen al menos un estado estacionario con inversión en capital humano nula o muy baja. Hay que remarcar que este tipo de soluciones estacionarias pueden presentarse también con multiplicidad de estados estacionarios, entre los que se encuentren uno o más con inversión positiva, aunque en este caso la inestabilidad local de alguno de ellos puede conducir hacia aquellos caracterizados por inversión nula. La existencia de este tipo de equilibrios depende del cumplimiento de determinadas restricciones paramétricas que relacionan la tasa de preferencia temporal y la productividad en la tecnología educativa. Teniendo en cuenta que una trampa de desarrollo el crecimiento de la economía sería nulo, la condición de no arbitraje entre activos podría escribirse del siguiente modo tomando, para simplificar, una utilidad logarítmico-aditiva en un horizonte de 2 períodos:

$$\frac{C^s_{s+1}}{\beta C^s_s} = \left(1+r_s\right) > B \quad (4.111)$$

Si en equilibrio estacionario no hay acumulación de capital físico ni humano tampoco podrá haber crecimiento del consumo, por lo que los dos consumos de períodos consecutivos se igualarán a lo largo de la senda estacionaria. Por tanto, imponiendo $\frac{1}{\beta} \leq B$ [144] puede llegar a evitarse la aparición de esta solución y dar lugar a un estado estacionario con crecimiento continuo y constante del capital humano. Indirectamente, esta condición exige que $B > 1$. De hecho esta es la condición aplicable al modelo de Lucas para lograr un crecimiento positivo del capital humano en estado estacionario, al ser la tasa neta estacionaria de acumulación en este modelo -trasladada a tiempo discreto- $\left[\left(B-\left(1/\beta\right)\right)/\sigma\right]$.

La posibilidad de una trampa de crecimiento puede enfocarse también desde la perspectiva de la elección entre capital físico y capital humano, cuando son estos los dos ac-

[144] Más generalmente, para unas preferencias con elasticidad de sustitución intertemporal del consumo constante, la condición sería la misma, $\frac{1}{\beta} \leq B$, aun siendo σ la inversa de dicha elasticidad, diferente de la elasticidad unitaria de las preferencias logarítmicas.

tivos que componen la cartera de los agentes. En tal circunstancia, resulta especialmente útil expresar el modelo en función de la ratio entre capital físico y trabajo eficiencia, volviendo a la versión derivada para la economía de hogar y empresa representativos. Consiguientemente, formulando los salarios reales en función del capital por unidad de trabajo-eficiencia y evaluando la condición de no arbitraje en estado estacionario, se tendrá:

$f'(k) \geq B$ (4.112)

Lo que sucedería, dada la concavidad de la función de producción respecto a k, para valores relativamente bajos del capital físico en unidades de eficiencia. Por tanto, si dado un $\hat{k}$ obtenido recursivamente[145] en un bloque del modelo -bajo el supuesto de que $n^h = 0$ - y siendo dicho $\hat{k}$ estable se verifica la anterior relación con signo desigual, a partir de cierto período $\bar{s}$ finito el stock de capital de equilibrio general verificaría la inecuación siguiente:

$f'(k_{s+1}) \dfrac{e_s(k_s)}{e_{s+1}(k_{s+1})} > B$ (4.113)

Dado k_s , el primer miembro de esta relación es decreciente respecto a la ratio de capitales. Así, partiendo de un stock relativo de capitales suficientemente bajo se verificaría la desigualdad superior y no se acumularía capital humano, aunque nada impediría la acumulación de capital físico; por tanto cuando se tienen dos activos reales la solución esquina no impide el crecimiento de la economía. Dependiendo del valor estacionario de k, a lo largo de la senda de equiibrio general podría comenzar a invertirse en capital humano o no. En cualquier caso y a consecuencia de los rendimientos decrecientes de F respecto al capital físico, la senda convergiría a un punto estacionario en el sistema alcanzaría una ratio constante $\hat{k}$ y un valor óptimo n^h que podría ser nulo o no dependiendo de si antes se entró en zona de acumulación de capital humano; a lo largo de esta senda el consumo crecería, al acumularse el capital físico a una tasa positiva, pero al llegar al punto estacionario dejaría de hacerlo, creciento los dos stocks de capital y el consumo a

[145] Tal bloque es la ecuación de igualdad entre ahorro e inversión ex ante. Si los dos consumos son sustitutivos brutos y las preferencias son homotéticas, es posible demostrar que la solución estacionaria para k será única; ver a este respecto Azariadis y Drazen (1990). Para un número de períodos mayor que 2, sin embargo, ni siquiera estos dos supuestos pueden garantizar una única solución del capital en términos de trabajo eficiencia para $n^h = 0$. Esta situación puede dar lugar a una mutiplicidad de ratios k con acumulación nula de capital humano, con la consiguiente indeterminacion global. Por este tipo de dificultades el marco para el estudio de trampas de pobreza suele ser el de T=2.

la misma tasa, que puede ser nula o positiva dependiendo de si el estado estacionario corresponde a una trampa de pobreza. La anterior expresión relativa a la relación entre el inverso de la tasa de preferencia intertemporal y la tasa de retorno evaluada en el estado estacionario excluiría que dicha senda pueda llegar a constituir un equilibrio general.

Hay que subrayar que la imposición de la condición anterior en modelos en los que se verifica la unicidad del estado estacionario implica pasar de un estado estacionario esquina a otro interior, pero en otros en los que existen varios estados estacionarios -uno de los cuales sea esquina[146]- puede conducir simplemente a eliminar alguna de las soluciones, mientras que las otras se mantendrían; en el caso de dos posibles estados estacionarios, si el otro presenta las condiciones de estabilidad local apropiadas la condición (4.113) será equivalente a dotar al modelo de determinación global.

Un caso especial lo constituye aquel en que la tasa de depreciación del capital humano es unitaria. En este caso la existencia de acumulación está supeditada a que la tasa de crecimiento bruta, Bn_s^h , sea mayor o menor que 1. Una vez alcanzada la senda estacionaria y siendo $n_s^h = n^h$, pueden encontrarse dos escenarios. Uno en el que la tasa bruta de acumulación estacionaria sea mayor que 1[147], caso en el que de nuevo existirá crecimiento constante a largo plazo y otro en el que sea inferior a 1, que provocará la convergencia hacia una trampa de subdesarrollo con inversión nula en capital humano, de suerte que $n^h = 0$ sería el verdadero estado estacionario. Dado n^h , una vez resuelto el sistema dinámico, depende solamente de parámetros tecnológicos (entendiendo por tales tanto los de la tecnología productiva como los de preferencias), si se excluye tal senda mediante la misma restricción utilizada antes se priva al sistema de solución a largo plazo; en consecuencia, sería necesario acompañar tal restricción de otra que asegure que $Bn^h > 1$, esto es:

$$B - \frac{1}{\beta} > \sigma \quad (4.114)$$

---

[146] Dada la forma de particularización de las cpo al equilibrio esquina, nada impide que pueda existir más de un n^h estacionario.

[147] A su vez dentro de este caso, cuando T=2 y las preferencias son logarítmicas, el tiempo de aprendizaje es una constante, por lo que la condición anterior puede reducirse a una condición paramétrica que relaciona la productividad de la tecnología educativa y la tasa de ahorro. En el capítulo 6 se estudia un ejemplo de esta configuración.

La emergencia de trampas de pobreza no tiene por qué reducirse a una función de producción como la anterior con capital físico. Piénsese por ejemplo en una tecnología AK en el sector productor del bien final, tal que $Y_s = Aa_s^h n_s^h$. En un entorno de generaciones solapadas de 2 períodos, la tasa de retorno del capital humano adoptaría la forma:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T=2} = B \quad (4.115)$$

La tasa de retorno se haría por tanto constante para cualquier punto de una senda de equilibrio, independientemente de si esta es estacionaria o no. Cuando la utilidad es logarítmica (tomemos este caso para simplificar la expresión final) hay que tener en cuenta que en s+1 tanto la renta salarial[148] como la de los bonos implican un mismo rendimiento del ahorro generado en s. Para verlo, hay que tener en cuenta dos aspectos. Primero, la restricción presupuestaria de los adultos puede reescribirse en función de la renta total beckeriana como:

$$C_s^s + b_{s+1} + Aa_s^h n_s^h = Aa_s^h \quad (4.116)$$

Se evidencia a través de esta formulación que tanto la adquisición de una posición en bonos como la materialización del coste de oportunidad que implica el tiempo de aprendizaje constituyen usos del ahorro, frente a una renta total dada por la consagración de todo el tiempo del período al trabajo. Además, dado que el modelo es de agentes representativos es claro en equilibrio la posición en bonos debe ser nula. Dicho esto, el pay-off de la inversion en capital humano para una solución interior de la misma (una vez excluida la solución esquina por la condición paramétrica anterior) vendriá dado por $A\left(a_{s+1}^h - a_s^h\right) = ABa_s^h n_s^h$, viniendo medido dicho pago en términos de la renta total. Para determinar la tasa de retorno media, se divide dicho pago por el coste de la inversión, esto es, $Aa_s^h n_s^h$, obteniendo B, esto es, una tasa media igual a la tasa marginal, como sucedía también en el caso de los bonos. Dado, como puede obtenerse a partir de las cpo, que la tasa de ahorro -canalizada íntegramente hacia la inversión en capital humano- es igual a $(\beta / 1+\beta)$, sin más que sustituir en el valor del ahorro obtenido en la restricción presupuestaria se obtiene que el único valor de equilibrio no nulo del tiempo de aprendizaje es constante, tal que:

$$n^h = \frac{\beta}{1+\beta} \quad (4.117)$$

---

148 Con una función AK en capital humano la estructura formal de un modelo de hogar representativo+empresa representativa y de otro con agente representativo consumidor y productor sería idéntica, al ser constante la productividad marginal del trabajo efectivo.

De este modo, el modelo carece de dinámica de transición, tal como sucede con la AK dependiente exclusivamente del capital físico y se sitúa desde el primer momento sobre la senda estacionaria. Se pone de manifiesto así la existencia de un estado estacionario que conlleva una solución interior para la inversión en capital humano, al excluir la posibilidad de la constancia en niveles del sistema. Teniendo en cuenta las características de la mencionada tecnología, dos soluciones serán posibles. Primero, que no se verifique la condición identificada antes para excluir trampas de pobreza, esto es, $(1/\beta)>B$. En tal caso, desde el período inicial la inversión en capital humano será nula, destinándose todo el ahorro generado en el primer período de vida a la adquisición de bonos. Segundo, si se verifica la condición, también desde el primer período y a consecuencia de la falta de dinámica de transición el tiempo de aprendizaje tomará su valor estacionario y el capital humano se acumulará a una tasa constante. La diferencia con la tecnología con capital físico radica, a la luz de estas consideraciones, en la velocidad de convergencia a la trampa de pobreza, así como en la garantía de existencia de una solución interior.

Hasta el momento el análisis de la tasa para T períodos se ha circunscrito a un entorno de agente representativo, aunque la misma expresión puede derivarse cuando existen generaciones solapadas y los padres incorporan totalmente en sus preferencias las de sus hijos, mediante una función de utilidad del tipo:

$V_{s-1}=u\left(C_s^{s-1}\right)+\beta V_s$ (4.118)

Los hijos, normalizados a 1 por hogar, son generados en el segundo y último período de vida, durante el que se produce la coexistencia entre ambas generaciones. Supongamos por un momento un entorno de equilibrio general con agente y empresa representativa en el que no existe ningún otro activo aparte del capital humano -podrían introducirse y no desvirtuarían el argumento aquí expuesto, pero serían puramente accesorios-. Puede establecerse que, en todo período, $C_s^{s-1}=C\left(a_s^h\right)$. Por otro lado, la tecnología de acumulación de capital humano permite establecer que para lograr una posición de a_{s+1}^h unidades del activo en el período siguiente, será necesario un sacrificio de $e_s a_s^h n_s^h$ unidades del numerario en s, sin que pueda delimitarse un precio unitario constante por unidad de capital humano producido (sobre esta cuestión se volverá más adelante). Por tanto, la función de utilidad a optimizar puede expresarse en función de la variable estado como:

$$V_s\left(a_s^h\right)=Max_{a_{s+1}^h}\left[u\left(e_s a_s^h-e_s a_s^h n_s^h\right)+\beta V_{s+1}\left(a_{s+1}^h\right)\right]$$
$$s.a: a_{s+1}^h=a_s^h\left[1+Bn_s^h\right] \quad (4.119)$$

La cpo respecto a la posición futura en capital humano establece:

$$\frac{e_s}{B}u_s{'}=\beta V_{s+1}{'} \text{ (4.120)}$$

El primer miembro queda efectado por el coste marginal, en unidades del numerario, de producir 1 unidad adicional de capital humano en s+1. Aplicando el teorema de Benveniste y Scheinkman, se tendrá:

$$V_s{'}\left(a_s^h\right)=u_s{'}e_s\left(1-n_s^h\right)+u_s{'}\frac{e_s}{B}\left(1+Bn_s^h\right) \text{ (4.121)}$$

Donde los dos sumandos del miembro derecho reflejan, en primer lugar, el impacto total en la renta total de una unidad adicional de capital humano y, en segundo, el efecto indirecto, dado por los menores costes de producción para alcanzar una determinada posición del activo en s+1, tanto a consecuencia de la tasa de depreciación nula como de la contribución del capital adicional a la producción. Actualizando un período y sustituyendo, se tiene la igualdad habitual entre la RMS intertemporal -en este caso, de diferentes cohortes- y la tasa de retorno completa del capital humano derivada para T períodos, esto es, con dos términos de ganancias de capital. **En consecuencia, tanto la estructura de las preferencias como el timing de las transmisiones de capital humano entre generaciones son claves para obtener una configuración determinada de la tasa de retorno, incluso si el horizonte vital de cada generación no excede 2 períodos.**

Tasas de retorno del input x. Comenzando con la tasa en un horizonte de 2 períodos, esta adoptará la siguiente expresión:

$$\left.rr_{s,s+1}^{h,x}\right|_{ge}^{T=2}=AB(1-\alpha)\gamma\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)K_{s+1}^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\alpha}\left[1+B\left(x_s^h\right)^{\gamma}\right]^{-\alpha}\left(x_s^h\right)^{\gamma-1} \text{ (4.122)}$$

Aunque menos obvio que en equilibrio parcial, puede comprobarse que la pendiente de la curva que relaciona la tasa con el input de mercado x es negativa y por tanto sigue verificándose una relación negativa entre tipo de interés de mercado y acumulación de capital humano. En efecto:

$$\frac{d\left.rr_{s,s+1}^{h,x}\right|_{ge}^{T=2}}{dx_s^h}=\Phi\left(a_s^h\right)^{1-\alpha}(\gamma-1)\left(x_s^h\right)^{\gamma-2}\left[1+B\left(x_s^h\right)^{\gamma}\right]^{-\alpha}\left\{1-\alpha\frac{B\left(x_s^h\right)^{\gamma}}{\left[1+B\left(x_s^h\right)^{\gamma}\right]}\right\}<0 \text{ (4.123)}$$

$$\Phi=ABK_{s+1}^{\alpha}\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)\gamma(1-\alpha)>0;\ 0<\gamma<1 \text{ (4.124)}$$

$$\frac{d\left.rr_{s,s+1}^{h,x}\right|_{ge}^{T=2}}{dx_s^h}=\Phi\left(a_s^h\right)^{1-\alpha}(-\alpha)\left[1+Bx_s^h\right]B<0;\ \gamma=1 \text{ (4.125)}$$

Es destacable que, incluso con rendimientos constantes en x, la tasa de retorno continúa dependiendo negativamente de x, a causa de la introducción de la productividad marginal del trabajo efectivo en s+1. La única forma de eliminar la sensiblidad de la tasa de retorno respecto a x sería suponer, junto a los rendimientos constantes en x, una función AK, solo que en trabajo efectivo en lugar de capital físico, lo que se traduce en la restricción $\alpha = 0$.

Tal como sucedía en equilibrio parcial, la tasa depende del stock de capital humano acumulado hasta el período s y el signo de la derivada parcial de la tasa respecto al mismo sigue siendo positivo, aunque ahora dicho signo es la combinación de dos efectos: el ya reflejado en la tasa de retorno de equilibrio parcial, a consecuencia de la productividad marginal cruzada positiva de capital humano y tiempo de aprendizaje en la función de inversión bruta en capital humano, así como uno que minora el anterior, derivado de la productividad marginal decreciente del factor trabajo. También es patente que este efecto escala en la tasa de retorno no es evitable reconvirtiendo la misma en una tasa por unidad de capital humano, ya que en cualquier caso este seguiría multiplicando aquella, aunque ahora con un exponente unitario. La tasa, por lo demás, dependerá positivamente de las productividades multifactoriales de las dos tecnologías, ya que ambas impulsarán al alza la productividad del input x y la productividad marginal del trabajo en s+1[149]. Un shock de oferta que se manifestara a través de cualquiera de estas tasas, por tanto, elevaría la tasa de retorno de este activo frente a los restantes. En cualquier caso hay que observar también que la productividad marginal del capital físico también se vería afectada del mismo modo por el parámetro A, por lo que solamente un shock específico a la tecnología de aprendizaje lograría romper temporalmente la igualdad entre ambas tasas de retorno.

Más allá de la formulación de la tasa de retorno, el problema que plantea la utilización del input x en equilibrio general es la dinámica del modelo cuando los rendimientos del capital humano son constantes y el número de períodos, mayor que 2. La razón es que, bajo esta configuración, el sistema carece de un estado estacionario operativo. Restringiendo las sendas estacionarias deseadas a aquellas que presentan un valor constante de x y, por tanto, una tasa de acumulación constante del capital humano, así como del resto de las variables en ausencia de crecimiento de la población (y en particular el valor sombra de la riqueza), la primera consecuencia es que en este entorno la productividad marginal del capital físico sería constante. Si la inversión neta se anula a lo largo de la senda

[149] La derivada parcial respecto a B difiere, sin embargo, de la que presenta la tasa en equilibrio parcial. Más concretamente,

$$\frac{\partial rr^{h,x}_{s,s+1}\Big|^{T=2}_{ge}}{\partial x^h_s} = A(1-\alpha)\gamma\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)K_{s+1}\left(a^h_s\right)^{1-\alpha}\left(x^h_s\right)^{\gamma-1}\left[1+B\left(x^h_s\right)^{\gamma}\right]^{-\alpha}\left\{1+\left[1+B\left(x^h_s\right)^{\gamma}\right]^{-1}B\left(x^h_s\right)^{\gamma}\right\}>0$$

estacionaria, la ecuación de vaciado del mercado de bienes sería la siguiente, dividiendo ambos miembros por K_s :

$$\frac{C_s + x_s^h}{K_s} = A\left(k\right)^{\alpha-1}\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha} \quad (4.126)$$

El segundo miembro sería constante, por igualarse a la productividad marginal del capital físico, lo que significa que el primero debería de serlo también. Cuando el input x no interviene en la dinámica de acumulación del capital humano, esta ecuación desemboca en el conocido resultado de Lucas sobre la constancia de C/K a lo largo de la senda estacionaria (aunque con un valor estacionario del tiempo de trabajo, en lugar de exógeno). Sin embargo, al introducir x y determinar su constancia en estado estacionario, si el denominador crece a la tasa de acumulación esto significa que C/K debería crecer a la misma tasa de acumulación, ya que x/K decrecería a la misma velocidad (siendo ambas tasas ponderadas por los respectivos pesos sobre el capital físico en el período anterior). Si bien la condición de transversalidad exigiría que la tasa de crecimiento del capital humano estuviese acotada por la tasa de descuento, dicha condición podría ser insuficiente para acotar la utilidad intertemporal del hogar representativo, ya que el nivel consumo crecería por encima de dicha tasa de acumulación. Por otro lado, el tratamiento de la dinámica del modelo a través de la representación convencional espacio estado, una de cuyas endógenas en la versión de Lucas es C/K, se haría imposible, al no presentar esta última un valor estacionario. Si, por el contrario, x creciera a la misma tasa que el capital físico, la tasa de acumulación del capital humano no se encontraría acotada y se quebraría la condición de transversalidad.

En la práctica, la variabilidad del input x se suele limitar a modelos de 2 períodos en los que puede obtenerse con más facilidad una solución cerrada y además un crecimiento continuo del input en estado estacionario no plantea problemas con la condición de transversalidad (ya que esta se cumple automáticamente en tiempo finito, al anularse el valor sombra del capital humano en el último périodo). Aparte del problema de la longitud del horizonte, dos vías son las elegidas normalmente para el tratamiento de la modelización con este input. Ambas tienen como denominador común la utilización de preferencias logarítmicas, que permiten obtener soluciones cerradas para las demandas de inputs del capital humano, bien debido a la constancia de la tasa de ahorro sobre la renta disponible o a otras características del modelo, como la secuencia en la toma de decisiones. Además puede considerarse una tercera más conceptual, que no pasa por la utilización de unas preferencias particulares.

La primera de estas alternativas pasa por considerar tecnologías de producción del bien final en las que el trabajo es el único factor productivo; Glomm y Ravikumar (1992) es un buen ejemplo que se analiza en el capítulo 5. En este caso, la combinación de las preferencias logarítmicas y la recursividad de las decisiones sobre variables en el segundo período permiten que el tiempo de aprendizaje en el primer período sea constante y que la demanda de gasto educativo en el segundo se ancle al nivel de capital humano; efectuando las oportunas sustituciones en la ecuación de acumuación, es posible obtener una ecuación en diferencias sin término constante del stock de capital humano, siendo esta función dinámica cóncava, lineal o convexa en función de la suma de las elasticidades de los diferentes inputs (a pesar de ser cóncava respecto a cada uno de ellos).

Veamos un ejemplo de este enfoque en un entorno algo distinto del de Glomm y Ravikumar en un modelo que parte de unas preferencias altruistas similares a las analizadas antes cuando el input variable era el tiempo. Esto es, durante el segundo tiempo de la vida de los individuos se produce un gasto educativo en la nueva generación, siendo la función de utilidad:

$$U = \ln C_s^{s-1} + \psi \ln a_{s+1}^h \quad (4.127)$$

Siendo el segundo de sus argumentos el capital humano de la siguiente generación. La función de producción es lineal con constante unitaria en el capital humano, por lo que la renta salarial en todo período, suponiendo que el tiempo de trabajo consume íntegramente la dotación de tiempo, se iguala a la posición en el capital humano. Veremos en primer lugar que el modelo, con una tecnología de acumulación de rendimientos constantes en el capital humano como la especificada en este apartado y con tasa de depreciación unitaria[150], puede generar una dinámica tratable en determinadas condiciones. La cpo respecto al gasto educativo será[151]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_s^h} = \frac{1}{C_s^{s-1}} + \frac{\psi B a_s^h}{a_{s+1}^h} \leq 0 \quad (4.128)$$

Suponiendo una solución interior y desarrollando la ecuación, se tiene:

$$\frac{1}{a_s^h - x_s^h} = \frac{\psi}{x_s^h} \Rightarrow x_s^h = \frac{\psi}{1+\psi} a_s^h \quad (4.129)$$

---

[150]La tasa de depreciación unitaria es un requisito para obtener una solución cerrada para el estado estacionario en este caso.

[151] Puede comprobarse que la convexidad introducida es compatible con el teorema de Arrow y por lo tanto la solución de Kuhn-Tucker satisface las condición suficiente de óptimo.

Denominando $\Phi \equiv \psi / (1+\psi)$ y sustiyendo en la ecuación de acumulación y $\Theta \equiv B(\Phi)^{\gamma}$, se llega a la siguiente expresión:

$$a_{s+1}^{h} = \left(a_{s}^{h}\right)^{1+\gamma} \Theta \quad (4.130)$$

Por tanto la relación dinámica entre los stock de capital es convexa. En este caso particular el estado estacionario se caracterizará por dos posibles valores constantes para el stock de capital humano. Una primera solución trivial será 0 y la segunda, un valor positivo, siendo la primera estable y la segunda inestable a consecuencia de la convexidad de la relación dinámica:

$$a^{h} = \begin{cases} 0 \\ \left(\dfrac{1}{\Theta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{cases} \quad (4.131)$$

En cualquiera de los dos equilibrios estacionarios el volumen de input demandado estará acotado, siendo nulo en el primero y positivo en el segundo. Sin embargo, si el sistema se sitúa a la derecha del segundo equilibrio estacionario, al ser este inestable, el stock crecerá sin cota, por lo que asintóticamente la cantidad demandada del gasto en educación tenderá a infinito, en consistencia con una renta salarial que también se hace no acotada. Dado que el consumo del segundo período también constituiría una fracción constante de la renta disponible por período, este también se haría infinito en tales circunstancias. Desde el punto de vista del objeto de este capítulo, sin embargo y como se ya se discutió al tratar la acumulación con el input tiempo como variable, es que no da lugar a una tasa de retorno en sentido estricto financiero, por lo que no se profundizará más en esta línea de modelización[152].

El segundo enfoque posible, más congruente con la línea modelizadora utilizada en este capítulo, se basa en una función de producción del bien final cóncava en sus dos argumentos, trabajo efectivo y capital físico. El supuesto de tasa de depreciación unitaria en

---

152 El resultado obtenido con rendimientos constantes del capital humano en cuanto a la relación entre x y el activo es extensible a una tecnología de acumulación con rendimientos decrecientes en este último input. En tal caso, puede demostrarse que si $1-\varepsilon$ es la elasticidad del capital humano en la función h, de nuevo resultan dos posibles estados estacionarios, estableciéndose una relación dinámica entre posiciones consecutivas en capital humano del tipo $a_{s+1}^{h} = \Theta\left(a_{s}^{h}\right)^{1+\gamma-\varepsilon}$, que será cóncava si $\gamma < \varepsilon$. Si se verifica tal concavidad, de los dos equilibrios estacionarios que se siguen encontrando el positivo será estable, mientras que el esquina será inestable en esta ocasión.

ambos activos permite anclar la demanda de x a la posición deseada en el capital físico mediante una relación proporcional y, junto con las preferencias logarítmicas, derivar una ratio de capitales constante en estado estacionario, pudiéndose obtener crecimiento continuado o converger hacia una trampa de pobreza; en el primer caso x crecerá continuamente y en el segundo decrecerá hasta hacerse nulo. Los resultados de esta segunda estrategia se optimizan en términos de una solución cerrada cuando los rendimientos del capital humano son decrecientes en ambas tecnologías, razón por la que se analizará con mayor detalle en el apartado sobre tasas de retorno derivadas con rendimientos decrecientes del capital humano.

Una tercera posibilidad es explotar las posibles vías de equivalencia entre el input de mercado y el tiempo de aprendizaje. En efecto, si el gasto educativo se canaliza, en lugar de hacia la adquisición de bien final, al pago a profesores que son retribuidos a salario de mercado por unidad de tiempo contratada, el precio unitario del input coincidirá con el coste de oportunidad del tiempo de aprendizaje (supuesto que se trate de un modelo de agente homogéneo, en el que la posición en capital humano sea común a todos los hogares). La restricción presupuestaria en este marco, simplificando la cartera de activos a capital humano y suponiendo la jornada laboral exógenamente fijada en la dotación normalizada de tiempo, sería la siguiente:

$$C_s \leq e_s a_s^h \left(\overline{n}_s^w - x_s^h\right);\; x_s^h \leq \left(1-\overline{n}_s^w\right) \quad (4.132)$$

La última restricción se hace necesaria por coherencia conceptual, ya que los servicios proporcionados por el input profesorado deberían ejercerse solamente durante el tiempo destinado al aprendizaje, habida cuenta que por el momento se trata solamente de una acumulación de capital humano vía schooling y no OJT. Teniendo en cuenta la homogeneidad de agentes y dado que cada uno de los individuos profesores estarían también sometidos a una restricción de asignación del tiempo por período, podría contratarse cualquier combinación de los servicios procedentes de diferentes individuos, habida cuenta que estos son plenamente homogéneos. Por lo que respecta a los profesores, estos podrían ofrecer sus servicios libremente tanto en el sector productor del bien de consumo como en el educativo, lo que implicaría que los salarios reales percibidos en uno y otro cometido se igualarían en equilibrio. En estas condiciones, la tasa de retorno respecto al input x presentaría la misma forma que la derivada respecto al tiempo y además la dinámica del modelo permitiría obtener un valor estacionario de la misma.

El punto más débil de esta argumentación, que constituye quizá la razón por la que esta aproximación no ha tenido éxito en a literatura, es que exige una modelización explícita del segmento de los profesores y en concreto de las razones por las que estos individuos, con el mismo capital humano que los demás agentes, se escogen como input productivo en la acumulación de capacidades por los agentes ordinarios. Podría pensarse en una dotación exógena de capacidad de transmisión de conocimientos que sólo algunos individuos tienen en el momento de su nacimiento, pero en ese caso no parece lógico que tal capacidad no pueda ser objeto de alguna prima de remuneración durante el tiempo de trabajo de mercado. En las próximas páginas no se ahondará por tanto en este enfoque, si bien en el capítulo 6 se utilizará una modelización explicita del sector educativo que permite explotar algunas de las ventajas del input tiempo en el tratamiento del input de mercado.

Resumiendo los resultados derivados hasta el momento y comparándolos con los del artículo de Gary Becker de 1962, podríamos perfilar algunas conclusiones. Comencemos por las semejanzas, para después intentar explicar las razones de las diferencias. En primer lugar, en todas las versiones de las tasas de retorno obtenidas aparece la renta marginal del activo (en este contexto, incremento salarial debido a la acumulación de capital humano) como primer componente, ponderado por las correspondientes horas de trabajo en el período en que se deriva esta renta -cuando el tiempo de trabajo no es inelástico-. En cuanto al precio de adquisición del activo, en la tasa beckeriana se incluían costes directos y costes indirectos, viniendo dados estos últimos por el coste de oportunidad del tiempo empleado en aprendizaje. En la tasa derivada por el procedimiento de optimización aparece el coste de producción del activo, aunque dado que cada tasa de retorno marginal asume la producción de 1 unidad adicional de capital humano a partir de un solo input variable, se recoge solamente el coste resultante de la aplicación individual de cada uno de estos inputs. Volveremos sobre este punto en el último apartado del ensayo, así como sobre la posibilidad de unificar las dos tasas en una única bajo determinadas condiciones.

La principal diferencia, sin embargo, procede de la consideración en las tasas de retorno de un (o dos, según que la tasa de depreciación del capital humano sea o no nula) término(s) adicional(es) representativos de las ganancias del capital del activo, pero que no aparecen en el trabajo de Becker. La razón es la diferente dimensión temporal del artículo de Becker: este considera en esencia un caso simple de dos períodos, mientras que la resolución del problema de optimización se está realizando para un número genérico de T períodos de vida. En realidad ambos supuestos son perfectamente compatibles: cuando en el sistema de cpo se hace T=2, entonces el valor sombra del capital humano en T=1 se anula y el segundo y tercer sumando de la tasa de retorno, que aparecen multiplicados por μ_{s+1} , desaparecen. Por tanto, las tasas de retorno en este caso concreto coinciden con las de Becker. Este es también el enfoque de la inmensa mayoría de las tasas de retorno definidas para su utilización en trabajos empíricos, en los cuales se soslayan posibles ganancias de capital en períodos anteriores a T-1; un ejemplo muy característico puede observarse en la producción de la propia OCDE; véase Heath (2001).

Merece la pena mencionar un caso muy específico con un número de períodos superior a 2 en el cual las tasas de retorno que acaban de calcularse convergirían hacia las desarrolladas por Becker. En el primero de ellos, la presencia del capital humano en la inversión bruta en tal activo se debe exclusivamente a efectos externos inducidos por el nivel "medio" del activo en el período, frente al que los agentes reaccionan de forma miope: esto es, en el equilibrio descentralizado competitivo anticipan correctamente dicho valor medio, pero se comportan respecto a él como si fuera una variable exógena. Este supuesto debe acompañarse por el de una tasa de depreciación unitaria del capital humano. La consecuencia más inmediata es que en el problema de optimización los hogares no internalizarán los efectos de la acumulación sobre la producción futura y de ahí que la tasa de retorno pierda dos de sus sumandos. En concreto la cpo del capital humano se reescribiría como sigue:

$$-\beta^s \mu_s + \beta^{s+1}\left\{\lambda_{s+1} e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)\right\} \leq 0 \quad (4.133)$$

Desarrollando y combinando las cpo se obtiene:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big| = \frac{e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)}{\left(e_s a_s^h / h_{n,s}\right)} \quad (4.134)$$

Una segunda posibilidad surgiría en un modelo de generaciones sucesivas, en el que los agentes vivieran durante un período, durante el cual trabajaran haciendo uso del capital humano legado por sus padres. Al final del primer período, tienen un único descendiente y antes de finalizar el mismo se realiza su proceso educativo, en el que influye tanto el capital humano disfrutado por los padres como tiempo invertido en la formación de la siguiente generación. En el instante final del período el capital humano del padre se destruye, pero antes ha contribuido a la acumulación de la siguiente generación. Las preferencias dependen tanto del consumo propio como del consumo de generación inmediata, sin que establezca una cadena dinástica en sentido estricto (se trataría, por tanto, de preferencias con altruismo intergeneracional limitado). Esto es, la utilidad y restricción presupuestaria que caracterizarían esta estructura serían las siguientes:

$$U = \ln C_s + \beta \ln C_{s+1} \quad (4.135)$$

$$C_s + K_{s+1} \leq e_s a_s^h \left(1-n_s^h\right) \quad (4.136)$$

$$a_{s+1}^h = a_s^h B n_s^h \quad (4.137)$$

$$K_{s+1} = i_s^K \quad (4.138)$$

En estas condiciones, la renta de la inversión en capital humano vendría dada, de una manera análoga al ejemplo visto algunas páginas atrás, por la utilidad marginal para el padre de un mayor consumo futuro de su hijo. Sin embargo, a pesar de que la tasa de depreciación aparente del capital humano es unitaria, este pasa a la siguiente generación antes de destruirse, por lo que podrían generarse ganancias de capital al intervenir dicho stock legado en la educación de las futuras generaciones. Sin embargo, el carácter limitado del altruismo hace imposible esta cadena de transmisión, convirtiendo la situación en un caso equivalente al de una vida durante dos períodos, toda vez que el valor sombra del capital humano en el segundo de ellos se anularía para el padre, incluso aunque sus hijos efectuaran ulteriores inversiones en el activo en el período siguiente. En definitiva, la tasa de retorno se vería reducida a:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2} = \frac{e_{s+1}}{e_s}\left(1-n_{s+1}^{h}\right)B \quad (4.139)$$

La principal diferencia que se plantea con el ejemplo anterior resuelto en las ecuaciones ( ) es que el consumo futuro del individuo entraba en las preferencias de aquel, solapándose en el tiempo con el de los hijos y acarreando la necesidad de utilizar dos multiplicadores de Lagrange diferentes (o, equivalentemente, el multiplicador λ habitual para las restricciones presupuestarias del padre en sus 2 períodos de vida, más la sustitución del consumo de los hijos en la función de utilidad de los padres). En este último caso, la longitud de un período de vida posibilita la sustitución completa del consumo futuro de los padres por el de los hijos, permitiendo así la utilización del mismo multiplicador de Lagrange para ambas restricciones presupuestarias en períodos consecutivos.

Sería posible llegar a concebir más situaciones alterando los supuestos básicos utilizados hasta ahora en cuanto al timing de las decisiones de producción del bien final, capital humano o el momento de la depreciación dentro del período, aunque en general todas ellas suponen desviaciones sustanciales de la estructura de modelización utilizada por la mayor parte de la literatura. En cualquier caso hay que precisar que la visión beckeriana de la tasa de retorno del capital humano no evoluciona en el tiempo más allá del artículo de 1962 y así al plantear el modelo de dinámico en T períodos junto con Ghez en 1975, el autor reformula los condicionantes básicos de las decisiones de acumulación en términos de beneficios y costes marginales, como se describió en el capítulo 2, sin reconvertir las tasas de retorno concebidas para 2 períodos.

Epílogo: ¿una verdadera tasa de retorno de equilibrio general? Centrándonos en la tasa de retorno del tiempo, input que proporciona una dinámica de transición tratable analíticamente cuando los rendimientos del capital humano son constantes, aquella depende en equilibrio general de un conjunto de variables además del propio input utilizado en la producción de capital humano, ligeramente distintas en cada caso, pero en cualquiera de ellos endógenas en equilibrio general (a saber, capital físico y tiempo de aprendizaje de períodos posteriores). Cabría preguntarse hasta qué punto la tasa, formulada de esta manera, contiene en sí misma información relevante o por el contrario es necesario leerla en combinación con las restantes condiciones de primer orden para dotarla de un significado económico. Dicho de otro modo, ¿sería posible utilizar las restantes condiciones de primer orden que definen la solución al sistema en equilibrio general para expresar la tasa únicamente en función del input del capital humano en s y los parámetros del modelo?

La presentación de la solución de un sistema de equilibrio general dinámico habitualmente puede hacerse fundamentalmente de dos maneras. La primera, a través del conjunto de condiciones de primer orden, vía útil en el sentido de que facilita la interpretación económica de la solución óptima. La segunda, en forma espacio-estado, reordenando las condiciones de primer orden de manera que pueda derivarse un vector de variables -de estado y de control- relacionadas con los valores retardados de las mismas y que marcan la senda dinámica de ajuste hacia el o los estados estacionarios del modelo. Esta segunda forma permite medir los impactos de cada una de las endógenas retardadas sobre el vector de las mismas en períodos posteriores, así como efectuar análogos ejercicios con el conjunto de parámetros que describen las tecnologías.

El modelo utilizado en este capítulo con dos clases de capital no es una excepción. Como se abordó en el capítulo 2, cada variante del modelo canónico de Uzawa-Lucas admite una formulación espacio-estado diferente. Por ejemplo, el caso en el que los rendimientos del capital humano en la tecnología educativa son constantes y $\gamma = 1$, siendo el tiempo de aprendizaje el único input variable del capital humano, es posible reexpresar el conjunto de condiciones de primer orden en función de 3 relaciones dinámicas de endógenas con sus valores retardados, siendo dichas endógenas la ratio consumo/capital físico, la ratio capital físico/capital humano y el tiempo de trabajo (o el de aprendizaje, aunque en este último caso con pequeños cambios en la matriz de coeficientes dinámicos). Ahora bien, hay que insistir en el carácter alternativo de esta formulación: para disponer el modelo en forma espacio-estado, hay que log-linearizar las condiciones de primer orden y reordenarlas. Por tanto, no pueden volver a reutilizarse las relaciones dinámicas resultantes en la tasa de retorno, porque esta, junto con las condiciones de primer orden, está ya implícita en los coeficientes de la ecuación dinámica.

Podemos ilustrar esta idea con el ejemplo que acabamos de comentar. El sistema, bajo tales supuestos, puede escribirse en forma de espacio-estado a través de 3 ecuaciones dinámicas como las siguientes:

$$\psi_{s+1} \equiv \left(\frac{C_{s+1}}{K_{s+1}} \right) = \kappa_1 \left(\psi_s , \hat{k}_{s,} 1 - n_s^h \right) \ (4.140)$$

$$\hat{k}_{s+1} \equiv \left(\frac{K_{s+1}}{a_{s+1}^h} \right) = \kappa_2 \left(\psi_s , \hat{k}_{s,} 1 - n_s^h \right) \ (4.141)$$

$$1 - n_{s+1}^h = \kappa_3 \left(\psi_s , \hat{k}_{s,} 1 - n_s^h \right) \ (4.142)$$

Sería posible reducir la expresión de la tasa de retorno del tiempo a un conjunto de parámetros y estas variables, teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{K_{s+1}}{K_s} \right)^{\alpha} = \left(\frac{\hat{k}_{s+1}}{\hat{k}_s} \right)^{\alpha} \Gamma^{\alpha}; \ \Gamma = \frac{a_{s+1}^h}{a_s^h} \ (4.143)$$

$$rr_{s,s+1}^{h,n} \Big|_{ge}^{T>2} = \left(\frac{\hat{k}_{s+1}}{\hat{k}_s} \right)^{\alpha} \left(\frac{1 - n_{s+1}^h}{1 - n_s^h} \right)^{-\alpha} \left(1 + B \right) \ (4.144)$$

Podría pensarse en que, si se quiere calcular el impacto de una variación de B sobre la tasa, este va más allá del directo, ya que influye también sobre k_{s+1} y n_{s+1}^h a través de $\kappa_2 \ y \ \kappa_3$. Sin embargo, no puede sustituirse k_{s+1} por κ_2 ni n_{s+1}^h por κ_3 y a partir de esta sustitución calcular $\frac{\partial \kappa_2}{\partial B}$ y $\frac{\partial \kappa_3}{\partial B}$, ya que ello supondría mezclar las dos formas alternativas de representación del programa dinámico de óptimización (al haberse utilizado ya la cpo para construir κ_2 y κ_3). Otro tanto sucedería si se quisiera explicitar el signo de la relación dinámica de $k_{s+1} \ y \ n_{s+1}^h$ respecto a n_s^h. **Por lo tanto, si bien es posible realizar la transformación de variables mencionada, la tasa en sí misma nunca puede combinarse con las relaciones dinámicas propias de la forma espacio-estado**. Una vez reducida a las tres variables endógenas en la forma espacio-estado del modelo, la tasa entera es endógena, por serlo también $k_{s+1} \ y \ n_{s+1}^h$, por lo que no admite ulteriores simplificaciones.

Esto significa también que solo hay dos posibles versiones de la tasa: una ex-ante, en la que depende bien de las variables en niveles del modelo, bien de las variables del sistema espacio-estado, y una a posteriori, resultante de la sustitución de los valores que toman en equilibrio general dinámico cada una de las variables endógenas consideradas, dados unos valores iniciales de las mismas. A posteriori podrán existir uno o más valores de la tasa, dependiendo de si la versión del modelo considerado da lugar a una o más soluciones para la senda de equilibrio general o del estado estacionario, respectivamente. No entraremos en esta cuestión, por no ser el objeto principal del capítulo y existir ya una literatura extensa -abordada en el capítulo 2, por lo demás- que se ocupa del análisis dinámico del sistema en función de sus características estructurales y funciones de comportamiento básicas.

En conclusión, siendo la tasa derivada una parte del sistema de ecuaciones de equilibrio general, no es posible -salvo en estado estacionario- generar una forma reducida de la misma que dependa exclusivamente de los parámetros del modelo. Esto no resta interés a la tasa como instrumento de análisis de las variables de las que depende la inversión en capital humano en equilibrio general, si bien per se no es instrumento que permita cuantificar con exactitud la magnitud de las contribuciones de los valores iniciales del sistema o los parámetros a la misma, por ser interdependiente de las restantes cpo del problema de optimización. En todo caso, todos los ejercicios de estática comparativa deben realizarse a valores constantes de las endógenas involucradas, de un modo semejante a como se acometería de si se tratara de una tasa derivada en equilibrio parcial.

IV.4. ¿Es imposible asignar un precio de mercado al capital humano?

En el análisis efectuado hasta el momento es llamativa la posibilidad de obtener dos expresiones alternativas de la tasa de retorno del capital humano, incluso aunque ambas deban igualarse al existir un único valor sombra de este activo en equilibrio. Esta propiedad es realmente atípica tanto entre los activos reales como financieros y se debe, principalmente, a la imposibilidad de asociar con carácter general un precio de mercado al capital humano, toda vez que la propiedad de este no puede ser objeto de transacción.

Este es un problema común a toda la literatura de origen beckeriano sobre consumo de commodities. En la medida en que las commodities se generan a partir de un régimen de producción doméstica y no se adquieren a través del mercado, es difícil asignar un precio unitario a las mismas, por lo que las restricciones presupuestarias de los hogares se construyen en función de los costes de producción de dichas commodities, calculados a su vez a partir de las cantidades demandadas de sus inputs y de los precios de mercado (o los costes de oportunidad, cuando se trata de fracciones de tiempo) de los mismos.

Este es el motivo por el que existe una preocupación dentro de esta literatura de commodities -Pollack y Wachter (1975) y Barnett (1977) son dos de los exponentes más claros de la misma- que estudia en qué condiciones pueden asignarse “precios implícitos” a cada unidad producida de una commodity. Dichos precios implícitos se asocian a los costes de producción unitarios de la commodity. Esto es, si el hogar consume un vector C de commodities, siendo p el vector de los precios de las mismas, el vector de precios implicítos vendría dado por los costes marginales de la producción de tales commodities. De acuerdo con esta definición, si $E(C,p)$ es la función de costes del vector de commodities, el precio implícito de producción de la commodity j vendrá dado por:

$$\pi_j(C,p)=\frac{\partial E(C,p)}{\partial C_j} \quad (4.145)$$

Según el análisis de Pollack y Wachter, en determinadas circunstancias el precio implícito de la commodity j será independiente del vector de commodities consumido, lo que posibilitará que la restricción presupuestaria se exprese de un modo más convencional, como el sumatorio de los precios implícitos de las commodities multiplicados por las cantidades producidas de las mismas. Esto es:

$$\sum_{j=1}^{M}\pi_j(p)C_j=y \quad (4.146)$$

Para que esta formulación sea factible será necesario el cumplimiento simultáneo de dos condiciones: i) Una tecnología de producción de commodities no conjunta; ii) Rendimientos constantes a escala en la producción de la commodity, en virtud de los cuales los costes de producción de una cantidad de cierta commodity se igualan a los costes de producción de una unidad multiplicados por el número de unidades producidas.

Si se cumplieran estas dos condiciones en relación con la tecnología de producción de capital humano, se abrirían nuevas posibilidades para expresar la adquisición de una posición en este activo dentro de la restricción presupuestaria. Veamos sin embargo que esto no es posible. Supongamos que se mantiene el supuesto anterior de tecnología lineal de producción de la commodity C y asumamos, por el momento, el cumplimiento de las condiciones de Pollack-Wachter para la producción de capital humano, denominando π^h a su precio implícito relativo en unidades del bien compuesto, dados los precios de los inputs, frente al que el hogar representativo actúa paramétricamente. Si bien es cierto que este caso se separa del trabajo de Pollack y Wachter en el hecho de que el capital humano es una commodity que no se consume, las proposiciones aplicables a la constancia del precio por unidad adquirida de la commodity son igualmente aplicables, al hacer referencia solamente a la tecnología de producción y no al papel que juega la commodity dentro de las preferencias.

Así pues, la restricción presupuestaria flujo podría reescribirse como[153]:

$$C_s + b_{s+1} + \pi_s i_s^h \leq (1 + r_{s-1}) b_s + e_s a_s^h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_s + b_{s+1} + \pi_s a_{s+1}^h \leq (1 + r_{s-1}) b_s + \pi_s (1 - \delta) a_s^h + e_s a_s^h \quad (4.147)$$

Esto es, la principal diferencia con la anterior versión de la restricción sería que ahora, en lugar de explicitarse el coste de los inputs que intervienen en la producción de capital humano, se valoraría directamente en unidades del bien compuesto (a través del precio relativo implícito) la producción de capital humano del período (o lo que es lo mismo, se convierte en unidades del numerario su inversión bruta). En una segunda fase, sustituyendo la inversión bruta a través de la ecuación de acumulación del capital humano, se restablece la simetría en el tratamiento del activo financiero y del activo real, incluyendo la adquisición de posiciones en ambos en el lado de los empleos de la restricción y haciendo constar sus rentas, así como su valor no depreciado, en el lado de los recursos. Hay que anotar además que la renta del trabajo que se incluye es la máxima alcanzable si se dedicara todo el tiempo a la producción de bien compuesto -se utiliza pues el concepto de renta total beckeriana-, mientras que las detracciones de la misma en forma de tiempo destinado al aprendizaje se encontrarían implícitas en el precio relativo del activo.

Conviene aclarar que, como es evidente desde el principio del capítulo, el marco de análisis se circunscribe a una sociedad libre en la que no existe esclavitud. Por tanto el hecho de que el capital humano, valorado a su precio imputado, forme parte tanto de los empleos como de los recursos de la restricción presupuestaria no significa que se realice transacción alguna con él que entrañe una transferencia en la propiedad del activo. Mientras en el lado de los empleos la ampliación de la posición denota utilización implícita de recursos en la producción doméstica, en el de los empleos tiene el sentido de ingreso imputado, o en otras palabras, un menor gasto de recursos gracias a la producción del activo en períodos anteriores. En este sentido hay una diferencia de concepto con otros activos, financieros y reales en el lado de los recursos, valorados a su precio de mercado, ya que en estos casos su presencia sí implica potencial enajenabilidad.

Así pues, el proceso de opitimización en esta versión alternativa quedaría resumido a través de la maximización de la siguiente función lagrangiana respecto a las cantidades producidas (y consumidas) de la commodity C y las posiciones en cada uno de los activos, mientras que las demandas de los inputs se resolverían aparte, en el problema de

---

[153] En este ejemplo se utiliza como activo alternativo los bonos sin pérdida de generalidad, ya que el resultado sería el mismo con capita físico o cualquier otro.

minimización de costes que está detrás de la formación de la función de costes de producción del capital humano. De esta manera, por un lado:

$$\Omega = \sum_{s=0}^{T} \beta^s \left\{ u(C_s) + \lambda_s \left[\left(1+r_{s-1}\right) b_s + \pi_s \left(1-\delta\right) a_s^h + e_s a_s^h - C_s - b_{s+1} - \pi_s a_{s+1}^h \right] \right\} \quad (4.148)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta C_s} = \beta^s \left[u'\left(C_s\right) - \lambda_s \right] \leq 0 \quad (4.149)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta b_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} \left(1+r_s\right) = 0 \quad (4.150)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta a_{s+1}^h} = -\beta^s \lambda_s \pi_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} \left[e_{s+1} + \pi_{s+1} \left(1-\delta\right) \right] \leq 0 \quad (4.151)$$

$$s = T \Rightarrow \beta^s \lambda_s \pi_s a_{s+1}^h = 0 \quad (4.152)$$

$$\left(1+r_{s-1}\right) b_s + \pi_s \left(1-\delta\right) a_s^h + e_s a_s^h \geq C_s + b_{s+1} + \pi_s a_{s+1}^h \quad (4.153)$$

Respecto a la condición de primer orden de la posición en capital humano, reordenándola se obtendría de nuevo la igualdad entre la su tasa de retorno y la de los bonos, puesto que al sustituir la condición de Euler resulta:

$$1 + r_s = \frac{e_{s+1}}{\pi_s} + \frac{\pi_{s+1}\left(1-\delta\right)}{\pi_s} = \frac{f'\left(a_{s+1}^h n_{s+1}^w\right)}{\pi_s} + \frac{\pi_{s+1}\left(1-\delta\right)}{\pi_s} \quad (4.154)$$

En esta nueva expresión de la tasa de retorno, el término relativo a la renta del activo deja de estar multiplicado por el tiempo dedicado a trabajar, dado que de nuevo los costes de oportunidad de la utilización del tiempo en empleos alternativos quedarían subsumidos en el precio implícito del activo. En cuanto a la condición de transversalidad y si el problema se formula en tiempo finito, el elemento que debería garantizar ahora que el individuo pueda morir con cantidades positivas de capital humano en una senda óptima será el precio implícito del activo, al desaparecer del conjunto de restricciones del problema la ecuación de acumulación del capital humano y, consiguientemente, el multiplicador de Lagrange de dicha restricción o precio sombra del capital humano. Si existe este precio unitario constante del activo, que depende solamente de los precios de los inputs, su valor nulo de equilibrio en el período T debería ir ligado al hecho de que en este período deja de producirse capital humano, con lo que la cantidad utilizada de ambos inputs sería nula: en la medida entonces en que esta ausencia de demanda pudiera arrastrar a los precios de los inputs a cero entonces esta condición se verificaría. Analizaremos más tarde hasta qué punto es realista este supuesto. En horizonte infinito, no obstante, esta exigencia desaparece, siendo sustituida por la habitual de que el ritmo de acumulación del capital humano no exceda la tasa de descuento intertemporal.

A este problema en términos de un activo valorable por medio de un precio implícito habría que anexar otro de minimización de costes en la producción de capital humano. Los costes a minimizar serán los costes totales de producción a lo largo del horizonte de planificación del hogar representativo, suponiendo en un caso genérico la utilización simultánea de los dos factores productivos habituales. La minimización comprenderá la suma descontada de los costes de producción a lo largo del horizonte vital, teniendo en cuenta mediante la oportuna ecuación de acumulación que las decisiones sobre utilización de inputs en cada período incidirán sobre los costes de períodos posteriores, al afectar a los costes de oportunidad del tiempo destinado al aprendizaje. En otras palabras, si bien en el problema de maximización de la utilidad se toma como dado el precio unitario de producción del capital humano, que entraña una determinada combinación de inputs, para que el problema sea eficiente y resulte equivalente a una maximización de la riqueza del individuo este problema dual asociado está dirigido a determinar dicha combinación de inputs de modo que el precio unitario del activo sea el mínimo posible.

Concretando más, se trataría de maximizar la siguiente función lagrangiana, cuyo componente de costes va afectado de signo negativo:

$$\Omega = \sum_{s=0}^{T} R_s \left[\left(-x_s^h - e_s a_s^h n_s^h \right) + \mu_s \left(h\left(x_s^h , n_s^h \right) + (1-\delta) a_s^h - a_{s+1}^h \right) \right] \text{(4.155)}$$

El factor R representaría la tasa de descuento financiera, construida a partir del tipo de interés real de los bonos. Resolviendo, obtenemos las siguientes cpo:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta x_s^h} = R_s \left[-1 + \mu_s h_{xs} \right] \leq 0 \;\; (4.156)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta n_s^h} = R_s \left[-e_s a_s^h + \mu_s h_{ns} \right] \leq 0 \;\; (4.157)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta a_{s+1}^h} = -R_s \mu_s + R_{s+1} \left[-e_{s+1} n_{s+1}^h + \mu_{s+1} (1-\delta) \right] \leq 0 \;\; (4.158)$$

$$s = T \Rightarrow R_s \mu_s a_{s+1}^h = 0 \;\; (4.159)$$

$$a_{s+1}^h = h\left(x_s^h , n_s^h \right) + (1-\delta) a_s^h \;\; (4.160)$$

Dividiendo las cpo de los dos inputs utilizados en la producción de capital humano, se obtendría la igualdad entre la relación marginal de sustitución técnica de los dos inputs y sus precios relativos; este resultado, unido a idéntica condición de transversalidad de la obtenida en el problema general y a la misma ecuación de acumulación del activo, aseguraría que las sendas de demanda de inputs que subyacen a la construcción del precio implícito del capital humano son las mismas que se derivan en el problema primal de maximización de la utilidad sin un precio imputado del capital humano que permita su inserción en la restricción presupuestaria.

Sin embargo, las cpo reproducidas más arriba dejan bien claro que la condición de Pollack-Wachter no sería aplicable, al no existir una independencia del vector de precios de los activos respecto a la senda intertemporal de producción del activo o, equivalentemente, respecto a la senda de posiciones en el activo, siendo el nexo entre ambos el coste de oportunidad del tiempo destinado al aprendizaje. Este vínculo queda perfectamente patente en la cpo del stock de capital humano, en el que el incremento marginal del coste en el período s+1 aparece como uno de los elementos básicos de la decisión de inversión en el activo (se trataría de una "renta negativa" derivada de la toma de posiciones en el activo). Así pues, incluso aunque la función de producción de capital humano h presente rendimientos constantes a escala, se produce la paradoja de que el coste total de producción no puede ser independiente de la senda de cantidades producidas. **Se trataría pues de un caso de producción conjunta no de varias commodities, sino de una misma commodity en varios períodos del tiempo debido a las interconexiones entre las decisiones de producción y la estructura de los costes. En consecuencia, no sería posible calcular un precio paramétrico que dependiera exclusivamente de los precios paramétricos de los inputs, al no existir un problema dual adecuado que sustente el primal con las características que buscamos**.

¿Qué sucedería si el bien compuesto fuese el único factor productivo de capital humano? En este caso desaparecería la conexión entre períodos a través del coste de oportunidad del tiempo de aprendizaje. De este modo el problema dual del hogar representativo podría plantearse de forma uniperiódica y secuencial, como la maximización de la siguiente función lagrangiana, a partir de la cual se derivaría la correspondiente función de costes:

$$\Omega = -x_s^h - \tau_s \left[i_s^h - h\left(x_s^h\right) \right] \quad (4.161)$$

Si h presentase rendimientos constantes a escala, sería de aplicación el teorema de Pollack-Wachter, por lo que podría derivar un precio implícito por unidad producida de capital humano independiente del número de unidades producidas o de la senda temporal de producción. Volviendo a la tasa de retorno en función de dicho precio implícito, ahora este recogería solamente los costes -expresados en unidades del bien compuesto- procedentes de la utilización de x. En concreto, dado que para producir una unidad adicional de capital humano sería necesaria una cantidad incremental de x dada por el inverso de su productividad marginal y que la tasa de conversión de x por el bien compuesto es 1, se cumpliría que:

$$\pi_s = \frac{1}{h_{xs}} \text{ (4.162)}$$

Con lo que sustituyendo en la tasa de retorno en función del precio implícito llegaríamos a la ya conocida ecuación de no arbitraje en función de los costes de producción:

$$1 + r_s = \frac{e_{s+1} n_{s+1}^w}{1/h_{xs}} + \frac{(1/h_{xs+1})(1-\delta)}{(1/h_{xs})} \text{ (4.163)}$$

Por ejemplo, suponiendo que la función de inversión bruta adoptara la forma más simple posible $i_s^h = Bx_s^h$, el precio unitario de ampliación de la posición en capital humano sería constante e igua a 1/B. Por lo tanto, tanto el primal como el dual conducen en este caso a la misma solución, con la particularidad de que se obtiene una única expresión para la tasa de retorno (al haber solo un input relevante en la producción de capital humano).

Sin embargo esta estructura de la función de inversión sería ciertamente inusual, por cuanto que implicaría una productividad marginal nula del capital humano en el proceso de acumulación (y una tasa neta de acumulación del activo decreciente respecto a la posición en el mismo). Si se utilizara una función más convencional que, aun presentando rendimientos constantes a escala en el input x, llevara incorporado el capital humano de forma multiplicativa à la Lucas, ya no sería posible derivar un precio unitario, puesto que los requerimientos de inputs para producir 1 unidad adicional del activo serían $1/Ba_s^h$, variables por tanto en función del capital humano acumulado hasta el período s.

Hay un aspecto adicional a analizar, sin embargo, respecto a la consistencia intertemporal del problema dual expresado en función de un precio unitario de producción del activo. La condición de Pollack y Wachter se refiere a commodities perecederas, pero no entra a dilucidar en qué medida es también a aplicable a activos de producción doméstica. Dado que el capital humano cumple la doble condición de commodity y activo acumulable, habría que referirse a las posibilidades de verificación de la condición de transversalidad cuando el precio asociado a la commodity es imputado y no determinado por el mercado. En efecto, se ha visto antes que el cumplimiento de esta condición exigía la anulacion del precio imputado en el período terminal, pero por reflejar este un coste unitario o marginal de producción no puede, en general, hacerse cero[154] salvo que el precio del input también se anule. Si x, como hemos venido suponiendo hasta ahora, es el numerario, su precio no puede hacerse cero nunca. Si se utilizara un input con una naturaleza distinta al bien de consumo que se empleara excusivamente en la producción de capital humano, al no haber demanda en el período terminal su precio relativo en términos del bien de consumo sí podría caer a cero en T. Otra alternativa, como se señaló antes, sería suponer un horizonte infinito, circunstancia en la que incluso aunque el input del capital humano fuera el numerario la condición de transversalidad se verificaría al ser positivos y finitos todos los elementos de la condición de transversalidad y estar comprendido β entre 0 y 1. **Cabe concluir, por tanto, que hay que introducir condiciones un tanto restrictivas en el modelo para que la condición de transversalidad pueda cumplirse, incluso aunque fuera posible que la función de aprendizaje satisficiese las condiciones delimitadas por Pollack y Wachter.**

Otra cuestión sería, ¿hasta qué punto resulta realista suponer que pueda existir una tecnología de producción de capital humano no dependiente del tiempo asignado? Con los supuestos realizados hasta el momento, no parece demasiado. Por muy intensivo que sea en equipo u otro tipo de inputs el aprendizaje, parece que al menos un mínimo de tiempo debería ser exigible para comenzar a conseguir ampliar el abanico de habilidades de un individuo. En un entorno de incertidumbre, la función h podría experimentar shocks de productividad positivos -o depender la producitividad multifactorial del propio stock de capital humano, manteniendo el supuesto de certidumbre- que implicaran una reducción del tiempo necesario para la producción de un número de unidades de capital humano, pero es difícil imaginar una situación donde este proceso llegara a un extremo tal que el tiempo empleado fuera completamente prescindible. En los capítulos 2 y 3 se citan algunos modelos con funciones de aprendizajes dependientes solamente de inputs de mercado, aunque este enfoque está lejos de ser el predominante y se utiliza más en el marco de análisis de ciertos instumentos de política económica -cupones educativos, principalmente- que aconsejan introducir el gasto educativo como input variable que por coheren-

---

[154] Si la inversión es nula, el gasto en adquisición de nuevo capital humano puede llegar a hacerse cero, pero debido solamente a la cantidad producida, no por su coste marginal de producción, que incluso en el entorno de una inversión nula es positivo. En este sentido, la condición de transversalidad puede reescribirse como $\beta^T \lambda_T \pi_T^h \left[i_T^h + \left(1-\delta^h\right) a_T^h \right] = \beta^T \lambda_T \pi_T^h \left(1-\delta^h\right) a_T^h \neq 0$, excepto si la tasa de depreciación fuera unitaria.

cia conceptual, de suerte que la introducción de un input adicional aportaría poco a las conclusiones y sin embargo complicaría analíticamente la resolución.

Una alternativa más sólida conceptualmente -y más próxima a la línea de trabajo de Becker- a la exclusión del tiempo de aprendizaje en la función de producción de capital humano es que dicho tiempo no presentara ningún coste de oportunidad asociado, por lo que se tratara de un input “gratis”. Un posible escenario con estas características vendría dada por una jornada laboral exógena y un tiempo total destinado a aprendizaje, entre 0 y la cota superior dada por la duración de la jornada laboral. En tales circunstancias, incrementar las horas de aprendizaje por encima de 0 no tendría ningún coste de oportunidad, ya que no se realizaría a expensas de reducir la jornada laboral. Al tratarse por tanto de un input libre, la solución trivial para la el tiempo de aprendizaje, siempre que el consumo de la commodity no se nutriera, como input adicional, de tiempo de ocio, sería 1-el tiempo exógenamente destinado al trabajo. Aunque tanto input de mercado como tiempo de aprendizaje podrían emplearse para invertir en capital humano, en la minimizacion de la función de costes solo se incluirían los derivados de la utilización del bien final en el proceso educativo.

Sin embargo este enfoque, que ha sido el utilizado en este capítulo en aquellas tecnologías de producción de capital humano en las que x era el único input variable, presenta una inconsistencia conceptual desde una perspectiva beckeriana: en la medida en que el tiempo de aprendizaje no equivale sino a la fracción del capital humano que se emplea por período en cada uno de los sectores productivos, incluir el tiempo exógeno y excluir al capital humano no parece defendible. La única vía de escape -relativa- a este problema la proporcionan los modelos de generaciones solapadas en los que las decisiones de inversión en educación de los niños son adoptadas por sus padres mientras los primeros se encuentran en la infancia y no pueden trabajar. De este modo, cuando el input relevante para la acumulación es x, los niños aplicarían toda la dotación de tiempo disponible durante su infancia al aprendizaje, sin que este estuviera asociado a ningún coste de oportunidad, pudiendo ser su capital humano en este primer período de vida su dotación genética, que puede suponerse común a todos los individuos en un entorno de agente representativo homogéneo. Sin embargo tampoco este es el supuesto habitual en la literatura, de forma que la mayor parte de los autores internalizan en la tecnología educativa el capital humano de los padres, que coexisten con la nueva generación al menos durante un período de vida.

En conclusión, la formulación del problema de acumulación de capital humano como la adquisición de una posición en un activo que lleva aparejado un coste uni-

tario constante de producción solo es posible cuando ni el tiempo de aprendizaje ni el propio capital humano forman parte de la tecnología de acumulación, o bien el tiempo de aprendizaje no presenta un coste de oportunidad asociado ni se aplique sobre un stock de capital humano variable y, en cualquiera de los dos supuestos anteriores, esta tecnología tenga rendimientos constantes a escala en el input. En este último caso, la tasa de retorno es análoga a la que se obtendría formulando el problema sobre la base de la adquisición de un factor productivo. T**odos estos supuestos, sin embargo, son notablemente restrictivos.**

IV.5. Tasa de retorno del capital humano como bien de consumo duradero.

El capital humano presenta una doble característica presenta una relación con las preferencias del individuo en dos vertientes:

i) La primera está relacionada con un aumento de la productividad del trabajo que genera durante las horas aplicadas a la producción del bien compuesto. Esta vía es fuente de rentas salariales adicionales, al incrementar la remuneración del trabajo por hora alcanzable en equilibrio por el hogar representativo. A su vez, una mayor renta (permaneciendo todo lo demás constante) se traduce en una mayor utilidad (tal como pone de manifiesto la función indirecta de utilidad) por las mayores posibilidades de adquisición (o producción) de bienes que generan cuyo consumo aporta bienestar.

ii) La segunda alude a una satisfacción derivada de la propia producción o acumulación de capital humano, bien por sí mismo o como input de otras commodities. Pensemos por ejemplo que el consumo de ciertos bienes genera un bienestar mayor cuanto mejor es el estado de salud del individuo, o mayor es su grado de desarrollo intelectual. Otra manera de entender esta segunda acepción es pensar en una corriente de servicios que emana de la tenencia o producción de capital humano. Dichos servicios pueden usarse en combinación con otros factores productivos en la producción de commodities o constituir una commodity en sí misma, sin necesidad de factores adicionales. En cualquier caso y por simetría con los supuestos realizados sobre los servicios del capital humano tanto en la producción de bienes finales como en la propia educación, la forma más habitual de vehicular dichos servicios será mediante su aplicación a lo largo de un cierto tiempo, o dicho de otro modo, aumentando la productividad del trabajo en la franja de tiempo durante la que se aplican, en el sentido acuñado por Ben-Porath (1967).

Este segundo canal de interacción entre capital humano y utilidad admite a su vez dos variantes:

- Una, en una línea más beckeriana: es el flujo de producción de capital humano el que genera utilidad. De esta forma el capital humano recibiría el mismo tratamiento que las restantes commodities, en el sentido de que es el flujo de producción de estas la variable a partir de la cual deriva satisfacción el individuo.

- Otra alternativa, conforme a la cual es el stock completo de capital humano acumulado hasta el principio del período la variable relevante de la que el individuo deriva placer. Esta segunda opción es más coherente conceptualmente con la peculiaridad de que el capital humano es una commodity que se acumula en el tiempo y ser consiguientemente el stock completo del activo real el origen de sus servicios, y no solamente la fracción del mismo que se ha incorporado más recientemente a la cartera de los agentes.

De las reflexiones anteriores se desprende que el stock de capital humano puede tener un doble encaje en la función de utilidad. Uno de ellos derivaría de una función de servicios del capital humano que forma parte del vector de inputs de la commodity, tal que:

$$u_s = u\left(C_s\left(x_s^c, s^h\left(a_s^h\right)\right)\right);\ s^h\left(a_s^h\right) = n_s^C a_s^h \quad (4.164)$$

O generalizando, podría decirse que la función de utilidad tiene como argumentos un vector de i commodities, cada una de las cuales se produce por la economía doméstica a partir de una cierta cantidad del bien compuesto y de tiempo de ocio enriquecido por el nivel de capital humano disponible. De acuerdo con esta línea de análisis, el capital humano no es un bien económico en sí mismo, sino un factor que escala al ocio o que determina su productividad marginal, que resultaría el verdadero input de las commodities.

Otra posible variante de esta vía de introducción del capital humano consiste en suponer que los servicios del capital humano constituyen una commodity en sí misma (pensemos, por ejemplo, en la autoestima procedente de la formación) y, para simplificar, ningún otro input aparte del tiempo interviene en la producción de dicha commodity. Visto de este modo, estaríamos ante una función de utilidad como la formulada más bajo, en la que C es un vector de bienes de consumo que pueden ser adquiridos directamente en el mercado (o alternativamente podría pensarse en un vector de commodities en cuya elaboración no interviene el tiempo de ocio y/o el capital humano) y X es la commodity que se identifica con los servicios del capital humano:

$$u_s = u_s\left(C_s, X_s\right); X_s = X\left(s_s^h\right); s_s^h = n_s^X a_s^h$$ [155] (4.165)

Hasta ahora hemos visto que la función de servicios del stock de capital humano adoptaba una estructura lineal proporcional entre ocio y consumo. No obstante, en la literatura de capital humano en la función de utilidad podemos encontrar también el stock de este como argumento en las preferencias sin mediación del ocio. Esto equivaldría a suponer que la función de servicios es una del tipo $s_s^h = a_s^h$. Este tipo de formulación, que es utilizada por autores como Grossman (1972) y en general la escuela de modelización del capital humano como índice de salud del individuo, tiene un encaje conceptual más difícil en el mundo beckeriano. En efecto, es difícil imaginar que el capital humano pueda generar dos corrientes diferentes de servicios simultáneamente, ya que la carencia de tiempo de ocio equivale a afirmar que la commodity que genera satisfacción puede disfrutarse en tanto que se produce la acumulación del activo o se trabaja en el sector de mercado, sin que se merme la productividad de los inputs en ninguno de los dos procesos. En cualquier caso las preferencias, así definidas, dependerían de un vector de commodities así como los servicios del capital humano s^h , los cuales a su vez son función del stock disponible. Así:

$$u_s = u\left(C_s, s^h\left(a_s^h\right)\right) = v\left(C_s, a_s^h\right) \quad (4.166)$$

La ventaja de este último enfoque es que, aun más ajeno a la corriente principal de de capital humano, entronca bien con el enfoque de *durables* dentro de la literatura microeconómica de consumo. En efecto, las obras pioneras del enfoque microfundamentado de la demanda de bienes de consumo duradero -véase Diewert (1974), Kau y Keenan (1980) y Mankiw (1985)- caracteriza bienes de consumo duradero como aquellos que presentan simultáneamente dos características: i) la generación de un flujo de servicios consumibles por período; ii) el hecho de que tales bienes no se extinguen en un período, sino que, sujetos a una cierta tasa de depreciación, perduran a lo largo de parte del horizonte de planificación de la economía doméstica. Es de notar también que dentro de la literatura de *durables* estos se generan habitualmente en un sector productivo ad hoc (la vivienda sería el ejemplo más notable), aunque nada impide que el consumidor pueda incorporarlos también a su cesta en un régimen de autoproducción, circunstancia que permite amoldar

---

[155] En algunas partes de este trabajo se ha denominado n_s^C a la fracción de tiempo de ocio. En este apartado la nomenclatura dependerá del tipo de articulación que se realiza del tiempo de ocio en las preferencias: cuando los servicios del capital humano entran a formar parte de las mismas como inputs de una commodity C, el superíndice del ocio será C; cuando los servicios del capital humano constituyan el input de una commodity especifica X, entonces el superíndice será X.

todavía más el capital humano a este esquema. Hay que señalar que el tiempo no es un elemento central en la literatura de *durables,* en el sentido de que no juega un papel determinante para que ni ningún bien, perecedero o duradero, genere satisfacción, ni tampoco la autoproducción es origen de ninguno de los argumentos de la función de utilidad.

Teniendo en cuenta estas premisas, la definición formal de un bien de consumo duradero adquirido a través del mercado se basaría en los siguientes elementos: a) una función de utilidad dependiente de un vector de bienes de consumo no duraderos y el stock de bien duradero; b) Un precio relativo del bien de consumo duradero en términos del bien de consumo perecedero, que cuando este es único denominaremos como p^d ; c) una ecuación del bien de consumo duradero, que refleje su depreciación a una tasa genérica δ ; d) una restricción presupuestaria que refleje la liquidez del bien de consumo duradero y su posible enajenación en un periodo posterior a su disfrute; e) la existencia de un mercado de alquiler de servicios de bienes de consumo duradero, que supone una alternativa al incremento del stock del bien en propiedad. En este último mercado se intercambia una unidad de servicios a cambio de una tasa de alquiler q. Este último supone también que la posición en el bien de consumo duradero lleva aparejada una renta imputada, en concepto de alquiler de servicios que el hogar evita desembolsar por cada unidad de posición en el bien de consumo duradero. Estos elementos básicos del problema de optimización se representarían formalmente del siguiente modo:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^s u\left(C_s, s_s^d\right);\ s_s^d = s^d\left(d_s\right);\ d_{s+1} = i_s^d + \left(1-\delta^d\right)d_s \quad (4.167)$$

$$C_s + b_{s+1} + p_s^d d_{s+1} + q_s s_s^d \leq q_s d_s + p_s^d\left(1-\delta^d\right)d_s + \left(1+r_{s-1}\right)b_{s-1} \quad (4.168)$$

En la restricción presupuestaria encontramos, en el lados de los empleos, dos sumandos diferenciados, aparte del consumo del bien perecedero: el precio de adquisición de la posición en el activo (análoga a de cualquier otro activo real que lleve asociado un precio de mercado, como el capital físico), así como el precio de los servicios adquiridos por el hogar representativo a través del mercado de alquiler. Los servicios disfrutados que tienen su origen en la propia posición en el activo tienen como coste el propio precio del activo en el mercado. En el lado de los recursos se encuentra el valor del activo adquirido en s-1, neto de depreciación, más la renta imputada calculada como la tasa de alquiler multiplicada por la posición en el activo. Dado que se trabaja con un hogar representativo, en equilibrio deberá suceder que los servicios demandados se corresponden exactamente con los derivados del propio stock del bien de consumo adquirido (y por tanto no hay transacciones en el mercado de alquiler). Sin embargo esta condición no se impone a priori en la restricción flujo ni en las preferencias, ya que procede de la compatibilización de las funciones de comportamiento óptimas de todos los agentes.

Hecho este preámbulo, la función lagrangiana a optimizar será la siguiente:

$$\Gamma = \sum_{s=0}^{T} \beta^s \left\{ u\left(C_s, s_s^d\right) + \lambda_s \left[\left(1+r_s\right) b_{s-1} + q_s d_s + p_s^d \left(1-\delta\right) d_s - C_s - p_s^d d_{s+1} - q_s s_s^d - b_{s+1} \right] \right\} \quad (4.169)$$

Calculando las condiciones de primer orden respecto al consumo del bien perecedero C, los bonos, lo servicios consumidos del bien de consumo duradero y la posición en este último, se extraen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s_s^d} = \beta^s \left[u_{ds} - \lambda_s q_s \right] \leq 0 \quad (4.170)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial C_s} = \beta^s \left[u_{cs} - \lambda_s \right] \leq 0; \Rightarrow \frac{u_{ds}}{u_{cs}} = q_s \quad (4.171)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1} \left(1+r_s\right) \lambda_{s+1} = 0 \quad (4.172)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial d_{s+1}} = -\beta^s p_s^d \lambda_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} \left[\left(1-\delta^d\right) + q_{s+1} \right] \leq 0 \quad (4.173)$$

$$\beta^T p_T^d \lambda_T d_{T+1} = 0 \quad (4.174)$$

$$\left(1+r_s\right) = rr_{s,s+1}^d = \frac{q_{s+1}}{p_s^d} + \frac{p_{s+1}^d \left(1-\delta^d\right)}{p_s^d} \quad (4.175)$$

La primera de estas ecuaciones refleja la cpo respecto a los servicios del bien de consumo duradero, cuyo precio de mercado es la tasa de alquiler. Dividiendo esta por la cpo respecto al bien de consumo perecedero, obtenemos que la relación marginal de sustitución entre ambos argumentos de la función de utilidad es igual a su precio relativo, esto es, la tasa de alquiler medida en unidades del bien de consumo no duradero, que por lo demás mantiene su condición de numerario. La cuarta condición respecto a la posición en el *durable*, combinada con la condición de Euler que se desprende de la cpo respecto a los bonos, permite obtener la sexta ecuación, o condición de no arbitraje entre las tasas de retorno del activo financiero y del bien de consumo duradero. Esta última se compone de dos elementos: la renta del activo, derivada a partir del alquiler imputado, más la ganancia de capital generada por la eventual venta del activo en s+1. La quinta ecuación constituye la condición de transversalidad del problema que establece que, en el último período del horizonte finito de la economía doméstica, el precio relativo del bien de consumo duradero debe hacerse nulo para que el stock de este mantenido al final de T sea positivo[156].

Tiene interés trasladar este análisis no solo a un marco en el que existe el capital humano, sino en el que además rigen principios beckerianos en cuanto a la utilización del tiempo como elemento productivo. Como primera observación, hay dos diferencias esenciales entre el modelo-tipo de consumo duradero que acaba de exponerse y uno clásico de capital humano: i) el carácter doméstico de la producción que hemos aceptado hasta el momento y ii) la no enajenabilidad del capital humano como activo. El segundo rasgo es todavía más importante que el primero, ya que podría pensarse en un sistema educativo externo al hogar representativo encargado de acumular capital humano a cambio de un precio de mercado y aun así el activo seguiría sin poder intercambiarse a cambio del numerario; es más, el precio de mercado de los servicios educativos no serían enteramente representativos del coste para el hogar que supone la adquisición de capital humano, ya que habría que computar también el coste de oportunidad del tiempo de aprendizaje. La adaptación de la metodología de *durables* a estas dos diferencias conceptuales comportará algunas diferencias en los resultados, aunque formalmente el problema será esencialmente similar.

---

[156] El problema de optimización descrito mantiene el supuesto tradicional, que hemos mantenido hasta el momento para otros activos, de que los bienes de consumo duradero son de tipo “ex-dividendo”. Bansal, Tallarini y Yaron (2008) proponen un esquema de modelización “cum-dividendo” para este activo, de suerte que el alquiler imputado se perciba en el propio período de adquisición, que conduciría a la siguiente restricción presupuestaria:

$$C_s + b_{s+1} + p_s^d d_s + q_s s_s^d \leq q_s d_s + p_{s-1}^d \left(1-\delta^d\right) d_{s-1} + \left(1+r_{s-1}\right) b_{s-1}$$

Derivando a su vez las cpo del problema planteado en esta versión alternativa, encontraríamos que la tasa de retorno del activo se ve modificada en el siguiente sentido:

$$rr_{s,s+1}^d = \frac{p_{s+1}^d \left(1-\delta^d\right)}{p_s^d - q_s}$$

Ahora el precio de adquisición del activo se ve modificado, de manera que el precio asociado a la ampliación de la posición se ve corregido por la tasa de alquier, que se imputa en el propio período de adquisición. Consiguientemente, el único término que queda en la tasa de retorno es el de las ganancias de capital que pueden materializarse en s+1.

Comenzaremos por la formulación de la función de utilidad de entre las enumeradas antes más afín al universo de commodities de Becker: una en que esta posee dos argumentos que proporcionan placer al individuo. El primero de ellos es un bien de consumo que puede adquirirse sin transformación alguna en el mercado y que se identifica con el bien final producido en el único sector productivo. El segundo será una commodity X cuyo único input son los servicios del capital humano; a su vez la función de servicios será igual al tiempo de ocio multiplicado por el stock de capital humano. Esto es, las preferencias del hogar representativo podrán formularse como sigue:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^s v\left(C_s, n_s^X a_s^h\right) \text{ (4.176)}$$

Por lo demás la restricción flujo del hogar representativo será la misma que se ha venido empleando para describir el régimen de autoproducción. La función de aprendizaje tendrá solamente un input, el tiempo de aprendizaje. La restricción de asignación de la dotación del tiempo por período será por lo tanto:

$$1 = n_s^h + n_s^X + n_s^w \text{ (4.177)}$$

Puesto que una de las tres fracciones de tiempo debe calcularse residualmente y conviene que en las tasas de retorno esté presente tanto el tiempo de aprendizaje como el tiempo de ocio para estudiar la incidencia de este último, en la optimización de la función lagrangiana llevaremos a cabo la sustitución $n_s^w = 1 - n_s^h - n_s^X$. Con estas premisas y suponiendo de nuevo que el capital físico acompaña al trabajo efectivo en la tecnología del bien final, la restricción flujo del hogar representativo quedará modificada así:

$$C_s + b_{s+1} + K_{s+1} \leq \left(1 + r_{s-1}\right) b_s + \left(1 + q_s^K\right) K_s + e_s a_s^h \left(1 - n_s^X - n_s^h\right) \text{ (4.178)}$$

Derivaremos las cpo de optimización del lagragiano que resultan modificadas respecto a versiones anteriores del problema:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n_s^X} = \beta^s \left[v_{xs} - \lambda_s e_s \right] \leq 0 (4.179)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n_s^h} = \beta^s \left[-\lambda_s e_s a_s^h + \mu_s h_{ns} \right] \leq 0 \text{ (4.180)}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1} \lambda_{s+1} \left(1 + \rho_{s+1}\right) \leq 0; \rho_{s+1} = F_{K,s+1} \left(K_{s+1}, a_{s+1}^h \left(1 - n_{s+1}^X - n_{s+1}^h\right)\right) \text{ (4.181)}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{s+1}^h} = -\beta^s \mu_s + \beta^{s+1} \left\{ \lambda_{s+1} e_{s+1} \left(1 - n_{s+1}^X - n_{s+1}^h\right) + \mu_{s+1} \left[h_{a,s+1} + \left(1 - \delta\right)\right] + v_{x,s+1} n_{s+1}^X \right\} \leq 0 \text{ (4.182)}$$

$$\beta^T \mu_T a_{T+1}^h = 0 \text{ (4.183)}$$

$$e_{s+1} = F_{L,s+1} \left(K_{s+1}, a_{s+1}^h \left(1 - n_{s+1}^X - n_{s+1}^h\right)\right); L_{s+1} = a_{s+1}^h \left(1 - n_{s+1}^X - n_{s+1}^h\right) \text{ (4.184)}$$

Dividiendo la cpo del consumo y del ocio tendremos:

$$\frac{v_{cs}}{v_{xs}} = \frac{1}{e_s} \quad (4.185)$$

Esto es, la relación marginal de sustitución contemporánea entre el consumo C y la commodity X, producida a partir de los servicios del capital humano acumulado hasta el período s, viene dada por el precio relativo de ambos, que es el inverso del salario real (como coste de oportunidad del ocio por unidad de capital humano utilizada en la producción de la commodity). Nótese que ello es posible porque la producción de X no entraña ningún coste adicional de la utilización del stock de capital humano disponible al principio del período s; tan sólo la asignación de parte de la dotación de tiempo a la producción de la commodity X genera los costes de oportunidad comentados.

A su vez, sustituyendo el valor sombra del capital humano a partir de la cpo del tiempo de aprendizaje, la cpo de la posición en el activo se formulará del siguiente modo para una solución interior del tiempo de aprendizaje:

$$1 + r_s = \frac{e_{s+1}\left(1 - n_{s+1}^X - n_{s+1}^h\right)}{\left(e_s a_s^h / h_{ns}\right)} + \frac{h_{a,s+1}\left(e_{s+1} a_{s+1}^h / h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h / h_{ns}\right)} + \frac{\left(1 - \delta^h\right)\left(e_{s+1} a_{s+1}^h / h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h / h_{ns}\right)} +$$

$$+ \frac{e_{s+1} n_{s+1}^X}{\left(e_s a_s^h / h_{ns}\right)} \quad (4.186)$$

Los tres primeros sumandos de la tasa de retorno son los habituales vistos en el apartado 4.2., que no se volverán a comentar. El último sumando procede de sustituir $\left(v_{x,s+1} / v_{c,s+1}\right) = e_{s+1}$ y debe interpretarse como un término adicional de la renta del activo (junto el primer sumando), teniendo en cuenta que la secuencia de utilización del capital humano implica su aplicación simultánea al principio del período a sus 3 usos productivos alternativos (dos domésticos y uno de mercado), para más adelante y a lo largo del mismo sufrir depreciación. Así, la acumulación de una unidad adicional de posición en el activo real implica una utilidad marginal derivada del disfrute de una cantidad adicional de servicios la commodity iguales a n_{s+1}^X . Esta satisfacción extra, en términos del valor sombra del bien de consumo, es equivalente al salario real (o precio relativo de mercado de ambas commodities). El denominador es el mismo que en los términos anteriores y representa los costes marginales de producción. Hechas estas consideraciones, es claro que la tasa de retorno admite un reagrupamiento, de forma que:

$$1+r_s=\frac{e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}+\frac{h_{a,s+1}\left(e_{s+1}a_{s+1}^h/h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}+\frac{\left(1-\delta^h\right)\left(e_{s+1}a_{s+1}^h/h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)} \quad (4.187)$$

Esta es la misma expresión de la tasa de retorno que hemos venido considerando cuando el capital humano no formaba parte de la función de utilidad. La cancelación del último término ha sido posible porque, por un lado, el tiempo de ocio merma la renta del activo en cuanto que detrae tiempo de trabajo en el sector productivo de mercado. Por otro, sin embargo, incrementa la renta en la misma cuantía, al constituir el salario real por el tiempo de ocio la valoración, en términos del bien de consumo, de la cantidad adicional de la commodity X de que se podrá disfrutar en s+1 a consecuencia de la acumulación de una unidad marginal más de capital humano. La evaluación de la tasa, por tanto, con las funciones de aprendizaje y de producción del bien final que hemos utilizado hasta ahora sería idéntica a la efectuada en apartados precedentes.

Pasemos ahora a considerar otra versión de función de utilidad, en la que existe una sola commodity C que se produce a partir tanto de input de mercado como de tiempo de ocio aumentado por el stock de capital humano. Esto es, las preferencias vitales del hogar representativo podrán formularse de la siguiente manera:

$$U=\sum_{s=0}^{T}\beta^T u_s\left(C\left(x_s^C, n_s^C a_s^h\right)\right) \quad (4.188)$$

Las cpo que se ven modificadas serán las siguientes:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_s^C}=\beta^s\left[\frac{\partial u_s}{\partial C_s}\frac{\partial C_s}{\partial x_s^C}-\lambda_s\right]\leq 0 \quad (4.189)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial n_s^C}=\beta^s\left[\frac{\partial u_s}{\partial C_s}\frac{\partial C_s}{\partial L_s^C}-\lambda_s e_s\right]\leq 0;\ L_s^C=n_s^C a_s^h \quad (4.190)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial a_{s+1}^h}=-\beta^s\mu_s+\beta^{s+1}\left\{\lambda_{s+1}e_{s+1}\left(1-n_s^C-n_s^h\right)+\frac{\partial u_s}{\partial C_s}\frac{\partial C_s}{\partial L_s^C}n_{s+1}^C+\mu\left[h_{a,s+1}+\left(1-\delta^h\right)\right]\right\}\leq 0 \quad (4.191)$$

La relación marginal de sustitución entre los dos inputs de la commodity C será:

$$RMS_L^x=\frac{C_{xs}}{C_{Ls}}=\frac{1}{e_s} \quad (4.192)$$

Realizando de nuevo la sustitución pertinente del valor sombra del capital humano, teniendo en cuenta la modificación que se opera en el valor sombra de la renta en equilibrio y suponiendo un flujo de producción positivo del mismo, la cpo de la posición en este activo real se reexpresa como:

$$1+r_s=\frac{e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^C-n_{s+1}^h\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}+\frac{e_{s+1}n_{s+1}^C}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}$$
$$+\frac{h_{a,s+1}\left(e_{s+1}a_{s+1}^h/h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}+\frac{\left(1-\delta^h\right)\left(e_{s+1}a_{s+1}^h/h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}=$$
$$\frac{e_{s+1}\left(1-n_{s+1}^h\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}+\frac{h_{a,s+1}\left(e_{s+1}a_{s+1}^h/h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)}+\frac{\left(1-\delta^h\right)\left(e_{s+1}a_{s+1}^h/h_{ns+1}\right)}{\left(e_s a_s^h/h_{ns}\right)} \quad (4.193)$$

Esto es, ahora el cociente de utilidades marginales que aparece en el segundo sumando de la renta marginal del activo afecta a los dos inputs de C, pero en cualquier caso su precio relativo, como antes, es igual al salario real. Por tanto, la expresión final de la tasa de retorno de nuevo coincidirá con la versión estándar de 4.3. El hecho de que tanto si el tiempo de ocio es un input de una commodity independiente o de una única commodity no influyan en la forma final de la tasa de retorno se explica por el hecho de que tanto en uno como en otro caso la relación marginal de sustitución entre los argumentos de la función de utilidad, que es independiente de la derivada parcial de la utilidad respecto a las commodities en cuyo consumo el individuo encuentra satisfacción, se iguala a los precios relativos de los inputs que intervienen en la elaboración de la commodity. O lo que es lo mismo, la igualdad la relación marginal de sustitución entre argumentos de la función de utilidad y sus precios se transforma en una igualdad entre la relación técnica de sustitución y los precios de los inputs que dan lugar a las commodities. Puesto que en ambos casos los precios relativos son los mismos, también lo será la renta del activo y su tasa de retorno, ya que los sumandos que componen las ganancias de capital son invariantes a la forma de integrar el ocio.

A continuación, puede hacerse mención a un último caso que, aunque con una articulación impropia en la estrategia de modelización beckeriana, es relevante en la literatura: aquel en el que el tiempo se modeliza de una manera distinta en la función de utilidad y en las dos tecnologías sectoriales, con una función de servicios del capital humano en la producción de las commodities que depende solamente del stock del activo y no del tiempo a lo largo del cual se aplica para obtener la commodity. Como mencionamos antes, este es el escenario más afín a la teoría de durables, con la particularidad de que la endogeneización del tiempo es ajena a esta última. Cuando esto sucede, ceñirnos a la modelización tradicional no permite obtener una tasa de retorno en el sentido financiero del término, esto es, una expresión en la que tanto rentas como ganancias de capital procedentes de la inversión en el activo están valoradas en unidades del numerario (o a precios de mercado). Este es un problema que no presenta la mayor parte de la literatura de durables, como vimos al desarrollar el problema-tipo, a causa de la introducción de un mercado de alquiler de servicios del bien de consumo duradero cuya tasa estaba asociada a la adquisición del argumento de la función de utilidad.

De no optarse por esta solución en el problema de capital humano e incluir directamente el stock de este activo en la función de utilidad, dentro de la tasa de retorno se encontrará dos sumandos, uno que contiene el aumento marginal de la renta laboral y otro que refleja la utilidad marginal positiva en s+1 a consecuencia de la mayor acumulación de capital humano, dividida por la utilidad marginal del consumo también en s+1[157]. Sin embargo, la relación marginal de sustitución entre estos dos inputs en general no puede igualarse a un cociente de precios de mercado referidos a un único período, por dos razones: una principal, procedente del hecho de que la adquisición de una unidad adcional de consumo a cambio de la acumulación de una de capital humano no solo genera consecuencias en s, sino en s+1 al reducir las percepciones salariales y anular cualquier posible ganancia de capital del activo; otra secundaria, ya que aunque las consecuencias de la sustitución fueran puramente contemporáneas ni el capital humano se comercializa ni tiene un precio unitario constante imputable (ver apartado 4.4.). Si en la literatura de durables este problema está ausente es porque: i) la diferenciación de los servicios de bienes de consumo duradero de la pura modificación de la posición en el activo (posibilitada por la existencia del mercado de alquiler) permite que la relación marginal de sustitución entre un bien de consumo duradero y los servicios del bien de consumo duradero se circunscriba al período en que se efectúa tal sustitución; ii) existe un precio de mercado que refleja tal sustitución, la tasa de alquiler, que vacía el mercado de alquiler de los servicios del activo.

Una posible vía para obtener una tasa de retorno de la inversión en capital humano será, por lo tanto, la modificación de una serie de supuestos de funcionamiento del modelo para poder alinearlo con el problema-tipo de durables que describimos anteriormente. En concreto, se deberá introducir el mercado de servicios de alquiler derivados del capital humano, así como asignar un precio a dicho de mercado de alquiler. El segundo supuesto no es difícil de aceptar en tanto en cuanto consideremos factible el primero. Este tipo de

---

157 Nótese que esta situación es análoga a la comentada en los modelos OLG cuando existen legados educativos a la siguiente generación, viniendo motivados los mismos por la existencia de altruismo. En el contexto más general de este apartado, el altruismo puede considerarse una commodity dentro de la función de utilidad, producida a partir del stock de capita humano legado a los hijos. En cualquier caso el efecto es el mismo, la imposibilidad de articular una tasa de retorno a partir de las cpo.

situaciones no son impensables en la realidad y varios ejemplos pueden ilustrar este hecho: una persona que no ha tenido oportunidad de disfrutar de los libros de un cierto autor y acude a una sesión de lectura de textos elegidos de las mismas, una conferencia sobre un tema del que solamente se poseen conocimientos básicos, contratar a un guía turístico para visitar ciertos lugares de interés en el lugar de vacaciones, etc. Por otra parte, el aplicar una imputación de rentas a través del mercado de alquiler no implica necesariamente poder asociar un precio unitario al stock de capital humano. Mientras, como se dedujo en el apartado 4.4., la posibilidad de asignar un precio unitario a la producción de una commodity no existe si no se dispone de una estructura de costes marginales constantes y no afectada de "path dependency", es perfectamente posible retribuir a través del mercado los servicios de un stock a una tasa que afecte homogéneamente a todas las unidades que la componen, ya que esta última no tiene un carácter de precio imputado. Por tanto combinaremos el supuesto de mercado de alquiler con el de producción doméstica del activo, como venimos haciendo hasta ahora, a un coste variable por unidad. Comenzaremos por estudiar una versión sencilla del modelo en la que la producción del bien final se lleva a cabo exclusivamente por medio de capital físico y el capital humano se produce a través de la aplicación del input de mercado x.

En estos términos las nuevas preferencias y la restricción presupuestaria podrían escribirse del siguiente modo:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^T u\left(C_s, X\left[s_s^h\left(a_s^h\right)\right]\right) = \sum_{s=0}^{T} \beta^T v\left(C_s, s_s^h\left(a_s^h\right)\right) \quad (4.195)$$

$$C_s + b_{s+1} + K_{s+1} + q_s^h s_s^h + x_s^h \leq q_s^h a_s^h + \left(1 + r_{s-1}\right) b_s + \left(1 - \delta^K\right) K_s + q_s^K K_s \quad (4.196)$$

Conviene precisar que el primer sumando de los recursos puede interpretarse como los ingresos procedentes del alquiler efectivos o imputados, dependiendo de si en equilibrio se decide acudir o no al mercado de alquiler (si solo hay economías domésticas idénticas entre sí, entre los alquileres serán nulos en equilibrio y por tanto se tratará de alquileres imputados). Resolviendo el problema, obtendremos la condición de transversalidad habitual que se resuelve gracias a la anulación del valor sombra del capital humano en T:

$$\beta^T \mu_T a_{T+1}^h = 0 \quad (4.197)$$

Tendremos una tasa de retorno dada por la siguiente expresión, que presenta similitudes y diferencias con la tasa derivada antes para bienes de consumo duraderos:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{U_h>0} = \frac{q_{s+1}}{\left(1/h_{xs}\right)} + \frac{h_{a,s+1}\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)} + \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)} \quad (4.198)$$

La principal semejanza con un problema de durables estriba en que el alquiler es el principal componente de las rentas del activo. La diferencia, sin embargo, procede del hecho de no poder asignarse en general un precio unitario al capital humano, como se vio en 4.4., por lo que los componentes de la tasa de retorno relacionados con las ganancias de capital de nuevo deben expresarse en función de los costes marginales de producción del activo. En el problema de durables la imposibilidad de articular una oferta neta positiva o negativa con un marco de hogar representativo forzaba a suponer en equilibrio la producción exclusiva de servicios a partir del propio stock acumulado por cada economía doméstica. En este caso la situación es análoga, y en equilibrio los servicios de capital humano no podrán generarse a partir de stocks ajenos.

En equilibrio general el alquiler será igual a la utilidad marginal respecto a los servicios del capital humano. Si suponemos una utilidad aditiva y de elasticidad de sustitución intertemporal constante entre C y la commodity X, así como una tecnología lineal $X_s = s_s^h = a_s^h$, las preferencias, evaluadas en equilibrio, adoptarán la siguiente forma:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^s \left[\frac{(C_s)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{(a_s^h)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right] \text{(4.199)}$$

Por tanto, el componente de rentas de la tasa de retorno, evaluado también en equilibrio para la función habitual de aprendizaje -tomando, por ejemplo, el input x- empleada en 4.2. y 4.3, sería igual a:

$$\frac{q_{s+1}^h}{(1/h_{xs})} = \left(a_{s+1}^h\right)^{-\sigma} Ba_s^h \gamma \left(x_s^h\right)^{\gamma-1} = B\gamma \left(a_s^h\right)^{1-\sigma} \left[1 + B\left(x_s^h\right)^{\gamma}\right]^{-\sigma} \left(x_s^h\right)^{\gamma} \text{ (4.200)}$$

Si se optara por modelizar el capital humano en su variante activo cum-dividendo, en tal caso la cpo de la posición en el capital humano vendría dada por:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{s+1}^h} = \beta^s \left(-\mu_s + \lambda_s q_s^h\right) + \beta^{s+1} \mu_{s+1} \left[h_{a,s+1} + \left(1-\delta^h\right)\right] \leq 0 \text{ (4.201)}$$

La condición de transversalidad implicaría:

$$\beta^T \left(-\mu_T + \lambda_T q_T^h\right) a_{T+1}^h = 0 \text{ (4.202)}$$

En equilibrio la tasa de alquiler será, en general, distinta de cero y tal que posibilite que los intercambios deseados en este mercado se anulen. Luego deberá cumplirse que $\mu_T = \lambda_T q_T^h > 0$. Esto es, el valor sombra del capital humano dejará de anularse en el último período, lo que es congruente con el hecho de que el incremento de la posición durante el período T conduce a un ingreso potencial procedente del alquiler durante el mismo período. A su vez este hecho es compatible con una inversión bruta en el activo durante el ultimo período del horizonte, lo que no sucedía cuando el capital humano se consideraba ex-dividendo. La tasa de retorno en este caso comprendería solamente dos sumandos integrantes de las ganancias de capital, mientras que el coste marginal de ampliación de la posición en capital humano se vería minorado por el alquiler imputado en s:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{U_h>0} = \frac{h_{a,s+1}\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-q_s^h} + \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-q_s^h} \quad (4.203)$$

La anterior formulación del problema replica en la medida de lo posible el enfoque de modelización tradicional para bienes de consumo duraderos. Sin embargo, esto implica omitir el papel del capital humano como complemento del tiempo de trabajo para generar producción de mercado y constituir, por tanto, una fuente adicional de rentas al alquiler de servicios a los hogares para la producción de la commodity X. Para solventar este problema y al mismo tiempo desarrollar las posibilidades del esquema en el que el ocio no forma parte de la función de utilidad, supondremos que se pueden suscribir dos contratos de alquiler a través del mercado, cada uno de ellos dirigido a proveer servicios en las respectivas tecnologías productivas. La notación de cada uno de estos servicios será, respectivamente, $s_s^{h,X}$ y $s_s^{h,Y}$. Si, en coherencia con la no utilización del ocio, no se desea endogeneizar la asignación de fracciones de tiempo por período, habría que realizar los siguientes supuestos: i) la utilización del capital humano entre ambos servicios es no rival, esto es, los hogares comercializan un único producto que puede ser utilizado indistintamente en la producción de la commodity o del bien final; pensemos, por ejemplo, en la confección de un programa informático para la realización de un determinado servicio que puede utilizarse con variantes poco significativas, para la producción de mercado o para la producción doméstica; ii) la remuneración al alquiler del capital humano en cada uno de estos usos debe ser la misma; por tanto, salario por unidad de capital humano y contraprestación por el trabajo en la producción doméstica ajena se igualarán. Además, para diferenciar en mayor medida uno y otro proceso productivo, consideraremos el del bien final atendido tanto por los servicios de capital humano como por el capital físico.

Bajo los supuestos efectuados, la función de utilidad y la función de producción del bien final podrán escribirse como:

$$U = \sum_{s=0}^{T} \beta^s v\left(C_s, s_s^{hX}\right);\ Y_s = F\left(K_s, s_s^{hY}\right);\ s_s^{hX}\left(a_s^h\right) = s_s^{hY}\left(a_s^h\right) = a_s^h \quad (4.204)$$

La restricción presupuestaria, a su vez, presentará una estructura muy similar a la anterior:

$$C_s + b_{s+1} + K_{s+1} + x_s^h + q_s^h s_s^{h,X} \le \left(1+r_{s-1}\right)b_s + \left(1+\delta^K\right)K_s + q_s^K K_s + q_s^h a_s^h \quad (4.205)$$

Varios aspectos acerca de esta restricción merecen comentarse. Uno, sin una asignación intraperiódica del tiempo se seguirá usando el input de mercado en la producción de capital humano. Dos, el hecho de que solamente los servicios de alquiler dirigidos a la producción de la commodity figuren entre los empleos refeja el hecho de que la demanda de servicios para la producción del bien final no se lleva a cabo por el hogar representativo, sino por la empresa representativa. Tres, se parte del hecho de que un individuo solamente podrá alquilar sus servicios una vez por período. En la medida en que se supone que los hogares son idénticos entre sí, los servicios del capital humano son un producto homogéneo desde el punto de vista de sus demandantes, con independencia de que empresas y hogares los utilicen para atender distintas necesidades y en combinación o no con otros activos. Por tanto el alquiler de este tipo de servicios será, a efectos de modelización, perfectamente asimilable al de un producto no diferenciado: el agente puede colocarlo en el mercado junto con el de los restantes oferentes y cada demandante, sea hogar o empresa, toma a la tasa de alquiler cualquier cantidad de la oferta total, suponiendo una dividisibilidad perfecta de estos servicios, siendo irrelevante la identidad del individuo que percibe dicha tasa.

La solución de equilibrio general integra los siguientes elementos: i) la existencia de una única tasa de alquiler, con independencia del uso, de modo que deberá verificar simultáneamente:

$$\frac{\partial v}{\partial s_s^{h,X}} = q_s^h = \frac{\partial F}{\partial s_s^{h,Y}} = e_s \quad (4.206)$$

ii) Al operar una vez más en un marco de hogar representativo, en equilibrio los servicios de alquiler contratados para producir la commodity serán nulos. En efecto, al no contemplarse que las empresas puedan realquilar a los hogares los servicios de capital humano, una posición neta demandante de estos entre los hogares no encontraría contraparte en equilibrio, por lo que el resultado no diferiría en esencia del analizado cuando solamente los hogares participaban en este mercado. Consiguientemente, toda la capacidad de alquiler se canalizará en equilibrio hacia los servicios prestados a los productores del bien final. Esto también implica que el origen de las rentas de alquiler en equilibrio procede del pago de la tasa de alquiler por las empresas. iii) Con estas premisas, la tasa de retorno del capital humano, que por la condición de no arbitraje se igualará a las tasas del capital físico y del activo financiero, adoptará la expresión familiar[158]:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{U_h>0}=\frac{e_{s+1}}{\left(1/h_{xs}\right)}+\frac{h_{a,s+1}\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)}+\frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)} \quad (4.207)$$

Esto es, se trata de una tasa de retorno análoga a la anterior, solo que la tasa de alquiler se sustituye por el salario real por unidad de capital humano al que debe igualarse aquel en equilibrio.

Como se comentó en la presentación general del apartado, el capital humano no tiene por qué encontrarse solamente como stock dentro de la función de utilidad, sino que el propio flujo de producción del capital humano puede ser la variable realmente relevante en las preferencias. Este enfoque permitiría restablecer una simetría total en el tratamiento del capital humano y las restantes commodities, de manera que serían los flujos de producción de cada una de ellas los que se tomarían como argumentos en la definición del bienestar de los hogares.

Supongamos, dentro de este enfoque alternativo, que el hogar valora en sus preferencias dos tipos de bienes: uno C que puede adquirirse directamente en el mercado -y se identifica con el bien final- y una commodity generada a partir de servicios de capital humano. Dichos servicios, sin embargo, no son proporcionados por la totalidad del capital humano, sino solamente por la inversión en dicho activo efectuada de modo contemporáneo. Este último supuesto puede ser equivalente al de servicios de capital humano generados por todo el stock si la tasa de depreciación del activo fuera unitaria: pensemos en un tipo de conocimientos en los que la innovación juega un papel fundamental, hasta el punto de hacer inservible la formación adquirida en el pasado. Manteniendo no obstante nuestro supuesto habitual de depreciación nula del capital humano, podríamos asociar estas preferencias a un individuo con un cierto grado de esnobismo, de manera que solo los conocimientos o las habilidades más recientes le permiten alcanzar un mayor placer. Sea como fuere, las preferencias serán:

$$U=\sum_{s=0}^{T}v\left(C_s,s_s^h\right);\ s_s^h=s^h\left(a_{s+1}^h-a_s^h\right) \quad (4.208)$$

---

[158] O bien, si el capital humano se considerara cum-dividendo, como a veces sucede con los durables, $\frac{h_{a,s+1}\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-e_s}+\frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-e_s}$.

Para obtener una tasa de retorno en el sentido convencional, de nuevo habremos de recurrir al supuesto de existencia de un mercado de alquiler en el que se intercambian estos servicios ligados a una tasa de mercado q. Por el momento supondremos que solamente las economías domésticas son los oferentes y demandantes en el mercado de estos servicios y que el bien final se produce mediante la utilización exclusiva de capital físico. Estas hipótesis nos conducen a la formulación de la siguiente restricción presupuestaria-flujo:

$$C_s + b_{s+1} + K_{s+1} + x_s^h + q_s^h s_s^h \leq \left(1 + r_{s-1}\right) b_s + \left(1 - \delta^k\right) K_s + \rho_s K_s +$$
$$+ q_s^h \left(a_{s+1}^h - a_s^h\right) \quad (4.209)$$

Merece la pena prestar atención a la condición de transversalidad que se desprende de la cpo de posición en el capital humano: el resultado es la misma condición que se obtenía para el activo cum-dividendo, $\beta^T \left(-\mu_T + \lambda_T q_T^h\right) a_{s+1}^h = 0$, lo que implica el mismo comportamiento en el período terminal que el comentado en ese caso, esto es, la posibilidad de seguir acumulando incluso aunque el capital humano no genere rentas explícitas en s+1. Este comportamiento se refleja también en la nueva tasa de retorno del activo que puede derivarse bajo estas condiciones, que será:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{U_{i^h}>0} = \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)\left(1-\delta^h\right)}{\left(1/h_{xs}\right) - q_s^h} + \frac{h_{a,s+1}\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right) - q_s^h} - \frac{q_{s+1}^h}{\left(1/h_{xs}\right) - q_s^h} \quad (4.210)$$

Se observa, en primer lugar, que el coste de adquisición del activo pasa a ser ahora su precio unitario menos el alquiler. Dicho de otra forma, los supuestos efectuados acerca de la prestación de servicios del capital humano a partir de la inversión bruta en el mismo y no del stock convierten a este activo en uno cum-dividendo, en la medida en que el alquiler puede ser percibido en el mismo período de su producción. Esta es también la razón indirecta por la cual el componente de renta en la tasa de retorno es negativo: puesto que una unidad adicional del activo en s implica, ceteris paribus, una detracción a la inversión bruta en s+1, el impacto positivo vía alquiler en s tiene su reflejo negativo en un menor pay-off en el futuro.

Si ahora se introduce también el alquiler de servicios del capital humano a empresas, habría dos opciones básicas de modelización. Una, la más simple, homogeneizar los servicios que el capital humano puede prestar tanto a hogares como a empresas y suponer que en cualquier caso estos dependen de la inversión bruta en el activo. La tasa resultante sería inmediata, aunque supondría alterar los supuestos respecto al sector productor que se ha realizando hasta el momento:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{U_{i^h}>0} = \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)\left(1-\delta^h\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-e_s} + \frac{h_{a,s+1}\left(1/h_{x,s+1}\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-e_s} - \frac{e_{s+1}}{\left(1/h_{xs}\right)-e_s} \quad (4.211)$$

Otra opción más consistente con las hipótesis realizadas a lo largo de este capítulo sería diferenciar dos mercados de alquiler, cada uno de ellos basado en un tipo diferente de servicios. En el dirigido a las empresas, los servicios emanarían del stock de capital humano, mientras que en aquel cuyos demandantes son los hogares sería la inversión bruta la que produciría un incremento de la satisfacción. Dado que los demandantes de cada clase de servicio serían distintos y también lo sería la naturaleza de este, en equilibrio se formarán dos precios diferentes para cada uno de estos servicios, que denotaremos q y, como es habitual, e (salario real por unidad de capital humano). Teniendo esto en cuenta, la nueva restricción presupuestaria se transfomará, reflejando esta diversidad de rentas:

$$C_s + b_{s+1} + K_{s+1} + x_s^h + q_s^h s_s^h \le \left(1+r_{s-1}\right)b_s + \left(1-\delta^k\right)K_s + q_s^K K_s +$$
$$+q_s^h\left(a_{s+1}^h - a_s^h\right) + e_s a_s^h \quad (4.212)$$

La nueva restricción capta la asimetría de la naturaleza de servicios a hogares y empresas, de suerte que los primeros generan una renta de alquiler (efectiva o imputada) en el mismo período en que se expande la posición en el activo, mientras que los segundos se materializan en el período posterior a aquel en que se invirtió. La tasa de retorno, con estas consideraciones será ahora:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{U_{i^h}>0} = \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)\left(1-\delta^h\right)}{\left(1/h_{xs}\right)-q_s^h} + \frac{\left(1/h_{x,s+1}\right)h_{a,s+1}}{\left(1/h_{xs}\right)-q_s^h} + \left(\frac{e_{s+1}-q_{s+1}^h}{\left(1/h_{xs}\right)-q_s^h}\right) \quad (4.213)$$

Entre los componentes de la renta del activo en s+1 aparece uno nuevo positivo, dado por el salario o renta de alquiler a las empresas. Es de destacar además que, al reconstruir la condición de no arbitraje como una ecuación de valoración del activo -o, más apropiadamente en este caso, como una igualdad entre el coste marginal de producción y el fujo descontado de rentas del activo-, siempre que la tasa de depreciación sea cero y $h_{a,s}=0$ la influencia negativa del alquiler a los hogares en s+1 desaparecerá excepto en el último período, igualándose el coste marginal de producción unitario a la corriente descontada del alquiler en el primer período más la corriente salarial de períodos posteriores hasta el período T-1. Cuando s+1=T el ultimo sumando también se anulará, ya que por la cpo de x y la condición de transversalidad $\frac{1}{h_{xT}} = \frac{\mu_T}{\lambda_T} = q_T^h$.

La misma propiedad, siempre y cuando se cumplan las dos condiciones especificadas más arriba, se verifica también para la versión anterior del modelo, en la que se ignoraba la presencia del capital humano en la función de producción del bien final pero también los servicios de este dependían de su inversión bruta en cada período. En este último caso el coste marginal de producción se igualará solamente al alquiler en el primer período, ya que el resto de sumandos que integran el flujo de rentas descontadas se cancelarán entre sí (lo que a su vez es posible al existir un único flujo de rentas).

En conclusión: En ausencia del ocio como input complementario al propio capital humano en la producción de servicios derivados de este activo, no podrá derivarse una tasa de retorno del capital humano en un sentido financiero salvo que se introduzca en el modelo un mercado de servicios de alquiler que permita segregar ex-ante en la restricción presupuestaria la demanda de servicios del capital humano de la producción del mismo[159].

IV.6. Tasas de retorno con 3 tipos de capital.

Hasta el momento todas las tasas de retorno en equilibrio general se han derivado con dos clases de activos reales: capital físico y capital humano. En este apartado se derivarán tasas, siempre con rendimientos constantes a escala, cuando se introduce un tipo adicional de capital que, dependiendo del caso, se considera una subclase de capital humano o no. En concreto, nos referiremos a 4 posibles activos: capital social, capital tecnológico, capital humano-salud y capital humano-OJT.

Capital social. Comenzando por el caso más similar al modelo base estudiado hasta el momento, el capital social (ver concepto e interrelación con el capital humano en el capítulo 2) puede introducirse como un input más de la función de producción agregada Cobb-Douglas de rendimientos constantes a escala, diferenciándose del capital humano en que todo el stock del primero puede ser utilizado en cualquier fin, incluso aunque el tiempo durante el período deba repartirse en distintas finalidades. Así, denominando

---

[159] La consideración de inputs distintos del tiempo de ocio, aunque con un precio de mercado asociado, plantea la pregunta de qué especificación debe adoptar la tecnología para poder derivar la tasa de retorno. En general, bastará con que, siendo x_s^x el input de mercado involucrado junto con el capital humano en la producción de X, $\frac{\partial U}{\partial x_s^X} = \frac{\partial U}{\partial a_s^h}\varphi_s$, esto es, sus derivadas parciales sean proporcionales, siendo el término de proporcionalidad en general variable.

a_s^h y a_s^S a ambas variedades de capital, la función de producción agregada y las tecnologías de acumulación serán las siguientes:

$$Y_s = A\left(K_s\right)^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2} \quad (4.214)$$

$$a_{s+1}^h = a_s^h\left[1+B^{hh}n_s^h\right]+B^{hS}a_s^S \quad (4.215)$$

$$a_{s+1}^S = a_s^S\left[1+B^{SS}n_s^S\right]+B^{Sh}a_s^h \quad (4.216)$$

De este modo, el lagrangiano del agente representativo, en horizonte inifinito, se formula como:

$$\Omega = \sum_{s=0}^{\infty}\beta^s\left[\begin{array}{l} u\left(C_s\right)+\lambda_s\left[Y_s - C_s - K_{s+1}+K_s\right]+\mu_s\left[a_s^h\left(1+B^{hh}n_s^h\right)+B^{hS}a_s^S - a_{s+1}^h\right]+ \\ +\psi_s\left[a_s^S\left(1+B^{SS}n_s^S\right)+B^{Sh}a_s^h - a_{s+1}^S\right]+\xi_s\left[1-n_s^h\right]+\vartheta\left[1-n_s^S\right] \end{array}\right] \quad (4.217)$$

$$Y_s = A\left(K_s\right)^{\alpha_1}\left[\left(1-n_s^h-n_s^S\right)a_s^h\right]^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2} \quad (4.218)$$

Las cpo respecto al tiempo de formación de capital humano y capital social, así como respecto a las posiciones en cada uno de los activos, son las siguientes:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n_s^h} = -\lambda_s\frac{\partial Y_s}{\partial n_s^w}+\mu_s B^{hh}a_s^h - \xi_s \leq 0 \quad (4.219)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n_s^S} = -\lambda_s\frac{\partial Y_s}{\partial n_s^S}+\psi_s B^{ss}a_s^S - \vartheta_s \leq 0 \quad (4.220)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_{s+1}^h} = -\beta^s\mu_s + \beta^{s+1}\left[\lambda_{s+1}\frac{\partial Y_{s+1}}{\partial a_{s+1}^h}+\mu_{s+1}\left[1+\frac{\partial h_{s+1}}{\partial a_{s+1}^h}\right]+\psi_{s+1}\frac{\partial S_{s+1}}{\partial a_{s+1}^h}\right]\leq 0 \quad (4.221)$$

$$\lim_{s\to\infty}\beta^s\mu_s a_{s+1}^h = 0 \quad (4.222)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_{s+1}^S} = -\beta^s\psi_s + \beta^{s+1}\left[\lambda_{s+1}\frac{\partial Y_{s+1}}{\partial a_{s+1}^S}+\psi_{s+1}\left[1+\frac{\partial S_{s+1}}{\partial a_{s+1}^S}\right]+\mu_{s+1}\frac{\partial h_{s+1}}{\partial a_{s+1}^S}\right]\leq 0 \quad (4.223)$$

$$\lim_{s\to\infty}\beta^s\psi_s a_{s+1}^S = 0 \quad (4.224)$$

Las dos primeras condiciones muestran el balance entre costes marginales y beneficios marginales de la utilización de los inputs, viniendo dados los primeros por la productividad marginal del tiempo de trabajo y, los segundos, por la productividad marginal del tiempo en las respectivas funciones de acumulación de los activos. Las cpo respecto a las posiciones denotan el valor sombra de una mayor posición en el activo correspondiente no solo en términos de una mayor acumulación en el propio activo, sino del otro, habida cuenta de las productividades marginales cruzadas positivas. Suponiendo soluciones interiores en las fracciones de tiempo y en las posiciones en todos los tipos de capital, la ecuación de no arbitraje, que contiene las tasas de retorno de capital humano y capital social, será la que se reproduce a continuación:

$$\frac{u'(C_s)}{\beta u'(C_{s+1})}=A\alpha_1\left(K_{s+1}\right)^{\alpha_1-1}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}\equiv rr_{s,s+1}^K=$$

$$=\frac{\left(K_{s+1}\right)^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}n_{s+1}^w B^{hh}}{\left(K_s\right)^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}+\frac{\left(K_{s+1}\right)^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{\left(K_s\right)^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left[1+B^{hh}n_{s+1}^h\right]+$$

$$+\frac{B^{hh}}{B^{SS}}B^{Sh}\equiv rr_{s,s+1}^{hn}\Big|_{ge}=$$

$$=\frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(K_{s+1}\right)^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^S\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}B^{SS}}{\alpha_2\left(K_s\right)^{\alpha_1}\left(n_s^w\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^h\right)^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}+\frac{\left(K_{s+1}\right)^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{\alpha_2-1}a_{s+1}^h a_s^S\left(a_{s+1}^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{\left(K_s\right)^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_2-1}a_s^h a_{s+1}^S\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left[1+B^{SS}n_{s+1}^S\right]+$$

$$+\frac{B^{SS}}{B^{hh}}B^{hS}\equiv rr_{s,s+1}^{Sn}\Big|_{ge}\ (4.225)$$

Ambas tasas cuentan ahora con dos términos de renta marginal: uno relativo a la productividad marginal en el sector del bien de consumo y otro, valorado a los precios sombra relativos, que refleja las productividades marginales cruzadas en las tecnologías productoras del otro activo (cuarto sumando); dichos valores sombra relativos, una vez simplificados (ya que ambos contienen la productividad marginal del bien final como factor), resultan en el cociente de productividades marginales cruzadas en las tecnologías de acumulación. Por otro lado, los sumandos segundo y tercero representan, como es habitual, las ganancias de capital, al estar valorados por la ratio de valores sombra del propio activo en períodos consecutivos. Las tasas de retorno tanto de capital humano como de capital físico se verán pues ya no solamente relacionadas con el stock de capital físico, sino que ambos stocks también se encuentran entrelazados por medio tanto de los dos sumandos que componen la renta marginal respectiva de los activos, como de los precios sombra del propio activo en períodos consecutivos, que contienen la productividad marginal de ambos activos en el sector del bien final. Otra diferencia significativa que presenta la tasa de capital humano en comparación con su versión estándar es la inclusión en la renta marginal de productividades multifactoriales distintas de la propia B^{hh} , a consecuencia de la partipación cruzada de los activos en las tecnologías de acumulación respectivas; en el modelo estándar, al existir un solo activo real además del capital físico, esta circunstancia no se producía y el parámetro de productividad A se eliminaba tanto de la renta marginal como de las ganancias de capital. La consecuencia de esta innovación es una sensibilidad directa de la tasa frente a shocks de oferta en otros sectores de la economía, como la producción de capital social o la elasticidad del capital social en el propio proceso de acumulación de capital humano.

Para simplificar la tasa, esta se evaluará en estado estacionario, teniendo en cuenta que en él los ritmos de acumulación de los tres tipos de capital son los mismos y constantes, como también serán constantes las fracciones de tiempo asignadas a cada propósito. Siendo Γ el ritmo de acumulación común de todos los activos reales, las tasas estacionarias serán entonces:

$$rr_{s,s+1}^{hn}\Big|_{ge,ss} = \left(1-n^{s}\right)B^{hh} + 1 + \frac{B^{hh}}{B^{ss}}B^{SH} \quad (4.226)$$

$$rr_{s,s+1}^{Sn}\Big|_{ge,ss} = \frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)}{\alpha_2}\left(1-n^{S}-n^{h}\right)B^{ss} + \left(1+B^{SS}n^{S}\right) + \frac{B^{hh}}{B^{ss}}B^{hS} \quad (4.227)$$

Vease que las dos tasas son constantes, aunque la asimetría en la introducción del capital social en la tecnología del bien final genera diferencias entre las mismas. En cuanto a la del capital humano, es independiente del tiempo de aprendizaje, depende negativamente del tiempo de construcción de redes sociales (en cuanto que origina una pérdida neta en la renta marginal del activo) y positivamente, de un modo inequívoco, de la productividad multifactorial directa del capital humano en su propia tecnología de acumulación. Resulta llamativa la dependencia positiva respecto a la productividad cruzada del capital humano en el proceso de acumulación del capital social: cuanto menor sea el valor de la capacidad en la creación de las redes sociales/políticas y más se muevan estas por otro tipo de inputs (pensemos, por ejemplo, en la corrupción o en los simples contactos) tanto más se desalienta la inversión en capital humano, por cuanto que disminuye la renta marginal del activo. Por lo que respecta a la tasa del capital social estacionaria, no tiene un signo definido ni respecto al input destinado a la creación de redes sociales ni respecto a su propia productividad directa; en el primero de los casos, una condición suficiente para obtener un signo negativo será $1-\alpha_1 > 2\alpha_2$.

Tasa de retorno del capital humano con cambio tecnológico endógeno. Se trata de un caso relativamente similar al anterior, en el que el agente representativo tiene a su disposición dos procesos productivos, del bien final y de innovaciones, cuyo stock revierte a su vez en el primero en forma de productividad multifactorial variable en el tiempo. Las principales diferencias se centran en la formulación habitual en la literatura (véanse en el capítulo 3 ejemplos como Jones (1995) o Arnold (1998)) de la tecnología de acumulación de innovaciones, que no suele presentar contribuciones cruzadas simétricas, así como en la articulación del cambio técnico en la función de producción, con elasticidad unitaria en la mayor parte de los trabajos, frente a la concavidad predominante en los trabajos de capital social. Por lo demás, la ecuación de acumulación de las innovaciones es la siguiente, con rendimientos constantes a escala en el conjunto de sus inputs:

$$A_{s+1} = A_s\left[1 + B^A\left(A_s\right)^{-\varepsilon}\left(n_s^h a_s^h\right)^{\varepsilon}\right];\ \varepsilon \in (0,1)\ (4.228)$$

$$Y_s = A_s\left(K_s\right)^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{1-\alpha};\ \alpha \in (0,1)\ (4.229)$$

$$1 = n_s^A + n_s^h + n_s^w\ (4.230)$$

Dada la relativa similtud con el problema de capital social, se obvian detalles tediosos del problema de optimización. En equilibrio general las tasas de retorno de la inversión en capital humano y en innovación serían:

$$rr_{s,s+1}^{hn}\Big|_{ge} = \frac{A_{s+1}K_{s+1}^{\alpha}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{-\alpha}}{A_s K_s^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{-\alpha}}\left[B^h\left(1 - n_s^h - n_s^A\right) + \frac{B^h}{B^A}\left(1 + \Gamma_{a,s+1}\right)\right]\ (4.231)$$

$$rr_{s,s+1}^{An}\Big|_{ge} = \frac{A_{s+1}K_{s+1}^{\alpha}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{-\alpha}}{(1-\alpha)A_s K_s^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{-\alpha} n_s^A} + \frac{A_{s+1}K_{s+1}^{\alpha}\left(n_{s+1}^w a_{s+1}^h\right)^{-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)^{1-\varepsilon}}{A_s K_s^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{-\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon}}\frac{\left(n_s^A\right)^{\varepsilon-1}}{\left(n_{s+1}^A\right)^{\varepsilon-1}}\left[1 + (1-\varepsilon)\frac{A_{s+1}}{A_s}\right]\ (4.232)$$

De nuevo la tasa de retorno del capital humano se ve afectado por los parámetros tecnológicos del tercer tipo de capital, asi como por el propio stock de este: el crecimiento del stock de innovaciones afectará positivamente a la renta marginal, mientras que un aumento en la productividad de las innovaciones, si bien impacta positivamente en las ganancias de capital de este último activo, lo hace negativamente sobre el mismo componente de la tasa de capital humano, en la medida en que reduce el valor sombra relativo de los dos activos (o, desde una perspectiva más tecnológica, disminuye las unidades de capital humano necesarias para producir una unidad adicional más de innovación). En el **estado estacionario** hay que tener en cuenta que tanto las franjas de asignación del tiempo como las tasas de acumulación de los 3 activos son constantes e iguales, de modo que $\Gamma_K = \Gamma_A = \Gamma_h = \Gamma$, resultado que puede obtenerse directamente de la ecuación de acumulación de las innovaciones. Esto significa que las tasas de retorno devienen constantes, como no podía ser de otro modo y quedan simplificadas a las siguientes expresiones:

$$rr_{s,s+1}^{hn}\Big|_{ge,ss} = \Gamma\left[B^h\left(1 - n^h - n^A\right) + \frac{B^h}{B^A}(1+\Gamma)\right]\ (4.233)$$

$$rr_{s,s+1}^{An}\Big|_{ge,ss} = \frac{1}{(1-\alpha)n^A}\Gamma + \Gamma^{2-\varepsilon}\left[1 + (1-\varepsilon)\Gamma\right]\ (4.234)$$

Tasa de retorno del capital humano-conocimiento y capital humano-salud. El problema tipo comparte algunos rasgos tanto con el planteamiento realizado con capital social como con el de cambio tecnológico endógeno. Así, el capital salud (a^H) estará presente en la tecnología productora del bien final en su integridad, a diferencia del capital humano:

$$Y_s = AK_s^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^K\right)^{\alpha_2}\left(a_s^H\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2} \quad (4.235)$$

También se observarán efectos cruzados en las tecnologías de acumulación, aunque asimétricos (del capital conocimiento a^K al salud, pero no a la recíproca):

$$a_{s+1}^K = a_s^K\left[1+B^K n_s^K\right] \quad (4.236)$$

$$a_{s+1}^H = a_s^H\left[1+B^H n_s^H\right]+B^{HK}a_s^K \quad (4.237)$$

La principal diferencia es que el capital salud formará parte de las preferencias (siguiendo la estructura de Grossman, que se ha seguido modelos dinámicos de acumulación de salud desde los años 70 a la actualidad, como se vio en los capítulos 2 y 3). La imposibilidad de modelizar un mercado de alquiler de servicios de salud fuerza, si se quiere obtener una expresión convencional de la tasa de retorno de ambos activos, a combinar el capital salud con el tiempo de ocio n^X para obtener una commodity X, que determinará la satisfacción del agente representativo junto con el bien de consumo que se obtiene directamente del mercado. Así, la función de utilidad adopta la siguiente forma:

$$U = U\left(C_s, X\left(n_s^X a_s^H\right)\right)$$

Finalmente, el tiempo de distribuirá entre 4 usos alternativos, ocio, trabajo de mercado, producción de conocimiento y producción de salud: $1 = n_s^X + n_s^w + n_s^H + n_s^K$.

La clave de la construcción de la tasa de retorno la proporciona la cpo del ocio, según la cual y tomando soluciones interiores para esta franja de tiempo:

$$\frac{U_{Xs}}{U_{Cs}} = \frac{A\alpha_2 K_s^{\alpha_1}\left(n_s^w\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^K\right)^{\alpha_2}\left(a_s^H\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{a_s^H} \quad (4.238)$$

Es decir, la RMS entre las dos commodities se iguala al precio relativo de ambas, dada por el coste marginal de producción de X a partir del tiempo, o lo que es lo mismo, la pérdida marginal de producción del bien de consumo necesaria para la producción de una unidad adicional de X. Dicha relación podrá sustituirse para construir la tasa de retorno, como se comentó en el capítulo sobre tasas de retorno y durables en un caso ligeramente diferente. Desplegados estos supuestos, las tasas de retorno de capital salud y conocimiento, en un equilibrio general ordinario, son las desarrolladas más abajo:

$$rr_{s,s+1}^{Kn}\Big|_{ge} = \frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{K}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{H}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2} B^K}{K_{s}^{\alpha_1}\left(n_{s}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{H}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} + \frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{K}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{H}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{K_{s}^{\alpha_1}\left(n_{s}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{H}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(1+B^K n_{s+1}^{K}\right)+$$

$$+\frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}{K_{s}^{\alpha_1}\left(n_{s}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{H}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}\frac{B^K}{B^H}B^{HK} \quad (4.239)$$

$$rr_{s,s+1}^{Hn}\Big|_{ge} = \frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2} B^H}{\alpha_2 K_{s}^{\alpha_1}\left(n_{s}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}} + \frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2} B^H}{K_{s}^{\alpha_1}\left(n_{s}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}+$$

$$+\frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}{K_{s}^{\alpha_1}\left(n_{s}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s}^{K}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s}^{H}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}\left(1+Bn_{s+1}^{H}\right) \quad (4.240)$$

Los stocks de nuevo aparecen entrelazados en las dos tasas, tanto en la renta marginal como en las ganancias de capital. Para eliminar todas las variables referidas a s+1, evaluaremos las tasas en estado estacionario. En este las asignaciones de tiempo para cada uno de sus cuatro fines serán constantes, así como el capital físico, el conocimiento, y la salud. Además los efectos cruzados en la tecnología de este último activo implican que la única forma en que este puede alcanzar una tasa constante será que las tasas acumulación de los 3 activos coincidan. Teniendo en cuenta estas propiedades del estado estacionario, las tasas de retorno en dicha posición se simplifican sensiblemente:

$$rr_{s,s+1}^{Kn}\Big|_{ge,ss} = B^K\left(1-n^H-n^X\right)+1+\frac{B^K}{B^H}B^{HK} \quad (4.241)$$

$$rr_{s,s+1}^{Hn}\Big|_{ge,ss} = \frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)}{\alpha_2}B^H\left(1-n^K-n^H-n^X\right)+B^H+\left(1+B^H n^H\right) \quad (4.242)$$

La tasa estacionaria del capital humanos será pues creciente en la productividad cruzada en el sector de salud y decreciente en la productividad de la acumulación de la salud, puesto que esta induce la asignación de una fracción de tiempo a la inversión en este activo. La tasa es rígida respecto al tiempo destinado a la acumulación de conocimiento, al compensarse la derivada de la renta marginal con la de las ganancias de capital, mientras que fracciones de tiempo más elevadas de ocio o de cuidado de la salud detraen tiempo de trabajo y, por esta razón, reducen la tasa de retorno. Como también sucediera al derivar la tasa de retorno del capital social, la negatividad del signo de la tasa de la salud respecto al tiempo dedicado a su acumulación depende del cumplimiento de $1-\alpha_1 > 2\alpha_2$.

Tasa de retorno de capital humano-schooling y capital humano OJT. La derivación de la tasa de retorno en un modelo dinámico de equiibrio general con OJT presenta especiales dificultades, entre otros motivos porque apenas existen tales modelos -los motivos se comentan en profundidad en el capítulo 2-, siendo la mayor parte de las contribuciones estáticas o de 2 períodos a lo sumo y enmarcadas en equilibrio parcial. De este modo, no se plantean cuestiones intrínsecas al tratamiento dinámico, como las eventuales características de las sendas estacionarias. A continuación se propone un enfoque-tipo dinámico en el que es posible derivar una tasa de retorno convencional del capital humano-específico acumulado vía OJT, que coexiste con el capital humano-básico, adquirido fuera del ámbito del trabajo. Como veremos, sin embargo, existen dificultades conceptuales serias para poder considerar dicha tasa como una de equilibrio general.

Se supone que ambos tipos de cualificación (cuyas posiciones se denotan como a_s^{hS} y a_s^{hJ}) son complementarios en la función de producción del bien final y que ambos se aplican simultáneamente durante el tiempo de trabajo, conforme a la siguiente tecnología Cobb-Douglas de rendimientos constantes a escala:

$$Y_s = AK_s^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^{hJ}\right)^{\alpha_2}\left(a_s^{hS}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2} \quad (4.243)$$

La empresa realiza un contrato con el trabajador por un conjunto de horas n_s^C, las cuales pueden dedicarse, a discreción del empresario, a OJT (n_s^J) o a trabajo en sentido estricto (n_s^w). Fuera de la empresa, el trabajador podrá dedicar un tiempo n_s^S a producir capital humano básico. La ecuación que describe el reparto de tiempo total será:

$$1 = n_s^S + n_s^J + n_s^w \quad (4.244)$$

En este caso el salario real no se definirá por unidad de capital humano, sino por unidad de tiempo, retribuyendo los dos stocks de capital humano atesorados por el individuo. Además, el salario real no se fijará en competencia perfecta, sino que la productividad marginal del trabajo será superior al salario real (puede suponerse, por ejemplo, que el empresario tiene poder de negociación en los mercados de factores). Este fenómeno de compresión salarial, como señalan Acemoglu y Pischke (1999) y avanzó Becker (1962), es esencial para que se emprendan decisiones de inversión en formación por la empresa, ya que de lo contrario el margen que obtendría esta sería nulo, al diluirse la mayor productividad marginal del trabajador en una mayor capacidad de captación de las rentas. Por tanto, sin necesidad de explicitar en la modelización el origen del poder de mercado de la empresa, se supondrá, como es habitual en la literatura, que el salario real es una constante inferior a 1 multiplicada por la productividad marginal del tiempo. Mientras las empresas son los agentes que toman decisiones de acumulación respecto al capital específico, los hogares serán los encargados de asignar el tiempo hacia la adquisición de capital básico; obvio es decir que en equilibrio general las acciones de unos y otros deberán resultar compatibles ex ante. Las ecuaciones de acumulación de uno y otro activo presentan rendimientos constantes, sin que en esta ocasión -por mor de la simplificación de la tasa- existan productividades marginales cruzadas positivas en ninguna de los dos sentidos en las tecnologías de acumulación. Puede suponerse a este respecto que la formación básica es aquella que permite tener acceso a un conjunto del equipo de la empresa o participar en ciertos procesos, mientras que la específica faculta el trabajo en otro tipo de actividades complementarias pero de naturaleza esencialmente distinta de la empresa. Así, la posesión de conocimientos básicos no sería un prerrequisito para la adquisición de habilidades específicas. Con estas premisas, las tecnologías serían las siguientes:

$$a_{s+1}^{S} = a_s^S \left[1 + B^S n_s^S\right] \quad (4.244)$$

$$a_{s+1}^{J} = a_s^J \left[1 + B^J n_s^J\right] \quad (4.245)$$

Obsérvese que este tipo de diferenciación entre habilidades específicas y generales evita tener que situar el problema en un marco de equilibrio parcial, lo que no sucedería si se relacionase habilidades específicas con aquellas propias de una sola empresa del mercado y las básicas se vinculasen a aquellas utilizables en cualquier otra empresa competidora, supuesto que utiliza la mayor parte de la literatura de raíz microeconómica sobre OJT. Antes bien, esta otra visión permitiría perfilar una empresa representativa con estos dos tipos de procesos internos que contribuyen a generar el bien final. El poder de mercado en la fijación de salarios podría derivar del número de demandantes de trabajo[160].

---

160 Sea cual sea el reparto de la diferencia entre productividad marginal y salario real a la que llegan empresa y trabajadores, los salarios reales generados a partir la productividad marginal del tiempo de la función de producción propuesta serían congruentes con el trabajo de Mincer (1974) sobre la ecuación salarial con experiencia post-escolar. Es este, suponiendo que la adquisición de capacidades post-escolares se realiza a un coste decreciente en la experiencia, el salario tiene un primer componente igual a la tasa de retorno media aplicada a los años de escolarización más dos términos (uno lineal y otro cuadrático) en la experiencia post-escolar. En este modelo, el trabajador deriva de la inversión en conocimiento básico un retorno (que, medido descentralizadamente, sería modulado por aquella parte de la productividad marginal de la que se apropia la empresa) creciente en el stock de capital humano específico adquirido en la empresa, el cual a su vez se encuentra positivamente correlacionado con el tiempo de formación interno. Numerosos autores han derivado posteriormente ecuaciones salariales con OJT en el espíritu de la de Mincer; de manera notable y entre los últimos trabajos de esta rama, tiene especial interés el de Heckman et al. (2008).

En cualquier caso, si el problema se resolviera en los términos expuestos, daría lugar a tasas de retorno socialmente ineficientes, ya que las rentas marginales de empresa y hogar representativo dependen de las decisiones cruzadas de uno y otro, sin que esta dependencia quede internalizada en sus respectivos problemas de internalización. Por ello se recurre a derivar la tasa en un contexto de maximización del excedente conjunto de ambos, esto es, la producción del bien compuesto (que depende positivamente de los stocks de ambas clases de capital humano y negativamente de los tiempos destinados a su acumulación) sujeta a las ecuaciones de acumulación de capital humano básico y específico. Los problemas estáticos añaden habitualmente una función creciente convexa de costes de entrenamiento, que si se asume por la empresa impediría obtener una tasa de retorno de buen comportamiento en estado estacionario. Respecto a estos costes adicionales, se supondrá en este contexto que son despreciables[161]. Por otro lado, la función objetivo implicitamente reconoce la existencia de estos costes, en cuanto que el tiempo de acumulación es detraido a la producción del bien final. Una propiedad importante de esta solución conjunta es que permite omitir modelizar las circunstancias que llevan a las empresas a disfrutar de poder de mercado, ya que la retribución a las horas trabajadas no forma parte del excedente total. Por tanto el grado de competencia existente o la cuña entre productividad marginal y salarios reales no influye en la forma que adopta la tasa de retorno cuando esta se formula eficientemente. Cuestión distinta es que la modelización del reparto del excedente en un entorno de competencia imperfecta, una determinado el tamaño de este al concerse las sendas de los stocks en equilibrio general, debería realizarse mediante supuestos ad-hoc. Estas una de las limitaciones de intentar extrapolar la modelización de OJT, mientras que en equiibrio parcial es más sencillo el recurso a equilibrios de Nash u otras fórmulas similares basadas en la competencia entre rivales para endogeneizar el reparto de este excedente, así como a diferentes fricciones en el mercado de trabajo para determinar el tamaño de la cuña entre productividad marginal y salarios reales. En la misma línea, el paso a equilibrio general elimina otro acicate para la empresa en relación con la provisión de formación específica, como es la reducción de la probabilidad de salida del trabajador de la empresa, que aquí no tiene cabida al considerarse una empresa representativa.

Teniendo en cuenta todas estas cautelas, las tasas de retorno resultantes de este proceso de optimización serían las siguientes:

---

161 Si se supone que estos costes revisten la forma de una pérdida de una fracción de producción, incluso si esta fracción es solamente lineal respecto al tiempo de formación en la empresa la función objetivo del problema deviene convexa si se exige que la productividad marginal del tiempo sea positiva.

$$rr_{s,s+1}^{Sn}\Big|_{ge} = \frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}a_{s+1}^{J}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{S}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}B^S}{\alpha_2 K_s^{\alpha_1}\left(n_s^w\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^J\right)^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} + \frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{J}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{S}\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}{K_s^{\alpha_1}\left(n_s^w\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^J\right)^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{-\alpha_1-\alpha_2}}\left[1+B^S n_{s+1}^S\right] \quad (4.246)$$

$$rr_{s,s+1}^{Jn}\Big|_{ge} = \frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{J}\right)^{\alpha_2}\left(a_{s+1}^{S}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}B^J}{K_s^{\alpha_1}\left(n_s^w\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^J\right)^{\alpha_2}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} + \frac{K_{s+1}^{\alpha_1}\left(n_{s+1}^{w}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{J}\right)^{\alpha_2-1}\left(a_{s+1}^{S}\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{K_s^{\alpha_1}\left(n_s^w\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^J\right)^{\alpha_2-1}\left(a_s^S\right)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left[1+B^J n_{s+1}^J\right] \quad (4.247)$$

Suponiendo que estas tasas se consideraran de equilibrio general, la solución estacionaria se caracteriza por tiempos de entrenamiento y trabajo efectivo constantes, así como por una igualación de las tasas de acumulación de todos los activos. Las tasas evaluadas a lo largo de esta última senda cobran una expresión familiar, denominando Γ el ritmo de acumulación bruto de cualquiera de los tres activos:

$$rr_{s,s+1}^{Sn}\Big|_{ge,ss} = \frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)B^S\left(1-n^J-n^S\right)}{\alpha_2}+\Gamma \quad (4.248)$$

$$rr_{s,s+1}^{Jn}\Big|_{ge,ss} = \Gamma B^J\left(1-n^J-n^S\right)+\Gamma \quad (4.249)$$

Las derivadas parciales de las tasas respecto a las productividades directas de las respectivas tecnologías de acumulación son positivas, en ambos casos. Sin embargo, las derivadas respecto al tiempo de producción de cada activo no ofrecen un signo definido a priori, como sucedía en algunos de los casos precedentes. El signo negativo de la tasa de educación básica respecto al tiempo invertido en el activo será negativo si, como en casos anteriores, $1-\alpha_1 > 2\alpha_2$; el del tiempo de entrenamiento en la tasa de retorno de la formación específica exige para ser negativo que $n^J > \frac{\left(1-n^S\right)}{2}$. **El planteamiento del problema en 2 períodos, con depreciación total de los stocks al final del segundo, evitaría el término de ganancias de capital de las tasas y generaría signos indefinidos respecto a los tiempos de producción de los capitales, siendo inequívocamente negativos en ambos.**

Otra posibilidad para construir la tasa sería obviar la existencia de un capital humano básico y centrar la atención en dos activos reales: el capital humano, de cuya provisión se encarga la empresa representativa y el capital físico. En este caso no sería necesario partir de la maximización del excedente, ya que las decisiones de acumulación serían adoptadas íntegramente por la empresa. Si esta se apropia de un porcentaje $1-\beta$ de la productividad marginal del trabajador, la tasa de retorno coincidiría con la del capital específico, solo que la renta marginal estaría multiplicada por dicho coeficiente. Este porcentaje, que podría determinarse en un contexto de teoría de la búsqueda en el mercado de trabajo, es sin embargo más complicado de racionalizar en equilibrio general cuando el entorno es tan estilizado como el descrito. De aceptarse no obstante la exogeneidad del parámetro y trasladando la tasa resultante a equilibrio general, la condición de pendiente negativa de la tasa respecto al tiempo de formación sería:

$$n^J > \frac{\beta + (1-\beta)B^J}{2(1-\beta)B^J} \quad (4.250)$$

Para que esta desigualdad pudiera cumplirse, una condición necesaria, exigible para que el segundo miembro fuera menor que 1, sería:

$$\beta < \frac{B^J}{1+B^J} \quad (4.251)$$

Análogamente a lo establecido antes, el signo sería negativo cuando el problema se plantea en un horizonte de 2 períodos.

IV.7. Tasas de retorno con rendimientos decrecientes y crecientes a escala. Tasas de retorno sociales.

IV.7.1. Tasas de retorno con rendimientos decrecientes a escala

En este capítulo se plantean funciones de aprendizaje en las que se abandona el supuesto, mantenido hasta el momento, de rendimientos constantes a escala del capital humano. Utilizaremos las estructuras funcionales que se describen a continuación para derivar las tasas. En cualquier caso se supondrá, como hasta ahora, una tasa de depreciación nula para el capital humano, así como funciones de inversión en las que solamente existe un input variable, destacando los resultados para equilibrio general. Comenzaremos analizando el caso de rendimientos decrecientes.

Tasa del input x. Bajo rendimientos decrecientes del capital humano, la dinámica de transición tiende a hacerse más operativa, en el sentido de que en estado estacionario el valor de x puede ser constante y, las restantes endógenas, crecer a la misma tasa neta que dicho activo (cero). La ecuación de acumulación sería la siguiente:

$$a_{s+1}^h = a_s^h \left[1 + B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \left(\overline{n}_s^h\right)^{1-\varepsilon} \left(x_s^h\right)^{\varepsilon} \right] \Rightarrow a_{s+1}^h - a_s^h = i_s^h = h\left(a_s^h, x_s^h\right) = B\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon} \left(\overline{n}_s^h\right)^{1-\varepsilon} \left(x_s^h\right)^{\varepsilon}$$

$$0 < \gamma \leq 1;\ 0 < \varepsilon < 1;\ \overline{n}_s^h = 1 - \overline{n}_s^w \quad (4.252)$$

La función de inversión en capital humano tomará, pues, una estructura Cobb-Douglas con rendimientos constantes en el conjunto de los inputs, entendiendo como tales la fracción de tiempo destinada al estudio y el gasto en educación. Conforme a la especificación realizada, la tasa neta de crecimiento del capital humano será igual, conforme a estos supuestos, a $\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(\overline{n}_s^h\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\gamma}$, función decreciente y convexa del nivel de capital humano y que presenta una asíntota en cero cuando $a_s^h \to \infty$. Esto significa que la tasa de crecimiento bruta será igual a 1 en el límite o, lo que es lo mismo, no existe crecimiento a largo plazo al agotarse la acumulación de capital humano como motor del mismo.

Hechos estos supuestos, la formulación general de la tasa para 2 períodos será:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1} = AB(1-\alpha)\varepsilon\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha} K_{s+1}^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon-\alpha}\left[1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\right]^{-\alpha}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1} \quad (4.253)$$

Los signos de la pendiente y las derivadas principales son los siguientes:

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1}}{dx_s^h}<0;\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1}}{\partial K_{s+1}},\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1}}{\partial A},\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1}}{\partial B}>0;\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1}}{\partial \overline{n}^w},\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1}}{\partial a_s^h}<>0 \quad (4.254)$$

El signo de la pendiente de la tasa se mantiene negativo. En cuanto a los desplazamientos de la función, el del stock de capital físico es trivial y positivo, como también lo es el de la productividad multifactorial del sector del bien final. Un cambio en la productividad del aprendizaje presenta dos efectos de signo opuesto incluso en 2 períodos, aunque en este caso es posible concluir el predominio del signo positivo. Por un lado, disminuye el coste de la inversión, lo que ejerce una presión al alza sobre la tasa. Por otro, aumenta la productividad marginal del gasto en educación en s, incrementándose el stock de capital humano futuro y disminuyendo su productividad marginal. La derivada parcialrespecto a la jornada laboral exógena también es ambigua en dos períodos -sin que los rendimientos constantes en x alteren este resultado- y su influencia surge de 4 canales diferentes. Uno, el analizado en equilibrio parcial, de incremento de la renta marginal del activo dado un nivel salarial. Otro, de disminución del salario futuro vía productividad marginal decreciente. Este segundo genera un efecto positivo neto conjuntamente con el primero, dado el signo positivo de $1-\alpha$. Un tercero también positivo a través de la acumulación de capital humano en s+1, ya que un aumento de la jornada laboral disminuye el tiempo de aprendizaje residual y, consiguientemente, aumenta la productividad marginal del trabajo. Sin embargo es el cuarto canal el que produce la indeterminación, ya que una mayor jornada reduce la productividad marginal del input x, elevando el coste de producción del activo e impulsando a la baja la tasa de retorno.

Por último, la parcial respecto al capital humano presentan un signo ambiguo, producto de 2 efectos de signo contrario cuyo saldo no puede establecerse a priori: un menor coste de producción, por un lado, así como una menor productividad marginal por la concavidad de la función F respecto al trabajo efectivo. En última instancia el signo coincidirá con el del coeficiente $1-\varepsilon-\alpha$. Si este fuera positivo, de nuevo se repetirá la "path-dependency" en el mismo sentido estudiado en equilibrio parcial: a mayor capital humano inicial, tantos más incentivos a la acumulación. Si fuera negativo, por el contrario, la acumulación de distintos individuos con un nivel inicial distinto de formación acabaría convergiendo hacia un mismo nivel, al ser la mayor la tasa -ceteris paribus- de aquellos individuos con un menor stock de capital inicial.

Respecto a la tasa para más de 2 períodos, su expresión completa es la que se reproduce a continuación:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1} = AB(1-\alpha)\varepsilon\left(\overline{n}^{w}\right)^{1-\alpha} K_{s+1}^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon-\alpha}\left[1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^{w}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\right]^{-\alpha}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1}+$$
$$+\left(\frac{x_{s+1}^h}{x_s^h}\right)^{1-\varepsilon}\frac{\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)B\left(1-\overline{n}^{w}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_{s+1}^h\right)^{\varepsilon}}{\left[1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(\overline{n}^{h}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\right]} \quad (4.255)$$

Como se observa en las expresiones anteriores, la expresión de la tasa completa se complica considerablemente con rendimientos decrecientes en capital humano y más de 2 períodos, especialmente cuando los rendimientos en el input x son decrecientes. La consideración de rendimientos constantes en x, no obstante, no evita la inclusión del input x en el término de las ganancias de capital y, en particular, de x_{s+1}^h , lo que complica considerablemente la dinámica del modelo. Posiblemente por esta razón la literatura de crecimiento ha utilizado diversas aproximaciones para la simplificación de los problemas de acumulación de capital humano utilizando el gasto educativo como input en la tecnología de producción del activo. La más obvia de todas es la definición de los problemas de equilibrio general en un horizonte de 2 períodos, habitualmente en un marco de OLG, en cuyo se ha visto al principio que la tasa se simplifica considerablemente. Cuando los horizontes son más largos, cabe la solución de suponer una tasa de depreciación unitaria, aunque fuera de un marco de generaciones sucesivas de 1 período de vida esta no parece una solución demasiado congruente analíticamente, así como de entender la contribución del capital humano al proceso de acumulación como un fenómeno de efectos externos. Finalmente siempre caben salidas "intermedias", como la utilizada por De la Croix y Doepke (2004), que interpretan la aportación del capital humano como producto de la aportación de profesores, cuyo capital humano es la media de stock social. En un contexto de agentes heterogéneos como el que usan estos autores, este supuesto no es estrictamente equivalente a una externalidad, si bien con agente representativo sí lo sería, al coincidir la media del stock con aquel acumulado por este último. Para simplificar algo más la tasa se optará por esta última solución, manteniendo la tasa de depreciación nula. En este caso la tasa tomaría la siguiente forma:

$$rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1} = AB(1-\alpha)\varepsilon\left(\overline{n}^{w}\right)^{1-\alpha} K_{s+1}^{\alpha}\left(a_{s}^{h}\right)^{1-\varepsilon-\alpha}\left[1+B\left(a_{s}^{h}\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^{w}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_{s}^{h}\right)^{\varepsilon}\right]^{-\alpha}\left(x_{s}^{h}\right)^{\varepsilon-1} +$$
$$+\left(\frac{x_{s+1}^{h}}{x_{s}^{h}}\right)^{1-\varepsilon}\frac{1}{\left[1+B\left(a_{s}^{h}\right)^{-\varepsilon}\left(\overline{n}^{h}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_{s}^{h}\right)^{\varepsilon}\right]^{1-\varepsilon}} \quad (4.256)$$

Véase que la tasa no admite una expresión en función de la ratio capital físico/capital humano (ni siquiera aunque el número de períodos se restringiera a 2) y por tanto solo estuviera compuesta por el primer sumando. Esta versión simplificada de la tasa de retorno presenta las siguientes derivadas respecto a las variables que la componen (ver un desarrollo más detallado de las derivadas en el Anexo):

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{dx_{s}^{h}} < 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial x_{s+1}^{h}} > 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial B}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial \overline{n}^{w}}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial a_{s}^{h}} <> 0 \quad (4.257)$$

Por tanto, mantiene su signo negativo la pendiente de la tasa de retorno respecto al input que determina la inversión en capital humano en el período s. También conserva su signo habitual la derivada parcial respecto al nivel utilizado de dicho input en s+1, si bien lo hace solamente en virtud de la simplificación llevada a cabo de la tasa de retorno, con efectos externos del capital humano social hacia la función de aprendizaje. Por lo que respecta a la parcial respecto a la productividad total multifactorial, continúa siendo indefinida, como ya lo era con rendimientos constantes en equilibrio parcial. La condición suficiente para que la parcial respecto al capital humano en el momento s sea positiva será, como se demuestra en el Anexo, $1 \geq \alpha + \varepsilon$. Finalmente, la parcial respecto a la jornada laboral sigue indefinida, pese a que las ganancias de capital consideradas aportan a la derivada parcial un sumando inequívocamente positivo.

Pese a que se ha desarrollado la tasa en entornos de T períodos, la mayor parte de los trabajos utilizan el input x en horizontes que no exceden los 2 períodos, por la mayor facilidad para obtener soluciones cerradas en estos últimos. Esta circunstancia supone una desventaja de x frente al tiempo, ya que este factor es mucho más operativo incluso en horizontes infinitos. En cualquier caso, ni siquiera la existencia de rendimientos decrecientes en el capital humano es una condición suficiente para garantizar sendas acotadas y soluciones finitas para la variable de control x.

El siguiente ejemplo ilustra este problema. Una de las estructuras más utilizadas cuando el capital humano se produce a partir del input x son los modelos de generaciones solapadas de 3 períodos con utilidad aditivo-logarítmica, ya que permiten obtener una solución cerrada para la demanda de x; por lo demás, la estructura de las preferencias y otros supuestos del modelo se modulan para que la tasa de retorno sea equivalente a una de 2 períodos, con las consiguientes ventajas en términos de simplicidad matemática. Este tipo de modelo, por ejemplo, es utilizado por Boldrin y Montes (2005), aunque es relativamente frecuente en el ambito OLG. Las preferencias no presentan altruismo y dependen del consumo del segundo y tercer período de vida. Los individuos nacen con un stock de capital humano incorporado "genéticamente", que coincide con el de la última generación y que podrán ampliar mediante la realización de gastos en educación en el primer período de su vida; dichos gastos deberán financiarse mediante el recurso a crédito, puesto que en el primer período los individuos no trabajan. El stock de capital de una cohorte, tras el proceso educativo, alimentará sus rentas laborales en el segundo período -siendo rígido por lo demás el tiempo de tabajo-; estas se utilizarán para pagar el crédito del primer período, consumir y ahorrar, pudiendo invertirse tal ahorro en capital físico o préstamos a los jóvenes. Finalmente, en el tercer período se consumirá con cargo a las rentas de dicho ahorro. Las tasas de depreciación del capital físico y capital humano son unitarias, supuesto que en este entorno posibilita que la senda de los stocks de ambos activos puedan ser decrecientes. Así, la ecuación de acumulación del capital humano será la siguiente:

$$a_{s+1}^{h} = B\left(a_{s}^{h}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_{s}^{h}\right)^{\varepsilon} \quad (4.258)$$

Merece la pena dedicar algunas líneas a la tasa de retorno que resultaría de este tipo de planteamiento del problema en 2 períodos. La anomalía respecto al problema estándar enunciado antes es que la decisión sobre el gasto en educación se toma en el primer período, en el que no hay consumo (o si lo hay, no forma parte de las función de utilidad) y, por tanto, el nivel demandado de x no lleva asociado un valor sombra contemporáneo. Sin embargo calculando la cpo de x sobre la restricción presupuestaria del segundo período de vida, se tendrá una ecuación en la que sus dos sumandos pueden ser divididos por el valor sombra de la riqueza en s, quedando:

$$\left(1+r_{s-1}\right) \geq e_{s}B\varepsilon\left(a_{s}^{h}\right)^{1-\varepsilon}\left(x_{s}^{h}\right)^{\varepsilon-1} \quad (4.259)$$

En consecuencia, se recupera en el segundo miembro la expresión convencional de la tasa de retorno respecto a x para 2 períodos, así como su relación con la tasa de retorno del crédito. A pesar de no entrar en la cpo los valores sombra de la riqueza en períodos consecutivos, sí lo hace el tipo de interés, al financiarse necesariamente el gasto educativo efectuado en s-1 con cargo a crédito; en consecuencia, la renta marginal del activo deberá ser igual a dicho tipo de interés para que se realice una inversión positiva en el activo.

Hechas estas consideraciones, la igualación de las tasas de retorno de capital físico y capital humano permite obtener una relación entre el gasto en educación óptimo y el stock de capital demandado; tal igualación se produce, primero, porque la tasa de retorno del capital humano deberá igualarse al tipo de interés del crédito y, segundo, al igualarse dicho tipo de interés con la tasa de retorno del capital físico en el marco de la decisión sobre composición. En efecto, tras efectuar la correspondiente sustitución del salario real por la productividad marginal del trabajo efectivo, el resultado es[162][163]:

$$\alpha K_s^{\alpha-1}\left(a_s^h\right)^{1-\alpha}=(1-\alpha)\varepsilon K_s^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{-\alpha}B\left(a_{s-1}^h\right)^{1-\varepsilon}\left(x_{s-1}^h\right)^{\varepsilon-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{s-1}^h=\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha}K_s \quad (4.260)$$

Por otro lado, la estructura logarítmica de las preferencias y la secuencia de las decisiones del modelo garantizan una tasa constante de ahorro, de suerte que este puede expresarse como:

$$S_s=\frac{\beta}{1+\beta}\left[e_s a_s^h-\left(1+r_{s-1}\right)x_{s-1}^h\right] \quad (4.261)$$

El equilibrio del mercado de bienes exigirá que ex ante el ahorro coincida con los planes de inversión, de manera que:

$$S_s=x_s^h+K_{s+1} \quad (4.262)$$

La sustitución de las relaciones anteriores permite obtener, primero, el gasto educativo como proporción constante del ahorro del período y, segundo, las ecuaciones de acumulación de ambos activos como una estructura multiplicativa de los valores de ambos. Esto es:

---

162 Véase que, aunque el nivel de capital humano alcanzado en la madurez sirva como input a la acumulación de la futura generación, la falta de altruismo que caracteriza las preferencias impide que esta consideración se traslade a la derivación de la tasa de retorno.

163 Esta relación también puede obtenerse cuando tanto los rendimientos en el capital humano como del tiempo de aprendizaje son decrecientes y T=2, aunque en este caso la constante que liga a las dos variables en equilibrio general no es exclusivamente función de parámetros del modelo, sino también de los valores iniciales de las variables de estado. La relación no obstante es útil desde el punto de vista de la resolución del modelo, ya que permite establecer más fácilmente una relación dinámica $a_{s+1}^h=\phi\left(a_s^h\right)$ y resolver el estado estacionario.

$$K_{s+1} = A\frac{\beta}{1+\beta}\frac{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}{1+\varphi}K_s^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\alpha};\ \varphi = \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha} \quad (4.263)$$

$$a_{s+1}^h = B\left(A\frac{\beta}{1+\beta}\frac{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}{1+\varphi}\varphi\right)^{\varepsilon}\left(K_s\right)^{\alpha\varepsilon}\left(a_s^h\right)^{1-\alpha\varepsilon} \quad (4.264)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y particularizando al estado estacionario, se obtiene que la ratio de capitales físico y humano se hace constante en el mismo. También se pone de manifiesto que la tasa bruta de crecimiento de los stocks puede ser superior o inferior a la unidad, denotando con ello la posibilidad de que el sistema converja a una trampa de pobreza o presente crecimiento continuo; en este último caso al no haber condición de transversalidad no se presentaría el mismo problema que en horizontes infinitos, si bien la variable de control x tomaría un valor de equilibrio no acotado en el límite. **Si el crecimiento bruto de la ratio de capitales fuera inferior a la unidad** -lo cual resulta posible en un contexto en el que las tasas de depreciación de ambos activos son unitarias- l**a senda de equilibrio, que conduciría asintóticamente a una trampa de pobreza con stock de capital nulo, no sería en su integridad de equilibrio general**, puesto que en el límite se tiende a un punto en el que las cpo no estarían acotadas, a consecuencia de los rendimientos decrecientes en el input x. Es destacable también que solamente con rendimientos decrecientes en el capital humano y constantes en el conjunto de los inputs del mismo la ratio entre capitales será constante; puede comprobarse fácilmente en las anteriores ecuaciones que, si los rendimientos de este último activo fueran constantes, tal rayo constante no existiría y el valor de equilibrio x sería continuamente creciente, dando lugar a tasas de crecimiento del activo no acotadas.

En concreto, suponiendo en el mismo problema rendimientos constantes del capital humano la ratio entre capitales , no constante, pasaría a escribirse como:

$$\frac{K_{s+1}}{a_{s+1}^h} = \left[\Phi\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\alpha(1-\varepsilon)}};\Phi \equiv \frac{1}{B\varphi^{\varepsilon}}A^{1-\varepsilon}\left[\frac{\beta}{1-\beta}\right]^{1-\varepsilon}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}{1+\varphi}\right]^{1-\varepsilon} \quad (4.265)$$

Por tanto, si $1 > \alpha(1-\varepsilon)$, la ratio sería decreciente respecto al nivel del capital humano del período anterior y creciente si la desigualdad se verificara en sentido contrario. Se aprecia, en cualquier caso, que la relación es monótona y la única posibilidad de contar con una ratio constante y acotada sería que esta se hiciera 0. Se observa también que la tasa de acumulación bruta del capital humano se haría creciente tanto respecto a la ratio de capitales como al nivel del capital humano, por lo que salvo que ambas variables fueran constantes y acotadas la tasa no podría ser constante (esto es, no existiría estado estacionario en un sentido convencional).

Cuando los rendimientos en el input x son constantes (así como en el capital humano), aparentemente es posible derivar una relación proporcional entre la demanda del input y la posición óptima en el stock de capital físico. En efecto, igualando las dos tasas de retorno, se obtiene:

$$x_s^h = \frac{1-\alpha}{\alpha} K_{s+1} \quad (4.266)$$

Debe subrayarse que esta relación lleva siempre implícito el supuesto de que ninguno de los dos inputs sometidos a rendimientos decrecientes es nulo (en este caso, solo el stock de capital físico). Sin embargo, al sustituir en la restricción presupuestaria del período se obtiene que para este valor concreto de x la renta laboral neta de la devolución del crédito que generó la adquisición de x en el primer período de vida es nula, por lo que tanto el consumo, que es una proporción constante de dicha renta, como la posición en capital físico, lo serían, contradiciendo así el supuesto necesario para vincular x y K. De aquí que bajo esta tecnología esta relación entre las dos variables no sea aplicable para resolver el problema.

Continuando con una estructura de las tecnologías en la línea propuesta por Boldrin y Montes, con rendimientos decrecientes del capital humano en h, **la tasa de retorno derivada antes puede evaluarse también en estado estacionario dependiendo de cuál sea la tasa bruta de acumulación de las variables de estado**. Si esta fuera inferior a 1 (excepto en el límite en niveles nulos de las variables de control, en que ya se comentó antes que el problema no estaba definido) o superior a 1, no existe un estado estacionario como tal ni una tasa de retorno asociada al mismo, ya que ni los valores del capital humano, ni los del capital físico, ni consiguientemente los de x son constantes. Únicamente si la relación entre los parámetros del problema fuera tal que los dos stocks de capital fueran constantes (e, indirectamente, el nivel aplicado del input x) cabría hablar de una tasa de retorno estacionaria, que se formularía como:

$$rr_{s,s+1}^{hx}\Big|_{ge,ss}^{T=2;\varepsilon<1} = AK^{\alpha}(1-\alpha)\left(a^h\right)^{1-\varepsilon-\alpha} B\varepsilon\left(x^h\right)^{\varepsilon-1}\Gamma^{-\alpha};\ \Gamma = B\left(a^h\right)^{1-\varepsilon}\left(x^h\right)^{\varepsilon} \quad (4.267)$$

En este caso, la pendiente de la tasa seguiría siendo decreciente respecto a la cantidad aplicada del input x.

Tasa de retorno basada en el input tiempo. Esta versión alternativa de la tasa se formula a partir de la siguiente ecuación de acumulación:

$$a_{s+1}^h = a_s^h\left[1 + B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{1-\varepsilon}\right];\ i_s^h = B\left(a_s^h n_s^h\right)^{1-\varepsilon};\ 0<\varepsilon<1 \quad (4.268)$$

La tasa de retorno en dos períodos será, por tanto:

Denominando $\Gamma \equiv \left[1+B\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{1-\varepsilon}\right] > 0;$

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T=2;\varepsilon<1} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)\left(\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right)^{-\alpha}\Gamma^{-\alpha}\left(1-n_{s+1}^h\right)B\left(1-\varepsilon\right)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{-\varepsilon} \quad (4.269)$$

Varios aspectos diferenciales con la tasa de x para T=2 pueden observarse. El primero, tal como sucedía ya en equilibrio general con rendimientos constantes en el capital humano, la tasa no depende de la productividad multifactorial de la tecnología del bien final. Por otro lado, y a diferencia del resultado para $\varepsilon = 0$, la tasa muestra *path-dependency* incluso para 2 períodos, con una dependencia negativa respecto al capital humano de partida que facilita la convergencia entre individuos con un nivel de capital diferente en el momento inicial de su vida. **Esta propiedad de convergencia es específica de la tasa respecto al tiempo, ya que como acabamos de ver, no está garantizada en la tasa respecto a x, en la que depende del signo de** $1-\alpha-\varepsilon$ **.** La tasa completa para T períodos es la que sigue:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<2} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right)^{-\alpha}\Gamma^{-\alpha}\left(n_s^h\right)^{-\varepsilon}\left\{\begin{array}{l} B\left(1-\varepsilon\right)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-n_{s+1}^h\right)+ \\ +\Gamma^{\varepsilon}\left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon}\left[1+\left(1-\varepsilon\right)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\Gamma^{-\varepsilon}B\left(n_{s+1}^h\right)^{1-\varepsilon}\right]\end{array}\right\} (4.270)$$

Siguiendo la operativa utilizada con la tasa respecto a x, se adoptarán los supuestos necesarios para simplificar la formulación de la tasa y, en concreto, suprimir uno de los sumandos de las ganancias de capital. Este objetivo podrá conseguirse mediante una hipótesis similar a la empleada antes: en el proceso educativo es necesario el concurso de dos factores productivos: el tiempo que cada individuo dedica a la producción del activo, así como la acción del profesorado, cuyo capital humano se identifica con la media social. En este nuevo entorno, la expresión de la tasa puede recortarse ligeramente:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<2} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right)^{-\alpha}\Gamma^{-\alpha}\left(n_s^h\right)^{-\varepsilon}\left\{B\left(1-\varepsilon\right)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-n_{s+1}^h\right)+\Gamma^{\varepsilon}\left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon}\right\}(4.271)$$

El Anexo detalla la obtención analítica de las principales propiedades de la tasa. Las propiedades son mejores que la tasa de retorno a partir de x, en el sentido de que las condiciones suficientes para la determinación de los signos de las derivadas presentan una mayor simplicidad y además son comunes. En particular, la condición suficiente $\varepsilon \geq \alpha$ garantiza simultáneamente el signo negativo de la pendiente de la tasa de retorno, así como el signo positivo y negativo respectivamente de las derivadas parciales respecto a B y el capital humano en s, respectivamente. La parcial respecto a n_{s+1}^h será positiva incluso aunque no se cumpla la condición paramétrica que acab de enunciarse. Así pues, siempre y cuando $\varepsilon \geq \alpha$

$$\frac{d\,rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{dn_s^h}<0;\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial n_{s+1}^h}>0;\ \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial B}>0;\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial a_s^h}<0 \quad (4.272)$$

En cuanto a la **tasa de retorno a lo largo de la senda estacionaria,** hay que tener en cuenta que, respecto al input n y a diferencia de lo concluido en general para el input x, para valores finitos de capital humano puede alcanzarse una senda con un valor constante de n^h , -con o sin dinámica de transición; véase a este respecto, por ejemplo, en Glomm y Ravikumar (1992) un caso sin dinámica de transición-. Antes de derivar la tasa hagamos una reflexión sobre la tipología de estados estacionarios que pueden encontrarse con esta tecnología de acumulación. Para ello, se distinguirán dos casos. Primero, $\delta=1$ (muy habitual en los modelos OLG). En este caso, evaluando en el estado estacionario la ecuación de acumulación del capital humano, se tiene que una solución positiva en el capital humano y en tlempo de aprendizaje estaría dada por:

$$a^h=\left[B\left(n^h\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (4.273)$$

Además, este equilibrio estacionario, dada la concavidad de la tecnología de acumulación respecto al capital humano, sería estable. La segunda alternativa sería un equilibrio esquina en el stock (equilibrio estacionario inestable). Para que esta solución nula se materialice y dado que la tasa de depreciación es unitaria, bastaría que en un período el tiempo de aprendizaje de equilibrio se anulara. Desde la perspectiva de equilibrio general, sin embargo, y a la vista de la tasa de retorno, este último solo sería posible en 2 circunstancias muy concretas: i) Rendimientos constantes en el tiempo de aprendizaje, que acompañaran a los decrecientes en el capital humano, combinación que como se comentó antes no parece conceptualmente muy apropiada, o ii) Límite positivo de la productividad marginal del tiempo de aprendizaje cuando este tiende a cero. Sería el caso de una tecnología como la siguiente:

$$a_{s+1}^h=a_s^h\left[1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(\theta+n_s^h\right)^{1-\varepsilon}\right];\ \theta>0 \quad (4.274)$$

El segundo supuesto[164], más habitual en modelos de ciclo vital u horizontes infinitos, sería $\delta=0$. En este caso la ecuación dinámica, evaluada en el estado estacionario, sería:

$$0=B\left(a^h\right)^{1-\varepsilon}\left(n^h\right)^{1-\varepsilon} \quad (4.275)$$

---

[164] El caso intermedio de $0<\delta<1$ es asimilable al primero, en cuanto que presenta una solución positiva dada por $a^h=(\delta)^{-\frac{1}{\varepsilon}}\left[B\left(n^h\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}$. La solución nula, sin embargo, como en el segundo caso no sería factible salvo que el stock inicial de capital humano fuera nulo.

De nuevo la situación nos remite a una solución estacionaria esquina en el capital humano; ahora bien, teniendo en cuenta que la tasa de depreciación es nula, esta solo podría alcanzarse si el stock inicial de capital humano fuera nulo. En caso contrario, el sistema no alcanzaría un estado estacionario para stocks de capital humano finitos, ya que incluso aunque la cantidad aplicada del input tiempo fuera siempre nula, el stock de capital humano acumulado no podría serlo. Consiguientemente, el único estado estacionario sería uno asintótico, en el que la tasa neta de acumulación del capital humano tendería a cero a medida que el stock se acercara a infinito y, por tanto, el stock se estabilizaría con independencia del valor de n^h .

Hechas estas consideraciones, se distinguirá la tasa de retorno estacionaria para 2 períodos -bajo el supuesto de tasa de depreciación unitaria- y para horizontes infinitos, con tasa de depreciación nula. En el primero de los casos y para la solución esta, la tasa de retorno adoptaría la siguiente forma:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T=2;\varepsilon<1} = \Gamma^{-\alpha}\left(1-n^h\right)B(1-\varepsilon)\left(a^h\right)^{-\varepsilon}\left(n^h\right)^{-\varepsilon};\ \Gamma = 1+B\left(a^h\right)^{-\varepsilon}\left(n^h\right)^{1-\varepsilon} \quad (4.276)$$

De este modo, la tasa sería constante, en coherencia con una inversión bruta positiva y también constante. Para una solución estacionaria nula del capital humano, la tasa de retorno no está definida, al hacerse infinita. Para que el tiempo de aprendizaje se anulara en un período, dando lugar a una secuencia infinita de stocks de capital humano cero, debería verificarse que la tasa de retorno del capital físico y la del capital humano observaran la siguiente desigualdad:

$$rr_{s,s+1}^{K}\Big|_{ge}^{T=2} > \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\Gamma^{-\alpha}(1-\varepsilon)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}(\theta)^{-\varepsilon};\ \Gamma = 1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}(\theta)^{1-\varepsilon} \quad (4.277)$$

Desigualdad cuyo cumplimiento podría asociarse a la aparición de una trampa de pobreza y que tiene tantas más posibilidades de verificarse para niveles bajos del capital físico, que elevarían su productividad marginal y su tasa de retorno. Pasando a la tasa de retorno para más de 2 períodos y evaluándola para una tasa de depreciación nula, esta sería en el estado estacionario asintótico que genera un nivel constante de capital humano:

$$\lim_{a_s^h\to\infty} rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T>2;\varepsilon<1} = 1 \quad (4.278)$$

Constancia de la tasa que soporta la constancia en el nivel del activo con independencia del nivel de n.

Un último caso que se comentará en este epígrafe es la versión de Rebelo (1991) del modelo de Lucas, que restaura la simetría entre los dos sectores productores, en la medida en que ambos se nutren de capital físico y capital humano como inputs[165]. Las dos tecnologías se formulan por tanto mediante las dos ecuaciones siguientes, que describen en ambos casos funciones de producción Cobb-Douglas de rendimientos constantes a escala:

$$Y_s = A\left(n_s^{KY} K_s\right)^{\alpha} \left(n_s^{w} a_s^{h}\right)^{1-\alpha};\ \alpha \in (0,1)\ (4.279)$$

$$a_{s+1}^{h} = a_s^{h}\left[1 + B\left(n_s^{KY} K_s\right)^{\varepsilon} \left(a_s^{h}\right)^{-\varepsilon} \left(n_s^{h}\right)^{1-\varepsilon}\right];\ \varepsilon \in (0,1)\ (4.280)$$

Tanto la tasa de retorno del capital humano como la del capital físico se verán modificadas. Respecto a la primera, cabe la posibilidad tanto de calcular la tasa de retorno respecto al tiempo de aprendizaje como respecto a la fracción del capital físico dedicado a la producción del otro activo real; es claro que en un equilibrio en el que se utilicen ambos inputs ambas tasas de retorno se igualarán. Comenzando por la primera de ellas y centrándonos en el escenario de hogar + empresa representativa, para más de 2 períodos:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2,\overline{\varepsilon}} = \frac{e_{s+1}\left(k_{s+1}^{Y}\right)}{e_s\left(k_s^{Y}\right)}\left[B(1-\varepsilon)k_s^{H} + \frac{k_s^{H}}{k_{s+1}^{H}}\right] (4.281)$$

La tasa contiene no depende del tiempo de aprendizaje como variable independiente, sino solamente de las dos ratios de capital sectoriales, que se definen como:

$$k_s^{Y} \equiv \frac{n_s^{KY} K_s}{n_s^{w} a_s^{h}}; k_s^{H} \equiv \frac{n_s^{KH} K_s}{n_s^{h} a_s^{h}};\ 1 = n_s^{KY} + n_s^{KH};\ 1 = n_s^{h} + n_s^{w}\ (4.282)$$

$$k_s^{H} = \frac{\left(1 - n_s^{KY}\right) n_s^{w}}{\left(1 - n_s^{w}\right) n_s^{KY}} k_s^{Y}\ (4.283)$$

Respecto a la tasa de retorno del capital humano basada en el capital físico como input variable, esta se construirá utilizando la cpo respecto a n_s^{KH} y combinándola con aquella respecto a la posición en capital humano. La primera adopta la forma, para un valor interior de dicha fracción de tiempo:

$$\lambda_s q_s = \mu_s B\varepsilon\left(k_s^{H}\right)^{\varepsilon-1}\left(K_s\right)^{\varepsilon} (4.284)$$

Esto es, el coste marginal de utilización del capital físico en aprendizaje (que está dado por el coste de oportunidad de no utilización en la producción del bien final, esto es, el alquiler al que se renuncia) se iguala al beneficio marginal, medido en términos de la productividad marginal del mismo activo en la tecnología generadora de capital humano.

---

[165] El modelo de comenta con mayor amplitud en el capítulo 2.

En consecuencia, la tasa de retorno respecto al capital físico, utilizando que $q_s = A\left(k_s^Y\right)^{\alpha-1} K_s$ se escribirá como:

$$rr_{s,s+1}^{hK}\Big|_{ge}^{T>2,\bar{e}} = \frac{e_{s+1}\left(k_{s+1}^Y\right)\left(1-n_{s+1}^h\right)B\varepsilon\left(k_{s+1}^H\right)^{\varepsilon-1}}{A\left(k_s^Y\right)^{\alpha-1}} + \frac{q_{s+1}}{q_s}\left(\frac{k_s^H}{k_{s+1}^H}\right)^{\varepsilon-1}\frac{K_s}{K_{s+1}}\left[1+B\varepsilon\left(k_{s+1}^H\right)^{\varepsilon} n_{s+1}^h\right] \quad (4.285)$$

Esta segunda tasa tiene una forma menos compacta que la primera, dependiendo no solamente de las dos ratios de capital, sino también de la senda de alquileres y el tiempo de aprendizaje futuro. En cuanto a la tasa de retorno del capital físico, esta se compondrá de dos elementos. Por un lado, el aumento marginal de la posición en s+1 implicará una productividad marginal positiva en el sector de bienes finales, más el correspondiente valor residual del activo, ambos términos valorados por la utilidad marginal del consumo en s+1. Pero por otro, hay también una productividad marginal en la tecnología educativa, homogeneizada en términos de bienestar por el valor sombra del capital humano. Sustituyendo este último en función de λ a partir de la ecuación (4.284) y q por su valor en la maximización del beneficio respecto a la fracción de capital físico de la empresa representativa, la versión final de la tasa será:

$$rr_{s,s+1}^{K}\Big|_{ge}^{\bar{e}} = 1 + A\left(k_{s+1}^Y\right)^{\alpha-1} \quad (4.286)$$

En estado estacionario las asignaciones de tiempo y las fracciones de utilización del capital son constantes, con ratios k constantes en cada sector y, consiguientemente, relacionadas a través de una constante de proporcionalidad. A pesar de que el capital humano tiene rendimientos decrecientes en la tecnología educativa, la presencia de otro input acumulativo y la existencia de rendimientos constantes en el conjunto de ambos garantiza una tasa de crecimiento positiva a largo plazo[166]; dada la constancia de las n, esto implica una ratio entre ambos tipos de capital constante y, de nuevo la difusión de la tasa de acumulación del capital humano hacia la acumulación de capital físico y el con-

166 En el planteamiento original de Rebelo la tasa de depreciación de ambos activos se encuentra comprendida entre 0 y 1, por lo que un crecimiento positivo a largo plazo no está completamente garantizado si la inversión bruta es tal que no compensa la depreciación.

sumo. Esta caracterización del estado estacionario permite escribir la igualdad encadenada entre las tres tasas, que devienen constantes[167], como:

$$B(1-\varepsilon)k^{H}+1=\frac{e\left(k^{Y}\right)\left(1-n^{h}\right)B\varepsilon\left(k^{H}\right)^{\varepsilon-1}}{A\left(k^{Y}\right)^{\alpha-1}}+\Gamma\left[1+B\varepsilon\left(k^{H}\right)^{\varepsilon}n^{h}\right]=1+A\left(k^{Y}\right)^{\alpha-1} \quad (4.287)$$

IV.7.2. **Rendimientos crecientes**.

Las consecuencias de tecnologías de acumulación con rendimientos crecientes en el capital humano pueden analizarse desde varias perspectivas. La primera, mediante una combinación de rendimientos crecientes y concavidad respecto al capital humano; desde el punto de vista de modelización, este enfoque es compatible tanto con la existencia de efectos externos como con la ausencia de ellos. La ventaja de este planteamiento es que la estructura de la tecnología no constiuye un problema en cuanto a la concavidad general del problema de optimización y la aplicación de la condición suficiente del Teorema de Kuhn-Tucker. La segunda vía implica rendimientos sociales crecientes y convexidad respecto al capital humano de al menos una de las dos tecnologías, la de aprendizaje o la de producción del bien final; este enfoque sí suele llevar aparejadas externalidades de algún tipo y, como se describió detalladamente en el apartado 2, las combinaciones de efectos externos son muy variadas, por lo que nos centraremos en un caso que puede considerarse representativo y en el que la concavidad del problema de optimización sea suficiente para permitir la validez del Teorema de Arrow. En cualquier caso, la asociación frecuente de externalidades en este tipo de construcciones hace recomendable el estudio de la tasa de retorno en el contexto de la distinción entre tasas de retorno sociales y privadas. Por otra parte y como aspecto horizontal a todo este apartado, la discusión se restringirá además a la tasa de retorno elaborada a partir del input tiempo, por ser la utilizada comúnmente por la literatura en entornos de rendimientos crecientes.

Tasa de retorno respecto al tiempo. La estructura de la tecnología de acumulación que se propone para este tipo de rendimientos es la siguiente:

$$a_{s+1}^{h}=a_{s}^{h}\left\{1+\left[\theta-\left(a_{s}^{h}\right)^{-\varepsilon}\right]Bn_{s}^{h}\right\};\theta>0;\varepsilon>1 \quad (4.288)$$

---

[167] La segunda de las tasas se reduciría a $\frac{e\left(k^{Y}\right)\left(1-n^{h}\right)B\varepsilon\left(k^{H}\right)^{\varepsilon-1}}{A\left(k^{Y}\right)^{\alpha-1}}+\Gamma$ suponiendo, como en casos precedentes, que la contribución del capital humano a h se realiza íntegramente vía efectos externos.

La estructura de la ecuación de acumulación es à la Azariadis y Drazen (1990), con dos elementos dependientes del capital humano dentro de la función de inversión. Por un lado, un primer componente proporcional al tiempo de aprendizaje à la Lucas y, por otro, uno añadido dependiente del stock completo y no solamente del utilizado en el aprendizaje, creciente en aquella variable. Puede observarse también que la función de inversión bruta h presenta una primera derivada positiva respecto a este y una segunda negativa, confimando su crecimiento y concavidad. La tasa de acumulación neta presenta una asíntota en $\theta B n^h$.

$$h_a\left(a_s^h, n_s^h\right) = B n_s^h \left\{ \left[\theta - \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \right] + \varepsilon \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \right\} > 0 \quad (4.289)$$

$$h_{aa}\left(a_s^h, n_s^h\right) = B n_s^h \varepsilon \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon-1} (1-\varepsilon) < 0 \quad (4.290)$$

$$\lim_{a_s^h \to \infty} \left[\theta - \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \right] = \theta \quad (4.291)$$

Antes de comenzar a estudiar las propiedades de la tasa de retorno, introduciremos una restricción paramétrica para delimitar algo más el signo de las derivadas:

$$\theta > \left(a_0^h\right)^{-\varepsilon} \quad (4.292)$$

De este modo la tasa neta de crecimiento del capital humano será siempre positiva, al ser su primera derivada mayor que cero. Utilizaremos la siguiente notación para abreviar:

$$d_s \equiv \left[\theta - \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \right] > 0 \quad (4.293)$$

La tasa de retorno para 2 períodos tomará la forma:

$$\left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T=2;IR} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s} \right)^{\alpha} \left(1 - n_s^h\right)^{\alpha} \Gamma^{-\alpha} B d_s; \; \Gamma = \left[1 + d_s B n_s^h \right] > 0 \quad (4.294)$$

El superíndice IR hace referencia a los rendimientos crecientes que caracterizan la tecnología educativa. Tanto por revestir mayor complejidad matemática la tasa en este caso como por el hecho de que los rendimientos crecientes van asociados casi siempre a horizontes de 2 períodos en la literatura, resulta interesante el ejercicio de analizar por separado las propiedades de la tasa para 2 y más períodos. En el caso más sencillo, los signos de las derivadas, que se reproducen a continuación, se encuentran justificados al comienzo del Anexo:

$$\frac{d \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T=2;IR}}{d n_s^h} < 0; \frac{\partial \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T=2;IR}}{\partial B}, \frac{\partial \left. rr_{s,s+1}^{h,n} \right|_{ge}^{T=2;IR}}{\partial a_s^h} > 0 \quad (4.295)$$

Esto es, la pendiente conserva el signo adecuado respecto al input en s, mientras que el signo inequívoco de la parcial respecto a B y a_s^h ; en el caso de la parcial respecto al capital humano, el signo positivo -consistente con la estructura de rendimientos decrecientes- denota una creciente divergencia en los estímulos a la inversión cuando los agentes son heterogéneos en cuanto a su posición de partida.

Por lo que respecta a la tasa de retorno completa en un horizonte de más de 2 períodos, en este contexto ésta se formula del siguiente modo:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \Gamma^{-\alpha} \left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} d_s \left\{ \frac{\left(1+\left(a_{s+1}^h d_{a,s+1} + d_{s+1}\right) B n_{s+1}^h\right)}{\left[\theta - \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \Gamma^{-\varepsilon}\right]} + \left(1-n_{s+1}^h\right) B \right\};$$

$$\left[\theta - \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \Gamma^{-\varepsilon}\right] = d_{s+1} \quad (4.296)$$

Tal como se hizo en el apartado sobre rendimientos decrecientes, para hacer menos farragoso el estudio de las propedades de la tasa puede suponerse que la influencia del capital humano en la tecnología de acumulación viene dado por efectos externos, por lo que las ganancias de capital perderán uno de sus elementos dentro de la tasa de retorno privada. Con este supuesto, la tasa de retorno se simplifica a la siguiente expresión:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \Gamma^{-\alpha} \left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} d_s \left\{ \frac{1}{\left[\theta - \left(a_s^h\right)^{-\varepsilon} \Gamma^{-\varepsilon}\right]} + \left(1-n_{s+1}^h\right) B \right\} \quad (4.297)$$

Las principales propiedades de la tasa pueden encontrarse en el Anexo. Si bien la pendiente de la tasa de retorno mantiene su signo negativo, las restantes derivadas parciales ofrecen un resultado ambiguo. Esto es:

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;}}{dn_s^h} < 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;I}}{\partial n_{s+1}^h} > 0; \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2}}{\partial B}, \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2}}{\partial a_s^h} <> 0 \quad (4.298)$$

En comparación con la tasa para T=2, el signo negativo de la pendiente respecto a n_s^h, mientras que la condición suficiente para que el signo de la parcial respecto a n_{s+1}^h sea positivo será $B \geq 1$, de cumplimiento habitual. Los signos respecto a B y el capital humano son a priori indefinidos a consecuencia de la introducción de un solo término de ganancias de capital.

Si se opta por la versión de la tasa en función de la ratio capital físico/capital humano, esta no experimentará una simplificación sustancial, escribiéndose como sigue:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR} = \left(\frac{\hat{k}_{s+1}}{\hat{k}_s}\right)^{\alpha}\left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} d_s\left\{\frac{1}{\left[\theta-\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\Gamma^{-\varepsilon}\right]}+\left(1-n_{s+1}^h\right)B\right\} \text{(4.299)}$$

Sin embargo en este caso la tasa no presenta mejores propiedades y las derivadas parciales que antes eran ambiguas en signo siguen siéndolo incluso en esta versión reducida de la tasa. Alternativamente, la tasa en una economía de hogar representativo y empresa representativa tomaría la forma:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR} = \frac{e_{s+1}\left(k_{s+1}\right)}{e_s\left(k_s\right)} d_s\left\{\frac{1}{\left[\theta-\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\Gamma^{-\varepsilon}\right]}+\left(1-n_{s+1}^h\right)B\right\} \text{(300)}$$

Esto es, ninguna de las vías alternativas de reexpresión de la tasa permite eliminar el capital humano como parte integrante de la misma, ni en 2 períodos ni en horizontes más prolongados. Por tanto de nuevo la tasa exhibe path-dependency en todas sus formulaciones.

La tasa estacionaria. Antes de calcular la tasa, se discutirán las posibles características del estado estacionario, distinguiendo -como se hizo en el mismo apartado con rendimientos decrecientes- situaciones en función del valor de la tasa de depreciación del capital humano. Comenzando por $\delta = 1$, solo hay un posible estado estacionario a considerar, aquel dado por un valor constante positivo tanto de la posición en capital humano como del tiempo de aprendizaje, siempre que el primero sea estrictamente positivo:

$$a^h = \left[\theta - \frac{1}{Bn^h}\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} \text{(4.301)}$$

Dada la concavidad de la ecuación de acumulación respecto a n, este estado estacionario sería estable, luego no cabe plantear la búsqueda de otros estados estacionarios asintóticos. La otra posible solución, dada por $a^h = 0$ debería descartarse en este tipo de tecnología, ya que $h \to -\infty$, con lo que la tasa de acumulación no quedaría acotada. Cuando $\delta = 0$ (caso planteado por Azariadis y Drazen con T=2), hay dos posibles situaciones que resuelven la ecuación:

$$0 = a^h\left[\theta - \left(a^h\right)^{-\varepsilon}\right]Bn^h \text{(4.302)}$$

Una de ellas puede ser una trampa de pobreza en la que, a partir de cierto momento, $n^h = 0$, haciendo que la posición en capital humano se estanque en un nivel positivo. A partir de este punto se entraría en la senda estacionaria y el verdadero estado estacionario se alcanzaría en el momento en que la ratio capital físico/humano se estabilizase. Otro posible estado estacionario tiene carácter asintótico, siempre que en tiempo finito no se hubiese entrado en una senda estacionaria con inversión bruta nula en capital humano. Teniendo en cuenta que la tecnología de acumulación de este último activo degenera asintóticamente en una estructura à la Lucas, podría alcanzarse en este contexto un estado estacionario con tiempo constante y tasa de crecimiento de los dos tipos de capital también constante.

En el análisis de la tasa en estado estacionario que se desarrolla a continuación se tocarán 3 posibles situaciones: tasa de depreciación unitaria en 2 períodos, tasa nula en 2 períodos (por tratarse del caso notable de Azariadis-Drazen) y tasa nula para más de 2 períodos. En la primera de estas situaciones se tomará valores constantes de la posición en capital humano y del tiempo de aprendizaje y, trasladado asintóticamente, también k puede considerarse constante, por lo que la tasa -en un contexto de hogar+empresa representativa, que da lugar a la expresión más simple- convergirá a largo plazo a:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T=2;\delta=1;IR} = B\left[\theta - \left(a^h\right)^{-\varepsilon}\right] \text{(4.303)}$$

Siendo la constancia de la tasa consistente con la elección del mismo valor del tiempo de aprendizaje a lo largo de toda la senda estacionaria. Cuando la tasa de depreciación se anula, habría que evaluar la tasa en los dos posibles estados estacionarios señalados. En el de inversión nula en capital humano, la posición en este activo se haría constante y, asintóticamente, también la ratio k, por lo que la tasa coincidiría con la anterior:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T=2;\delta=0;IR} = B\left[\theta - \left(a^h\right)^{-\varepsilon}\right] \text{(4.304)}$$

Sin embargo, en el estado estacionario asintótico la estructura de acumulación degenera en la de Lucas, por lo que la tasa cambia correlativamente:

$$\lim_{a_s^h \to \infty} rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T=2;\delta=0;IR} = \theta B \text{ (4.305)}$$

Para $T > 2$ y tasa de depreciación unitaria, las soluciones serían las misas que en el caso anterior, solo que la tasa se haría más compleja. Tomando el extremo asintótico de la senda de pobreza y teniendo en cuenta que a lo largo de la misma $\Gamma = 1$, la tasa sería de nuevo:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T>2;\delta=1;IR} = B\left[\theta - \left(a^h\right)^{-\varepsilon}\right] \text{(4.306)}$$

En cuanto a la solución asintótica para más de 2 períodos, sería análoga a la derivada para T=2, con la peculiaridad de que la renta marginal del activo quedaría afectada por el tiempo de aprendizaje, por lo que:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T>2;\delta=1;IR} = B\theta\left(1-n^{h}\right) \text{ (4.307)}$$

Una segunda alternativa es planteada por aquellos modelos en los que los rendimientos en uno de los inputs son crecientes y, al mismo tiempo, una tecnología es convexa respecto a dicho input, siempre sujeto a la restricción de que el programa tenga la concavidad suficiente como para verificar el teorema de Arrow. En este sentido puede pensarse en un planteamiento del problema en el que: i) el capital humano sea el input que presenta la convexidad -por ejemplo, en la tecnología del bien final, en cuyo caso tenemos el modelo de Lucas con efecto externo; este caso será abordado en el siguiente apartado desde otro punto de vista, por lo que se aplaza el análisis por unas páginas; ii) sea otro de los inputs el que presenta el efecto externo y la no convexidad. Un caso típico en este sentido es el que proponen Mattana et al. (2009), con una tecnología educativa del siguiente tipo:

$$a_{s+1}^{h} = a_{s}^{h}\left[1+Bn_{s}^{h}\left(n_{s}^{h}\right)_{a}^{\gamma}\right];\ \gamma>0 \text{ (4.308)}$$

Para comprobar los efectos sobre la tasa de retorno y dado que los efectos externos se circunscriben al área de aprendizaje, se partirá de un entorno de 2 agentes representativos, hogar y empresa. Con estas condiciones y para un horizonte arbitrariamente largo, la tasa se escribe como:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IRn} = \frac{e_{s+1}\left(k_{s+1}\right)}{e_{s}\left(k_{s}\right)}\left\{\left(1-n_{s+1}^{h}\right)\left(n_{s}^{h}\right)^{\gamma}+\left(\frac{n_{s}^{h}}{n_{s+1}^{h}}\right)^{\gamma}\left[1+B\left(n_{s+1}^{h}\right)^{1+\gamma}\right]\right\} \text{ (4.309)}$$

Tasa que presenta las siguientes propiedades:

$$\frac{d\,rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IRn}}{dn_{s}^{h}}>0;\quad \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IRn}}{\partial n_{s+1}^{h}}<>0;\quad \frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IRn}}{\partial B}>0 \text{ (4.310)}$$

Por lo que respecta a la parcial respecto a n_{s+1}^{h}, una condición suficiente para su negatividad es:

$$-1+B\left(1+\gamma\right)<0 \text{ (4.311)}$$

Dado que el estado estacionario, si existe, se caracteriza por una ratio k y n^{h} constantes, la tasa evaluada en estado estacionario obedece a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{hn}\Big|_{ge,ss}^{T>2,IRn}}{\partial n^{h}} = \left(n^{h}\right)^{\gamma}\left[-1+B\left(1+\gamma\right)+\frac{\left(1-n^{h}\right)\gamma}{n^{h}}\right]>0 \text{ (4.312)}$$

Los términos entre corchetes constituyen una función estrictamente creciente en n^{h} que toma un valor positivo para un intervalo de esta variable comprendido entre

$\left(\frac{-\gamma}{(B-1)(\gamma+1)}, \infty \right)$. En consecuencia, para valores estacionarios positivos también el término entre corchetes adoptará este signo. **La implicación más relevante de este signo positivo, que en este aspecto difiere de todas las tasas respecto al tiempo derivadas hasta el momento, tanto para rendimientos constantes del capital humano o de otro tipo, concierne a la relación en estado estacionario entre el capital físico y el tiempo de aprendizaje, ya que en este caso adquiere un signo negativo**. En efecto, un incremento del capital físico, ceteris paribus, conduce a una disminución de la productividad marginal de este activo y de su tasa de retorno; para restaurar la igualdad entre tasas que debe caracterizar una solución interior estacionaria, será necesaria la disminución del tiempo de aprendizaje, y con ella de la tasa de acumulación del capital humano. Frente a este resultado, cuando la tasa de retorno era decreciente respecto al tiempo de aprendizaje quedaba configurada una relación positiva entre ambos activos reales. El signo de esta relación es importante, porque puede afectar al número de estados estacionarios, como de hecho hace en este modelo. Si los valores estacinarios de k y n^h pueden calcularse a partir de un sistema de ecuaciones compuesto por la igualdad entre tasas de retorno y la igualdad ex ante ahorro-inversión, la cual habitualmente presenta una pendiente negativa, dos curvas decrecientes pueden dar lugar desde a ningún punto de corte, o hasta a más de 1 (en este caso particular, a dos). Esta posibilidad de indeterminación global justifica por qué, de un modo cada vez más frecuente, en la literatura se han venido introduciendo externalidades específicas sectoriales sometidas a una restricción de rendimientos constantes sociales en la totalidad de los inputs; en el capítulo 2 se analizan algunos ejemplos en esta línea.

IV.7.3. Rendimientos sociales y privados del capital humano.

Como se señaló al principio de este capítulo, desde las raíces de la literatura sobre capital humano se ha asistido a un divorcio entre los progresos en la inserción de este concepto en los modelos de crecimiento y el desarrollo de la noción de tasa de retorno, que ha discurrido por derroteros mucho más empíricos. Una de las consecuencias de este hecho ha sido que, pese a que en los modelos de crecimiento la heterogeneidad de los trabajadores y los efectos externos sociales del capital humano han estado presentes de manera muy evidente desde mediados de los años 80, no ha sido hasta bastante más tarde que algunos autores especialistas en tasas de retorno se han preocupado por dotar estos aspectos de una dimensión empírica. En la medida en que este capítulo está enfocado a evaluar las principales predicciones de los modelos de crecimiento en materia de tasas de retorno del capital humano y compararlas con los principales resultados de la literatura ad-hoc sobre la misma materia, es inevitable referirnos también a la cuantificación que los modelos dinámicos de equilibrio general permiten realizar de conceptos que han sido definidos principalmente con fines empíricos en el contexto de modelos estáticos, como la tasa de retorno social de este activo.

Posiblemente la definición (indirecta) de tasa de retorno social de la educación que ha tenido más fortuna en los últimos tiempos ha sido la de Acemoglu y Angrist (2001), entienden por retorno externo de la educación **la diferencia entre el efecto total sobre los salarios medios en un determinado ámbito geográfico de un aumento de la proporción de trabajadores educados y la tasa de retorno privada**. Obviamente esta definición es heredera de un concepto de tasa de retorno basada exclusivamente en incrementos salariales a consecuencia de la adquisición de un nivel superior de educación, mientras que la noción de tasa utilizada en estas páginas es más amplia, aunque más adelante se adaptará apropiadamente al marco analítico utilizado en los apartados precedentes.

Varios han sido los autores que han intentado operativizar esta definición en el marco de un modelo neoclásico estático, aunque quizá el que más se haya aproximado haya sido Moretti (2004)[168]. Este último plantea un modelo en el que los trabajadores están distribuidos en dos categorías, educados y no educados (puede pensarse, desde un punto de vista más pragmático, en poseedores o no de un título de enseñanza superior), de forma que ambos intervienen en la función de producción del bien final en un cierto ámbito geográfico, siendo la sustituibilidad entre ambos imperfecta. Trabajos empíricos como los de Katz y Murphy (1992) o Freeman (1986) confirman dicha ausencia de sustituibilidad. Por tanto, la función de producción Cobb-Douglas que combina los servicios de ambos tipos de trabajadores reviste la siguiente forma, siendo N_s^q y N_s^u el número de trabajadores cualificados y no cualificados conforme a un criterio determinado, N el número total de trabajadores, suma de los anteriores y A_i los parámetros de productividad respectivos asociados a cada uno de ellos:

$$Y_s = \left(A_q N_s^q\right)^{\alpha_q} \left(A_u N_s^u\right)^{\alpha_u} \left(K_s\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q} \quad (4.313)$$

A su vez, supondremos que la productividad asociada a cada trabajador sigue un proceso determinístico que, depende, a través de un fenómeno de desbordamiento, de la proporción de trabajadores educados dentro de la masa laboral:

$$A_j = \phi_j + \chi s;\ s = \frac{N_q}{N};\ j = q,u \quad (4.314)$$

[168] Destacan también otros trabajos, como el de Braakman (2009) o Schündeln (2014).

Estas dos ecuaciones muestran los dos canales a través de los que actúan los efectos externos: la primera de ellas, a través de la productividad marginal cruzada que surge a consecuencia de la sustituibilidad imperfecta entre los dos tipos de trabajadores. El segundo, a través de un efecto spill-over, a consecuencia del mero contacto entre trabajadores de diferentes habilidades. Obsérvese además que la ecuación que endogeneiza la productividad de cada trabajador anida el caso de Mincer (1974), en el cual la productividad de cada individuo depende únicamente del historial de sus inversiones en educación.

Sabiendo que el salario real de cada tipo de trabajador será igual a su productividad marginal en la función de producción y tomando logaritmos, ambos pueden escribirse como:

$$\ln(e_u) = \ln(\alpha_u) + \alpha_u \ln(A_u) + (1-\alpha_u-\alpha_q)\ln(K/N) + (\alpha_u-1)\ln(1-s) + \alpha_q \ln(A_q s) \quad (4.315)$$

$$\ln(e_q) = \ln(\alpha_q) + \alpha_q \ln(A_q) + (1-\alpha_u-\alpha_q)\ln(K/N) + (\alpha_q-1)\ln(s) + \alpha_u \ln(A_u(1-s)) \quad (4.316)$$

La tasa de retorno privada se define, como es frecuente en la literatura empírica y con ánimo simplificador, como la variación incremental en el salario real derivada de la adquisición de la condición de trabajador educado, al no haber una acumulación continua de capital humano como tal ni una explicitación de los costes de producción del activo o de admisión en el sistema educativo. Conforme a esta definición, dicho retorno privado puede escribirse así:

$$rr^{h,p} = \ln(e_q) - \ln(e_u) \quad (4.317)$$

Esta metodología permite también aproximar el efecto externo (o la suma de efectos externos) como la diferencia entre la tasa de retorno total (o social) y la tasa de retorno privada. En cuanto a la primera, se define como el efecto del aumento de la proporción de trabajadores cualificados sobre el salario medio, entendiendo por tal la media ponderada del salario de los educados y los no educados:

$$\overline{e} = se_q + (1-s)e_u \quad (4.318)$$

De ahí que el efecto externo se compute del siguiente modo:

$$rr^{h,e} = rr^{h,s} - rr^{h,p} = \frac{d\left[se_q + (1-s)e_u\right]}{ds} - \left[\ln\left(e_q\right) - \ln\left(e_u\right)\right] =$$
$$= \frac{(1-s)\alpha_q - s\alpha_u}{s(1-s)} + \left(\alpha_u + \alpha_q\right)\chi \quad (4.319)$$

$$\text{Teniendo en cuenta que} \begin{cases} \dfrac{de_u}{ds} = \dfrac{1-\alpha_u}{1-s} + \dfrac{\alpha_q}{s} + \left(\alpha_u + \alpha_q\right)\chi \\ \dfrac{de_q}{ds} = \dfrac{\alpha_q - 1}{s} - \dfrac{\alpha_u}{1-2} + \left(\alpha_u + \alpha_q\right)\chi \end{cases}$$

Las derivadas respecto a s de cada grupo muestran que, cuando se incrementa la proporción de trabajadores educados, las consecuencias para los no educados son necesariamente positivas, representando los dos primeros sumandos la productividad marginal cruzada positiva y el último el efecto desbordamiento. Sin embargo, para los propios cualificados el signo es ambiguo, al combinarse dos impactos de sentido opuesto: por un lado, un desplazamiento a lo largo de la curva de demanda de trabajo, que implica un menor salario real (o si se quiere, a causa de una productividad marginal directa decreciente) con un efecto desbordamiento presente incluso entre los miembros del propio grupo. Al combinar los dos efectos a través de la derivada sobre el salario medio y restarles la tasa de retorno privada, el resultado es de nuevo indefinido a causa exclusivamente del primer sumando, puesto que el segundo, que de nuevo apunta al *spill-over*, siempre es positivo. A la vista de este resultado podrá decirse que habrá tantas más probabilidades de que el efecto externo sea positivo cuanta mayor sea la proporción inicial de individuos no educados, ya que a estos van asociados principalmente los impactos positivos. Por último, también se evidencia que incluso aunque los efectos desbordamiento sean nulos en este marco de agentes heterogéneos los efectos externos serán distintos de cero y, consiguientemente, el retorno social será diferente del retorno privado.

Teniendo en cuenta este planteamiento, varios comentarios resultan oportunos: i) Los efectos calculados en el modelo anterior no son tasas en sentido financiero, ya que ignoran los costes de acumulación de capital humano. Son puras derivadas obtenidas a partir de un modelo de equilibrio general (ya que los salarios son endógenos) que sin embargo ignora las restricciones presupuestarias de los agentes que invierten en capital humano. Ello es consecuencia de la ausencia de un activo como tal, que se sustituye por la adquisición de una condición binaria -educado, no educado-. Este esquema es minoritario, aunque no inédito, dentro de la modelización de capital humano, y se encuentra ocasionalmente en la literatura de generaciones solapadas; sin embargo, no es propio de la literatura de crecimiento, que sigue mayoritariamente el enfoque de Uzawa-Lucas con diversas variaciones. ii) El hecho de que no se endogeneice el paso de la condición de “educado” a “no educado” lleva consigo la omisión de ciertas variables en el análisis, como la importancia de la fracción de educados en el propio proceso de conocimiento. Dicho de otra forma, la gama de efectos externos podría ser más amplia de la delimitada por este modelo. iii) El problema se plantea de una manera estática y no media ningún período desde la adquisición de nuevas habilidades por un grupo de trabajadores a su manifestación en variaciones de la productividad marginal. Esto impide que intervengan en el análisis determinados elementos propios de la intertemporalidad, como la tasa de retorno de otros activos alternativos -pese a que el capital físico contribuye también a la producción del bien final. iv) Desde un punto de vista de estructura de la tasa de retorno -o de los “efectos marginales”, en términos de este modelo- los puntos ii) y iii) implican la renuncia a los elementos que hemos venido denominando en apartados anteriores “de ganancias de capital”, relacionados tanto con el valor no depreciado del activo como una eventual productividad adicional en la producción futura de habilidades, para enfocar solamente el aspecto de rentas del activo o salarial.

A continuación trasladaremos este concepto de tasa de retorno social al marco analítico dentro del que hemos venido trabajando desde el comienzo de este capítulo. Este presenta algunas diferencias con el modelo de referencia de Moretti que obliga a reformular varios aspectos, en línea con los comentarios que acaban de realizarse. Como primera aproximación, se calculará la tasa social y los efectos externos en un marco de agentes homogéneos. Este hecho implica la necesidad de adaptar un componente clave de la definición de retorno social, como la variable que desencadena los efectos salariales. Así, no se podrá hablar de un cambio en la proporción de cierto grupo de trabajadores, sino de modificación infinitesimal en el input utilizado en la producción del activo que hace posible la variación salarial; este cambio de perspectiva será posible gracias a la modelización explícita del proceso de adquisición de educación. Otra consecuencia de esta modificación es que que al hablar de efectos externos se considere solamente los de tipo desbordamiento y por el momento quepa descartar los procedentes de la productividad marginal cruzada positiva. Por otro lado, al tratarse de un marco intertemporal no se circunscribirán las tasas de retorno a sus componentes de rentas, sino que se desarrollarán en su integridad.

Finalmente, y este es un aspecto importante, en los capítulos precedentes se supuso -excepto en momentos determinados, por conveniencia de simplificación de la estructura de la tasa de retorno- que la contribución de capital humano a la función de educación constituía un input privado y que los agentes eran plenamente conscientes de tales efectos, internalizándolos como tal en su programa de optimización intertemporal. El supuesto que se seguirá en este apartado será algo más elaborado. Los efectos externos del capital humano estarán presentes tanto en la tecnología educativa como en la de producción del bien final, no a través de la productividad multifactorial sino ampliando multiplicativamente la elasticidad del output respecto a los factores privados, del siguiente modo:

$$Y_s = AK_s^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{1-\alpha}\left(a_s^h\right)_a^{\eta} \quad (4.320)$$

$$i_s^h = B\left(a_s^h\right)^{\gamma}\left(a_s^h\right)_a^{1-\gamma}\left(n_s^h\right)^{\gamma} \quad (4.321)$$

En la función F, la utilización privada del capital humano está sujeta a rendimientos decrecientes, pero se complementan por un último término procedente del capital “medio” social, que al trabajar en un entorno de hogar representativo será el mismo que el privado. Este será el componente de las externalidades positivas à la Lucas. En la tecnología educativa, supondremos que los rendimientos constantes del capital humano se deben a la combinación de una parte privada, sujeta también a rendimientos decrecientes, más una externalidad de nivel de formación social que, unida a la anterior, contribuye a generar los rendimientos constantes. En cualquier caso, los rendimientos sociales de la tecnología de acumulación de capital humano son constantes, lo que junto con las propiedades de la función de utilidad garantiza una concavidad suficiente del programa a optimizar, que puede ser resuelto por el método de Kuhn-Tucker. Para derivar los retornos privados partiremos del supuesto de que los agentes poseen miopía respecto a los efectos externos y solamente el planificador es capaz de derivar la tasa de retorno social a partir de la maximización de las preferencias del hogar representativo sujetas a la restricción de recursos de la economía. En cualquier caso, aun considerando los efectos externos una variable exógena, los agentes privados serán capaces de anticipar su verdadero valor. La tasa de retorno “externa” será la cuña entre la tasa de retorno social y la tasa de retorno privada.

Hechos estos preámbulos, el problema del planificador quedará descrito por el siguiente programa dinámico, con una función de acumulación de capital humano en función del tiempo de aprendizaje:

$$\max_{\left\{a_{s+1}^h, K_{s+1}, n_s^h, C_s\right\}} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u\left(C_s\right)$$

$$s.a: C_s + K_{s+1} - K_s \leq AK_s^{\alpha}\left(1-n_s^h\right)^{1-\alpha}\left(a_s^h\right)^{1+\eta-\alpha};$$

$$a_{s+1}^h = a_s^h\left[1+B\left(n_s^h\right)^{\gamma}\right];$$

$$C_s, K_{s+1}, a_{s+1}^h \geq 0$$

$$0 \leq n_s^h \leq 1 \quad (4.322)$$

Las condiciones de primer orden que resuelven la función lagrangiana son las siguientes:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial C_s} = \beta^s\left[-\lambda_s + U_{cs}\right] \leq 0 (4.323)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K_{s+1}} = -\beta^s \lambda_s + \beta^{s+1}\lambda_{s+1}\left[1 + A\alpha K_{s+1}^{\alpha-1}\left(1-n_{s+1}^h\right)^{1-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)^{1+\eta-\alpha}\right] \leq 0 \ (4.324)$$

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \lambda_T K_{T+1} = 0 \ (4.325)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_s^h} = -\lambda_s(1-\alpha)\left(1-n_s^h\right)^{-\alpha} AK_s^\alpha\left(a_s^h\right)^{1+\eta-\alpha} + \mu_s a_s^h B\gamma\left(n_s^h\right)^{\gamma-1} \leq 0 \ (4.326)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_{s+1}^h} = -\beta^s \mu_s + \beta^{s+1}\begin{bmatrix} \lambda_{s+1}A(1+\eta-\alpha)K_{s+1}^\alpha\left(1-n_{s+1}^h\right)^{1-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)^{\eta-\alpha} + \\ +\mu_{s+1}\left[1+B\left(n_{s+1}^h\right)^\gamma\right] \end{bmatrix} \leq 0 \ (4.327)$$

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \mu_T a_{T+1}^h = 0 \ (4.328)$$

A estas últimas que habría que añadir las correspondientes restricciones del problema de optimización. Procediendo como es habitual, sustuimos el valor sombra del capital humano en la cpo del tiempo de aprendizaje y lo sustituimos en la cpo de la posición en este activo, obteniendo:

$$\frac{U_{cs}}{\beta U_{c,s+1}} \geq \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^\alpha \left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} \Gamma_s^{\eta-\alpha}\left(n_s^h\right)^{\gamma-1}\left[\frac{(1+\eta-\alpha)}{1-\alpha}\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma + \left(n_{s+1}^h\right)^{1-\gamma}\Gamma_{s+1}\right] \equiv rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>}$$

$$\Gamma_{s+1} = 1 + B\left(n_{s+1}^h\right)^\gamma \ (4.329)$$

Siendo la tasa social de retorno la que aparece en el lado derecho de la inecuación, utilizando el superíndice P para denotar **la tasa del planificador o tasa social**. El hecho de que el planificador considere íntegramente todo el impacto del capital humano en h implica que los rendimientos en este activo son constantes, por lo que la path-dependency en el nivel de capital humano no afecta a la tasa social de retorno. El signo de la pendiente de la tasa respecto a n_s^h será a priori indefinido, aunque una condición suficiente para que sea, como habitualmente, negativo, será que $\eta < \alpha$. Teniendo en cuenta que en estado estacionario n^h es constante, como también la tasa de acumulación del capital humano y el capital físico, la tasa experimenta una cierta simplificación cuando se evalúa a lo largo de esta senda:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge,ss}^{T>2,P} = \Gamma^\eta\left(n^h\right)^{\gamma-1}\left[\frac{(1+\eta-\alpha)}{1-\alpha}\left(1-n^h\right)B\gamma + \left(n^h\right)^{1-\gamma}\Gamma\right] \text{(4.330)}$$

La pendiente de la tasa estacionaria no tiene un signo definido respecto a n^h . En efecto:

$$\frac{d\,rr_{s,s+1}^{hn}\Big|_{ge,ss}^{T>2,P}}{dn^h} = \Gamma^{\eta} B\gamma\left(n^h\right)^{\gamma-1}\left\{-\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}+\frac{(1+\eta-\alpha)}{1-\alpha}\left(1-n^h\right)\left[\frac{(\gamma-1)}{n^h}+\frac{\eta}{\Gamma}\right]\right\} <> 0 \text{ (4.331)}$$

Una condición suficiente para que el signo total resulte negativo es que el corchete presente dicho signo, esto es:

$$B(1-\gamma)\left(n^h\right)^{\gamma} - \eta n^h > -(1-\gamma) \text{ (4.332)}$$

Por su parte, **la tasa de retorno privada** sería la resultante del siguiente problema de optimización descentralizado, que parte de la percepción de los valores sociales del capital humano como exógenos en el problema de optimización:

$$\begin{aligned}
&\max_{\left\{a_{s+1}^h, K_{s+1}, n_s^h, C_s\right\}} \sum_{s=0}^{T} \beta^s u\left(C_s\right) \\
&s.a: C_s + K_{s+1} - K_s \leq AK_s^{\alpha}\left(1-n_s^h\right)^{1-\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\alpha}\left(a_s^h\right)_a^{\eta}; \\
&a_{s+1}^h = a_s^h + B\left(n_s^h\right)^{\gamma}\left(a_s^h\right)^{\gamma}\left(a_s^h\right)_a^{1-\gamma}; \\
&C_s, K_{s+1}, a_{s+1}^h \geq 0; \\
&0 \leq n_s^h \leq 1 \text{ (4.333)}
\end{aligned}$$

Al resolver el programa, varias condiciones de primer orden se verían modificadas respecto a la solución del planificador, a saber:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial K_{s+1}} = -\beta^s\lambda_s + \beta^{s+1}\lambda_{s+1}\left[1 + A\alpha K_{s+1}^{\alpha-1}\left(1-n_{s+1}^h\right)^{1-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)^{1-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)_a^{\eta}\right] \leq 0 \text{ (4.334)}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n_s^h} = -\lambda_s(1-\alpha)\left(1-n_s^h\right)^{-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)^{1-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)_a^{\eta} AK_s^{\alpha} + \mu_s\left(a_{s+1}^h\right)^{\gamma}\left(a_{s+1}^h\right)_a^{1-\gamma} B\gamma\left(n_s^h\right)^{\gamma-1} \leq 0 \text{ (4.335)}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_{s+1}^h} = -\beta^s\mu_s + \beta^{s+1}\begin{bmatrix}\lambda_{s+1}A(1-\alpha)K_{s+1}^{\alpha}\left(1-n_{s+1}^h\right)^{1-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)^{-\alpha}\left(a_{s+1}^h\right)_a^{\eta} + \\ +\mu_{s+1}\left[1+\gamma B\left(n_{s+1}^h\right)^{\gamma}\left(a_{s+1}^h\right)^{\gamma-1}\left(a_{s+1}^h\right)_a^{1-\gamma}\right]\end{bmatrix} \leq 0 \text{ (4.336)}$$

Además, habrá que considerar que el equilibrio se alcanza en el momento en que la expectativa sobre el nivel medio de capital humano se materializa y por tanto:

$$a_s^h = \left(a_s^h\right)_a \text{ (4.337)}$$

Teniendo en cuenta las anteriores ecuaciones, la condición de no arbitraje reviste desde el punto privado la siguiente forma:

$$\frac{U_{cs}}{\beta U_{c,s+1}} \geq \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} \Gamma^{\eta-\alpha} \left(n_s^h\right)^{\gamma-1} \left[\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma + \left(n_{s+1}^h\right)^{1-\gamma}\left[1+\gamma B\left(n_{s+1}^h\right)^{\gamma}\right]\right] \equiv rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{p} \quad (4.338)$$

Siendo la tasa de retorno privada de nuevo el segundo miembro de la inecuación (pr es el superíndice que se le asigna). De aquí que la combinación de efectos externos del capital humano, expresados como la diferencia entre el retorno social y el retorno privado, sea igual a:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{ex} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} \Gamma^{\eta-\alpha} \left(n_s^h\right)^{\gamma-1} \left[\left(1-n_{s+1}^h\right)B\gamma \frac{\eta}{1-\alpha} + B\left(n_{s+1}^h\right)\left(1-\gamma\right)\right] \quad (4.339)$$

Es decir, la diferencia entre retorno social y privado se anularía en aquellas circunstancias en las que el efecto externo en la función de producción de bien final, cuya magnitud puede aproximarse por el parámetro η , se hiciera cero y la elasticidad del capital humano privado en la función de educación se hiciera unitaria, o en otras palabras, los rendimientos privados del capital humano fueran igual a los sociales en la tecnología de acumulación.

La traslación de la definición original de tasa de retorno social de un espacio discreto (pertenencia a una tipología de trabajadores) a uno continuo, como el que acabamos de abordar, presenta algunas ventajas en términos de una construcción matemática más elegante y endogeneización del motor del cambio en el nivel de educación. No obstante, nada impide reconsiderar la definición de tasa social que acaba de efectuarse en un marco de trabajadores heterogéneos para dar entrada a efectos cruzados entre el capital humano de unos y otros. Para efectuar esta traslación puede recurrirse a varias formas de modelización.

En cualquiera de ellas se mantendrá la endogeneización de la decisión de adquisición de una mayor cualificación, pero se distinguirá entre clases de trabajadores en atención a su nivel de cualificación profesional original. La introducción de agentes heterogéneos en un marco de generaciones solapadas puede seguir patrones muy variados. Por señalar dos vías representativas, cabe la posibilidad de: i) Distinguir solamente los agentes en función de su dotación inicial de capital humano y combinar este supuesto con funciones de aprendizaje estándar, de manera que la acumulación de capital humano de cada tipo de familia es independiente a partir del momento inicial, pudiendo llegar a revertirse la diferencia en el stock del activo (o a igualarse) según la trayectoria de cada grupo de individuos; un trabajo representativo de esta línea es el de De La Croix y Doepke (2004). ii) Introducir una diferenciación permanente y en términos cualitativos entre trabajadores cualificados y no cualificados, lo que por un lado supone renunciar a la función de acumulación de capital humano beckeriana como explicación del paso de una a otra categoría, pero al menos mantiene en el tiempo esta diferenciación binaria, lo que puede resultar útil desde otros puntos de la vista de la modelización.

Seguiremos este último enfoque, por ser el más cercano en un sentido dinámico al trabajo de Moretti y sobre la base del mismo estudiaremos vías de difusión de las habilidades acrecentadas en un marco OLG. La alternativa de hacerlo dentro de modelos de agentes representativos es menos atractiva por varias razones. Primero, solo el grupo de individuos de habilidades inferiores tendría incentivos para invertir en capital humano, mientras que en OLG el impacto de esta inversión sobre los descendientes abre algunas vías interesantes de retorno privado, incluso sin preferencias altruistas en los adultos. Además, desde el ángulo de la dinámica del modelo, el progresivo paso a las categorías más altas de cualificación a través de la inversión en capital humano reduciría la importancia de esta última a lo largo del tiempo. Finalmente, la modelización de esfuerzos continuos de aprendizaje sin éxito en el cambio de cualificación es complicada y exige la utilización de procesos estocásticos con parámetros poco realistas, mientras que el ámbito OLG permite la representación de esfuerzos "one-shot", en los que a lo largo de a vida de una cohorte el aprendizaje solo se produce en una ocasión, con asignaciones de probabilidad de acceso a una cualificación alta más factibles. A la vista de estos condicionantes, dentro de un esquema de generaciones solapadas la difusión de capital humano se realiza intergeneracionalmente, si bien ambas generaciones obtienen ventajas económicas de la misma. En este se nos basaremos en el artículo de Cremer, Gahvari y Pestiau (2011) comentado en el capítulo 3, si bien modificaremos algunos de sus componentes, principalmente la configuración de la oferta, que en este modelo se trata de un modo muy simplificado.

Los supuestos básicos a que nos conduciría esta aproximación al problema serían los siguientes. Existen, como anticipamos, dos clases de trabajadores, con alta y baja cualificación, cuya diferencia en términos de productividad no se diluye a lo largo del tiempo. El mecanismo de promoción social reside en la inversión en educación la cual, sin garantizar por completo el paso a la condición de cualificado, al menos proporciona cierta probabilidad. Esto significa que la proporción entre trabajadores cualificados y no cualificados es variable en el tiempo y dependiente de la inversión en educación llevada a cabo por los padres. Los agentes viven dos períodos, con una población de tamaño exógeno cuyo crecimiento se articula a través un número fijo de hijos por miembro de la dinastía que son alumbrados durante el primer período de vida de los padres; la fertilidad será idéntica para todos los agentes, con independencia de su grado de cualificación. Durante el mismo período, los padres de cada grupo de trabajadores decide cuánto tiempo dedicar a la educación de su prole, en el marco de una función de utilidad que depende de su nivel de consumo en cada uno de los períodos de vida, sin ningún altruismo intergeneracional ni preferencia explícita por los descendientes con un mayor éxito social en términos de cualificación. Por lo tanto la función de utilidad, que se supondrá aditiva, para un individuo del grupo j nacido en el período s queraría estructurada del siguiente modo:

$$U_j = u_j\left(C_s^s\right) + \beta v_j\left(C_{s+1}^s\right);\ j = q,u \quad (4.340)$$

Durante el primer período de vida el individuo divide su tiempo disponible entre trabajo en la industria productora del bien de consumo y tiempo destinado al cuidado de sus hijos en un sentido amplio, de modo que este comprende tanto el tiempo destinado a su educación como el necesario para su cuidado, completamente exógeno. Para construir la función de producción del bien final agregado, de tipo Cobb-Douglas, habrá que tener en cuenta el papel que juega el efecto externo formación. En esta función de producción intervendrán tanto trabajadores cualificados como no cualificados, conforme a la siguiente identificación:

$$Y_s = A\left(L_s^u\left(1 - Nn_s^{h,u} - Nz\right)\right)^{\alpha_u}\left(L_s^q\left(1 - Nn_s^{h,q} - Nz\right)\right)^{\alpha_q}\left(DL_s^q\right)^{\eta}\left(L_s^u K_s^u + L_s^q K_s^q\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q-\eta};$$

$$1 - Nn_s^{h,j} = n_s^{w,j} + z_s N;\ D > 0;\ j = q,u;\ m = \frac{L_s^q}{L_s^q + L_s^u} \quad (4.341)$$

Esto es, se dota a esta tecnología de una productividad multifactorial común, pero de una elasticidad diferente para trabajadores cualificados y no cualificados, siendo L la suma de ambas clases y m la proporción de los cualificados sobre el total. Se observa además que, a diferencia de Moretti, la externalidad relativa a la cualificación media de los trabajadores no se canaliza a través de las productividades específicas de cada grupo, sino vía una externalidad común a toda la función de producción, à la Lucas. El parámetro de escala D constituye un factor de amplificación de las variaciones en m. La empresa representiva maximiza su beneficio respecto a las horas demandadas de cada tipo de trabajador y el salario real de equilibrio vaciará el mercado, de manera que todos los trabajadores existentes en la economía de cada clase puedan trabajar. Es posible además reexpresar la función de producción eliminando el factor de escala o en términos per cápita, $y_s = Y_s / \left(L_s^q + L_s^u\right)$, teniendo en cuenta además que la posición en capital físico de cada uno de ellos es perfectamente sustitutiva y agregable y siendo k el capital físico medio ponderado:

$$y_s = A\left(\left(1 - m_s\right)\left(1 - Nn_s^{h,u} - Nz\right)\right)^{\alpha_u}\left(m_s\left(1 - Nn_s^{h,q} - Nz\right)\right)^{\alpha_q}\left(Dm_s\right)^{\eta}\left(k_s\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q-\eta} \quad (4.342)$$

En la medida en que después se utilizará este resultado, nos referiremos brevemente al efecto de la variación de m sobre la producción:

$$\frac{\partial y_s}{\partial m_s} = \left.\frac{\partial y_s}{\partial m_s}\right|_{pr} + \left.\frac{\partial y_s}{\partial m_s}\right|_{ext} = y_s\left(\frac{\alpha_q}{m_s} - \frac{\alpha_u}{1-m_s}\right) + \frac{\eta}{m_s} y_s \quad (4.343)$$

De esta manera, el efecto total puede descomponerse en un subefecto privado y otro que concierne a las externalidades de m sobre la función de producción. Dentro del privado, se aprecian dos movimientos de signo contrario a consecuencia del cambio en la-composición, al aumentar la proporción de trabajadores cualificados y disminuir la del otro grupo. La condición necesaria y suficiente para que este componente privado resulte positivo, que supondremos se cumple siempre, será:

$$m_s < \frac{\alpha_q}{\alpha_q + \alpha_u} \quad (4.344)$$

Esto es, cuando mayor sea la elasticidad de la función de producción respecto a los cualificados, tantas mayores probabilidades habrá, dada una fracción m, de que el signo de la derivada parcial sea globalmente positivo. Aunque dicha elasticidad es solamente un componente de la productividad marginal de los trabajadores cualificados, puede afirmarse también el diferencial entre elasticidades de los dos colectivos marca un diferencial de productividades para el mismo número de horas trabajadas por ambos.

Los salarios reales, calculados de este modo y teniendo en cuenta que la empresa representativa no internaliza el efecto externo de los cualificados, serán los siguientes, expresados en niveles:

$$w_s^u = A\alpha_u\left(1-m_s\right)^{\alpha_u}\left(n_s^{w,u}\right)^{\alpha_u-1}\left(m_s n_s^{w,q}\right)^{\alpha_q}\left(Dm_s\right)^{\eta}\left(k_s\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q} = y_s\frac{\alpha_u}{n_s^{wu}} \quad (4.345)$$

$$w_s^q = A\left(\left(1-m_s\right)n_s^{w,u}\right)^{\alpha_u}\alpha_q\left(m_s\right)^{\alpha_q}\left(n_s^{w,q}\right)^{\alpha_q-1}\left(Dm_s\right)^{\eta}\left(k_s\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q} = y_s\frac{\alpha_q}{n_s^{wq}} \quad (4.346)$$

En el primer período los agentes, sobre la base de su ubicación dentro de la escala de aptitudes, generan una renta salarial que distribuyen entre consumir y un tiempo -con el consiguiente coste de oportunidad asociado- destinado tanto a la crianza de los niños (que será fijo por niño e igual a z) y un tiempo invertido en su educación. La renta salarial excedentaria se ahorrará, generando un interés neto r (asociado en este caso al retorno neto del capital físico, cuya vida útil no excede un período), que será la base del consumo en la vejez en este modelo básico en el que no se considera ninguna intervención pública. Las decisiones básicas del individuo, combinando los dos períodos de su vida a través de la restricción presupuestaria intertemporal, concernirán el consumo del primer período, el número de hijos y el tiempo invertido en su educación; dados estos parámetros, indirectamente se despeja el ahorro y el consumo en la vejez también estaría dado. En la medida en que el tiempo durante el que se educa a los hijos influye en su potencial desempeño posterior -aunque no lo determine completamente-, la relevancia del número de trabajadores de alta cualificación en la producción del bien de consumo abre la puerta a la aparición de una externalidad, en la medida en que los agentes privados no internalicen la relación entre el tiempo que transcurren junto a sus hijos mientras estos aprenden y el nivel de cualificación medio social.

Existe un contrato implicito entre padres e hijos dentro de cada hogar, derivado de la falta de altruismo en la función de utilidad. En virtud de este, los hijos dedicarán una fracción θ (igual para todo trabajador y exógena) de su salario real a la manutención de los padres cuando estos alcancen su vejez; esta es la contraprestación por la inversión en educación efectuada por los primeros. Este contrato es la vía a través de la cual los padres están incentivados a proporcionar una educación lo más completa posible a sus hijos dentro de un esquema de preferencias no altruistas; este tipo de contrato, que se debe a Ehrich y Lui (1991)[169], se utilizará también en el capítulo sobre políticas educativas y crecimiento en un marco OLG. Bajo estos supuestos las restricciones presupuestarias flujo adoptan la siguiente forma:

$$C_s^{s,j} + S_s^{s,j} \leq (1-\theta) w_s \left(1 - zN - n_s^{h,j} N\right) \quad (4.347)$$

$$C_{s+1}^{s,j} \leq (1+r_s) S_s^{s,j} + N\theta w_{s+1} \quad (4.348)$$

$$j = q,u$$

Por último, la pertenencia de cada individuo a una categoría de trabajadores sigue una estructura probabilística, aunque existe una correlación positiva en el resultado tanto con las horas invertidas por los padres en la educación como con el entorno familiar. Así, denominando π a la probabilidad de un niño de pertenecer a la categoría de trabajadores más educados, se tendrá:

$$\frac{d\pi^j\left(n_s^{h,j}\right)}{dn_s^{h,j}} > 0;\ j = q,u;\ \pi^q\left(n_s^{h,q}\right) > \pi^u\left(n_s^{h,u}\right) \quad (4.349)$$

Se supone que todas las generaciones son neutrales al riesgo. Debido a la naturaleza parcialmente estocástica de las habilidades de los niños, las preferencias de los individuos deberán ser formuladas en términos de utilidad esperada, de la siguiente manera:

[169] Esta opción no resulta conceptualmente menos sólida que las preferencias con altruismo limitado que eligen numerosos autores, mediante las cuales los padres internalizan solo algunos elementos que influyen en el bienestar de la generación inmediatamente posterior.

$$EU^j = E\left\{u^j\left(C_s^s\right)+\beta v^j\left(C_{s+1}^s\right)\right\};\ j=q,u \text{ (4.350)}$$

El programa descentralizado a resolver consistirá para cada individuo representativo de su grupo, por tanto, en la maximización de sus preferencias esperadas sujetas a su restricción intertemporal y a la derivación de los salarios reales a partir de la productividad marginal del trabajo en el sector productor del bien final. La función lagrangiana que compendia este problema y las cpo relacionadas directa o indirectamente con la inversión educación son las que siguen:

$$\Omega^j = E\left\{u^j\left(C_s^{sj}\right)+\beta v^j\left(C_{s+1}^{sj}\right)\right\}+$$

$$+\lambda^j\left[(1-\theta)w_s^j\left(1-zN-n_s^{h,j}N_s^j\right)-C_s^{s,j}-\frac{C_{s+1}^{s,j}}{1+r_s}+\frac{N\theta\left[\pi\left(n_s^{hj}\right)w_{s+1}^{h,q}+\left(1-\pi\left(n_s^{hj}\right)\right)w_{s+1}^{h,u}\right]}{1+r_s}\right]+\xi\left[1-n_s^{hj}\right] \text{ (3.3}$$

$$\frac{\partial\Omega^j}{\partial C_s^{sj}} = u_{cs}^j-\lambda^j \le 0 \text{ (4.352)}$$

$$\frac{\partial\Omega^j}{\partial C_{s+1}^{sj}} = \beta v_{c,s+1}^j-\frac{\lambda^j}{1+r_s} \le 0 \text{ (4.353)}$$

$$\frac{\partial\Omega^j}{\partial n_s^{hj}} = \lambda^j N\left\{-(1-\theta)w_s^j+\frac{\theta\left[\pi_{ns}\left(w_{s+1}^{h,q}-w_{s+1}^{h,u}\right)\right]}{1+r_s}\right\}-\xi \le 0 \text{ (4.354)}$$

En cuanto al impacto del tiempo destinado a la educación en s sobre los salarios reales en s+1, este vendrá recogido en el segundo sumando de la cpo de n y se produce solamente a consecuencia de una variación de las probabilidades relativas de pertenencia a un cierto grupo cuando aumenta el tiempo invertido en educación. Si además se eliminan las soluciones esquina en el tiempo de aprendizaje, el multiplicador $\xi=0$. Esta condición de primer orden establecerá entonces que, si el tiempo dedicado a la educación es positivo, los costes de esta inversión para los padres (a consecuencia del coste de oportunidad directo) se igualarán a sus beneficios, dados por el aumento esperado de la compensación contractual de los jóvenes efectuada cuando estos comiencen a recibir un salario[170]. **Una característica importante del problema de optimización para los adultos es que estos perciben que la formación proporcionada a sus descendientes es**

[170] Deliberadamente se ha alterado la estructura de las preferencias del modelo original de los autores, excluyendo el término relativo a la tasa de fertilidad y el coeficiente que le afectaba, que era mayor para los niños cualificados. De lo contrario, en la tasa de retorno aparecería un término evaluado en términos de bienestar y no cuantificable mediante un precio relativo de mercado.

susceptible de mejorar el status socio-laboral de estos, pero no de alterar la proporción de individuos cualificados en el total de la sociedad y, consiguientemente, de generar mejoras en el salario real tanto de los cualificados como de los no cualificados incluso independientemente de la probabilidad de pertenecer a uno u otro colectivo o de las variaciones de esta. En este sentido, puede suponerse que aunque el número de hogares sea muy elevado y en sentido estricto la contribución marginal de un cualificado más sea desdeñable a la proporción m, existen efectos desbordamiento vía peer effects entre trabajadores sin que su funcionamiento comporte un sacrificio de tiempo. El resultado será un impacto marginal cuantificable, positivo y acotado en m, dando lugar a una externalidad que solo el planificador social tomará en consideración dentro de su programa de optimización.

La cpo respecto al tiempo, transformada adecuadamente, pemite derivar la condición de no arbitraje entre tasas de retorno de las dos inversiones alternativas (incluso aunque el capital humano no aparezca explícitamente en el modelo):

$$1+r_s \geq \frac{\theta\left[\pi_{ns}^{j}\left(w_{s+1}^{q}-w_{s+1}^{u}\right)\right]}{\left(1-\theta\right)w_s^j} \equiv rr_{s,s+1}^{hn,pr}\Big|_{ge}^{j};\ j=q,u \quad (4.355)$$

Tal como han quedado definido antes los salarios reales, el diferencial entre los mismos viene dado por:

$$w_{s+1}^{q}-w_{s+1}^{u}=y_{s+1}\left(\frac{\alpha_q}{n_{s+1}^{wq}}-\frac{\alpha_u}{n_{s+1}^{wu}}\right) \quad (4.356)$$

A priori esta diferencia no tiene un signo inequívoco. A pesar de que la elasticidad de la producción es mayor por hipótesis para los trabajadores cualificados, dado un nivel de output si el tiempo destinado al trabajo fuera suficientemente más elevado para este colectivo sus salarios reales podrían ser inferiores. Es importante destacar también que si el input variable en la tecnología de aprendizaje fuera el bien final en lugar del tiempo y la jornada laboral se impusiera exógenamente, esta ambiguedad desaparecía al ser inequívocamente mayor la productividad marginal de los trabajadores cualificados.

La tasa de retorno privada se compondrá, por tanto, de un solo sumando relativo a la renta de la inversión en tiempo, ya que al no haber un activo como tal en esta versión del modelo tampoco puede hablarse de ganancias de capital. El pay-off vendrá dado por la ganancia esperada incremental en la compensación a percibir en la vejez. Si se modeliza la probabilidad de tener un hijo cualificado como la suma de una probabilidad común a los dos grupos de individuos, más un término específico a cada grupo que constituye una función creciente y cóncava respecto al tiempo de educación, esta podrá escribirse como sigue:

$$\pi_s^j = \pi + \tilde{\pi}^j\left(n_s^{hj}\right);\ \tilde{\pi}' > 0;\ \tilde{\pi}'' < 0 \quad (4.357)$$

Nótese que el hecho de que la función $\tilde{\pi}$ sea superior en todo su recorrido para los hogares cualificados no implica necesariamente que tambien lo sea su primera derivada. Por tanto, es incierto para qué grupo el numerador de la tasa de retorno será mayor, dado un tiempo dedicado a la educación de los descendientes. Respecto al denominador, que representa el coste de realización de la inversión, sería en principio superior para los cualificados, aunque como se ha visto antes tampoco esta prelación esta garantizada. Por ambas razones no es posible establecer a priori cuál de los dos grupos tendrá una tasa de retorno más alta, dependiendo en última instancia del diferencial de elasticidades de la probabilidad marginal y entre salarios reales. Puesto que el tipo de interés es el mismo para todos los hogares -al ser común el precio de alquiler del capital-, una solución de inversión interior para los individuos de toda extracción social implica que aquella será superior para los individuos cuya tasa de retorno sea superior para un tiempo de educación dado; aquellos cuya tasa de retorno sea inferior deberán incrementarla a costa de un menor tiempo invertido en la formación de sus hijos, al ser decreciente la probabilidad marginal de éxito en la adquisición de una capacidad alta.

Cabe destacar también que la tasa de retorno privada será creciente en el tipo sobre el salario que constituye la base del contrato intergeneracional, al acumularse dos efectos del mismo signo, uno de aumento de la renta del activo y otro de disminución del coste de producción de la educación para la generación de los padres. Por último, en referencia al resultado obtenido antes sobre la ambigüedad del signo de la diferencia entre salarios reales de unos y otros trabajadores; así, si el elemento de rentas de la tasa de retorno se hiciera negativo, la inversión privada en formación sería nula en esta versión del modelo donde las oportunidades de promoción laboral vienen dadas por la inversión en tiempo.

Si consideramos que la tasa de retorno privada es una media ponderada de la tasa de retorno de cada grupo y que las participaciones de cada uno de ellos pueden ser variables entre períodos, se tendrá que:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{pr} = m_s\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{q} + \left(1-m_s\right) rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{u} = \frac{\theta}{1-\theta}\left[\pi_{ns}\left(w_{s+1}^{h,q} - w_{s+1}^{h,u}\right)\right]\left[\frac{m_s}{w_s^q} + \frac{1-m_s}{w_s^u}\right] \quad (4.358)$$

En cuanto al problema del planificador, compararemos las tasas de retorno resultantes con la privada en estado estacionario[171]; no obstante primero se derivará el problema de optimización social en equilibrio general, para después evaluar las cpo en estado estacionario. Como principal elemento diferencial con las decisiones privadas aquel tendrá en cuenta los efectos de la variación de la media de cualificación social sobre las productividades marginales de cada tipo de trabajador y por tanto sobre su salario, factor que no es internalizado en el equilibrio competitivo descentralizado. Este mayor salario de la siguiente generación redundaría en el pay-off de la inversión a través de los contratos de transferencia de rentas a los mayores.

Referente a la variación de la proporción de los individuos con cualificación media a consecuencia de la inversión educativa, habrá que tener en cuenta que solo puede hablarse de un número esperado de trabajadores cualificados y no cualificados en el futuro para cada nivel de formación proporcionado por los mayores. Por ejemplo, el número esperado de cualificados para el planificador será:

$$L_{s+1}^{qe} = L_s^q + N\left[\pi^q\left(n_s^{hq}\right)L_s^q + \pi^u\left(n_s^{hu}\right)L_s^u\right] \quad (4.359)$$

Por lo tanto, la variación de m a consecuencia del esfuerzo educativo del hogar representativo de cada uno de estos dos grupos vendría dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dm_{s+1}^e}{dn_s^h} = \frac{\partial m_{s+1}^e}{\partial L_{s+1}^{qe}}\frac{\partial L_{s+1}^{qe}}{\partial n_s^h} + \frac{\partial m_{s+1}^e}{\partial L_{s+1}^{ue}}\frac{\partial L_{s+1}^{ue}}{\partial n_s^h} =$$
$$= \frac{\partial m_{s+1}^e}{\partial L_{s+1}^{qe}} N\left[\pi_n^q L_s^q + \pi_n^u L_s^u\right] + \frac{\partial m_{s+1}^e}{\partial L_{s+1}^{ue}} N\left[-\pi_n^q L_s^q - \pi_n^u L_s^u\right] > 0; \frac{\partial m_{s+1}^e}{\partial L_{s+1}^{qe}} > 0; \frac{\partial m_{s+1}^e}{\partial L_{s+1}^{ue}} < 0 \quad (4.360)$$

Por tanto, el impacto sobre m en s+1 es doble y acumulativo. Primero, aumenta la probabilidad de tener más individuos cualificados, lo que incrementa m. Además, se reduce la probabilidad de contar con no cualificados, lo que también eleva m. En conexión directa con la endogeneidad de m, el planificador deberá hacer frente a una restricción

[171] En la transición al estado estacionario, es necesario imponer ciertas condiciones a los parámetros para obtener una tasa de retorno correctamente definida a partir del problema del planificador. No obstante en estado estacionario este inconveniente desaparece, por lo que se elige este marco para la realización de la comparación en este modelo concreto.

adicional, la que evidencia la acumulación de la variable estado de su problema[172]: el número de individuos cualificados dentro la economía, que hace las veces del stock de capital humano en un problema con acumulación continua. Un incremento de los mismos no solamente genera un movimiento en m, sino que tiene consecuencias sobre las futuras condiciones de acumulación, al mejorar las posibilidades de acceder a la cualificación de las generaciones futuras. Este es un efecto que puede internalizar solamente el planificador al operar en un horizonte infinito, mientras que los agentes privados, al optimizar en un horizonte de 2 períodos, no lo considerarán (ni siquiera aunque su función de utilidad dependiera del stock de capital de la generación inmediata este factor sería internalizado, ya que afectará a las generaciones posteriores a la inmediata). La ecuación de acumulación del número de cualificados será:

$$L_{s+1}^{q} = N\left[L_{s}^{q}\pi_{s}^{q} + L_{s}^{u}\pi_{s}^{u} \right] \quad (4.361)$$

Será más adelante útil expresar la anterior restricción solamente en función del número de cualificados:

$$L_{s+1}^{q} = N\left[L_{s}^{q}\left(\pi_{s}^{q} - \pi_{s}^{u}\right) + \pi_{s}^{u} L_{s} \right] \quad (4.362)$$

Otra cuestión a establecer es la función objetivo del planificador: para simplificar supondremos que las preferencias de ambos grupos de invididuos son idénticas en sus componentes u y v, si bien puede seguir manteniéndose el supuesto de que u y v son funciones diferentes entre sí dentro de cada grupo. También se supondrá que el planificador no tiene unas preferencias propias, o si las tiene no las superpone a las de los agentes privados. Por esta razón la función de bienestar social tendrá en cuenta la estructura de las preferencias de ambos agentes representativos. Así, el planificador adoptará una perspectiva de maximización del bienestar ponderando las preferencias de cada grupo medi-

---

[172] En puridad existen dos variables estado, el número de cualificados y el de los no cualificados; sin embargo este último puede ser calculado residualmente a partir del primero y el tamaño total de la población en un período. Obsérvese que, por construcción, la proporción m de cualificados no puede considerarse una variable estado.

ante un peso invariable ϕ [173]. Hechos estos preámbulos, el programa del planificador será el siguiente:

$$\max_{\left\{C_i^{i,j},C_{i+1}^{i,j},k_{i+1}^{j}n_i^{hj}\right\}} \sum_{i=s-1}^{\infty} \delta^{i-(s-1)}\phi\left[u\left(C_i^{i,q}\right)+\beta v\left(C_{i+1}^{i,q}\right)\right]+(1-\phi)\left[u\left(C_i^{i,u}\right)+\beta v\left(C_{i+1}^{i,u}\right)\right]$$

$$s.a: A\left(1-Nn_i^{h,u}-Nz\right)^{\alpha_u}\left(1-Nn_i^{h,q}-Nz\right)^{1-\alpha_u}\left(Dm_i\right)^{\eta}\left(m_iK_i^q+\left(1-m_i\right)K_i^u\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q-\eta}-$$

$$-m_i\left[C_i^{i,q}+\frac{C_i^{i-1,q}}{N}+NK_{i+1}^q-K_i^q\right]-\left(1-m_i\right)\left[C_i^{i,u}+\frac{C_i^{i-1,u}}{N}+NK_{i+1}^u-K_i^u\right]\geq 0;$$

$$L_{s+1}^q=N\left[L_s^q\left(\pi_s^q-\pi_s^u\right)+\pi_s^uL_s\right];$$

$$0\leq n_i^{h,q},n_i^{h,u}\leq 1 \quad (4.363)$$

Varios aspectos deben destacarse en este programa, que se expresa en términos per cápita. Primero, las transferencias intergeneracionales desaparecen, ya que se compensan perfectamente desde la perspectiva del planificador, al percibirse y pagarse simultáneamente en el mismo período y ser de igual monto en términos per cápita. Segundo, K denota el stock de capital físico per cápita. Tercero, como se comentó antes, m es una función indirecta del tiempo invertido en educación y el planificador, a diferencia de los agentes privados, internaliza en el óptimo social dicha dependencia. Esta internalización se produce porque el planificador es consciente de que todos los agentes de un mismo tipo tomarán la misma decisión en cuanto a su inversión en educación. Cuarto, los efectos externos de la elección del tiempo transcurrido en la formación de los niños se manifestarán tanto en la participación de los trabajadores cualificados sobre el total como en el número absoluto de los mismos. En este sentido la inversión adicional de una unidad de tiempo provocará un incremento de π' unidades de trabajo cualificado. Quinto, $0<\delta<1$ es la tasa de descuento social. El planificador respetará, no obstante, la tasa de descuento subjetiva que liga la utilidad del consumo del primer período con el del segundo período de vida. Sexto, la configuración del problema del planificador implica que cabe la comparación de las tasas privadas y sociales a partir de s=0, por estar definido el problema descentralizado solamente a partir de este momento.

---

[173] Esta ponderación invariante puede defenderse sobre la base de un contrato social previo a la resolución del programa de optimización. La alternativa sería la utilización de m como peso de las preferencias de los cualificados en la función de bienestar social, aunque ello haría necesaria la imposición de restricciones adicionales para obtener resultados consistentes en las cpo y dificultaría su interpretación, al formar parte de las mismas funciones de utilidad puramente ordinales. La literatura utiliza distintas fórmulas para evitar enfrentarse a este tipo de situaciones.

Sobre la estructura de este problema de optimización puede construirse la siguiente función lagrangiana del planificador:

$$\Omega=\sum_{i=-1}^{\infty}\delta^{i+1}\left\{\begin{array}{l}\phi\left[u\left(C_i^{i,q}\right)+\beta v\left(C_{i+1}^{i,q}\right)\right]+(1-\phi)\left[u\left(C_i^{i,u}\right)+\beta v\left(C_{i+1}^{i,u}\right)\right]\\+\lambda_i\left\{\begin{array}{l}A\left[\left(1-m_i\right)\left(1-Nn_i^{h,u}-Nz\right)\right]^{\alpha_u}\left[m_i\left(1-Nn_i^{h,q}-Nz\right)\right]^{\alpha_q}\left(Dm_i\right)^{\eta}\left(m_iK_i^q+\left(1-m_i\right)K_i^u\right)^{1-\alpha_u-\alpha_q-\eta}-\\-m_i\left[C_i^{i,q}+\dfrac{C_i^{i-1,q}}{N}+NK_{i+1}^q-K_i^q\right]-\left(1-m_i\right)\left[C_i^{i,u}+\dfrac{C_i^{i-1,u}}{N}+NK_{i+1}^u-K_i^u\right]\end{array}\right\}+\\+\varphi_i\left[N\left[L_s^q\left(\pi_s^q-\pi_s^u\right)+\pi_s^uL_s\right]\right]+\xi_i\left[1-n_i^h\right]\end{array}\right\}(4.364)$$

Comenzando por las parciales respecto a los consumos en los dos períodos de vida:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial C_i^{i,q}}=\delta^{i-(s-1)}\left[\phi u_{C_i^{i,q}}-m_i\lambda_i\right]\leq 0\ (4.365)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial C_{i+1}^{i,q}}=\phi\beta v_{C_{i+1}^{i,q}}-\delta m_{i+1}\frac{\lambda_{i+1}}{N}\leq 0\ (4.366)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial C_i^{i,u}}=\delta^{i-(s-1)}\left[(1-\phi)u_{C_i^{i,u}}-\left(1-m_i\right)\lambda_i\right]\leq 0\ (4.367)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial C_{i+1}^{i,u}}=(1-\phi)\beta v_{C_{i+1}^{i,u}}-\delta\left(1-m_{i+1}\right)\frac{\lambda_{i+1}}{N}\leq 0\ (4.368)$$

Tomando la primera de las condiciones para q y u y teniendo en cuenta que las funciones de utilidad son las mismas para los dos tipos de individuos y que la proporción de cualificados siempre se encuentra siempre en el intervalo abierto entre 0 y 1, se tendrá que:

$$\frac{m_i}{\phi}\frac{1-\phi}{1-m_i}=\frac{u_{C_i^{i,q}}}{u_{C_i^{i,u}}}\ (4.369)$$

A su vez esto implica que los consumos son los mismos en el óptimo social para los dos grupos de individuos en su primer período de vida solo si los pesos sociales coinciden con la propoción real de individuos en dicho período. Por el contrario y dada la concavidad de las funciones u y v si, por ejemplo, $\phi>m_i\Rightarrow C_i^{iq}>C_i^{i,u}$. Si se asignara el mismo peso a ambos grupos y $m_i>1/2$, el consumo de los cualificados en el primer período sería mayor que el de los no cualificados. Repitiendo el esquema para el otro par de cpo y efectuando las oportunas combinaciones, se deriva análoga expresión para los consumos del segundo período de vida:

$$\frac{m_{i+1}}{\phi}\frac{(1-\phi)}{(1-m_{i+1})}=\frac{v_{C_{i+1}^{i,q}}}{v_{C_{i+1}^{i,u}}} \quad (4.370)$$

Las dos anteriores igualdades han de leerse conjuntamente. Por ejemplo, si el valor de m se mantuviera constante a lo largo del tiempo[174], la relación marginal de sustitución intertemporal para ambos grupos de individuos se igualaría. La equiparación del consumo de los dos tipos de hogares en ambos períodos exigiría condiciones muy concretas, a saber, que tanto la ponderación social como la proporción real de los dos fuera igual a 1/2 en todo período. Por tanto ni siquiera en equilibrio estacionario estaría garantizada la igualdad del consumo entre todos los individuos en un período determinado.

Para resolver las restantes condiciones de primer orden deberá tenerse en cuenta que los pesos cambian a consecuencia de las elecciones del tiempo llevadas a cabo por los individuos. Por tanto, resultará útil calcular a priori el signo del valor sombra del peso de los trabajadores cualificados en equilibrio general, para obtener expresiones más simplificadas en las cpo. Así pues:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m_s}=\lambda_s\left\{\left.\frac{\partial y_s}{\partial m_s}\right|_{pr}+\left.\frac{\partial y_s}{\partial m_s}\right|_{ex}+\left(D_s^u-D_s^q\right)\right\}<>0 \quad (4.371)$$

Nótese que la productividad privada de m ahora comprende un elemento adicional, a consecuencia de la variación de los pesos del capital físico, acentuando la ambigüedad en su signo, de manera que:

---

174 Aunque la comparación entre tasas sociales y privada se lleva a cabo para un equilibrio general ordinario, valga señalar que en la versión del modelo con m endógeno la senda estacionaria conlleva diferentes inversiones en educación por cada grupo para que m pudiera ser constante en dicha senda. Para verlo, basta comparar m entre períodos consecutivos y suponer tiempos destinados a la educación constantes, que darían lugar a probabilides de acceso a la cualificación también constantes:

$$m_s=\frac{L_s^q}{L_s}=\frac{\left[\pi^q L_{s-1}^q+\pi^u L_{s-1}^u\right]}{L_{s-1}}$$

Véase, por tanto, que solo si $\pi^q=\pi^u$ m podrá ser constante. Teniendo en cuenta la relación entre ambas funciones de probabilidad, la igualdad anterior exige que $n^{hu}>n^{hq}$. Caso de que esta igualdad entre probabilidades estacionarias no se verificara, m evolucionaría al alza o a la baja en función de la relación entre los valores relativos del esfuerzo educativo de equilibrio.

$$\left.\frac{\partial y_s}{\partial m_s}\right|_{pr} = y_s\left(\frac{\alpha_q}{m_s} - \frac{\alpha_u}{m_s} + \frac{\left(1-\alpha_q-\alpha_u-\eta\right)}{\tilde{K}_s}\left(K_s^q - K_s^u\right)\right);\ \tilde{K}_s = m_s K_s^q + \left(1-m_s\right)K_s^u \quad (4.372)$$

De aquí que, junto a la condición anterior, una segunda condición suficiente para que dicha productividad tenga un signo positivo es que el stock de capital físico de lo cualificados sea mayor que el de los no cualificados. Hecha esta precisión, la cuantía del valor sombra de m se compone de dos términos a incluir en la cpo del planificador. Uno, relativo la producción, que comprende tanto el efecto externo como el privado, el primero de signo positivo y el segundo siempre que se verifique la condición señalada anteriormente. Otro, referente a la demanda relativa de ambos grupos de hogares (D, que comprende tanto demanda con fines de consumo como de capital físico), cuyo signo a priori se desconoce; esta ambigüedad arrastra el signo total de la derivada. En términos del valor sombra de la riqueza, la indefinición en signo es lógica: incluso aunque el efecto de la proporción de cualificados sea positiva en términos netos sobre la producción, si se prima la proporción de aquel grupo de hogares con una demanda del bien final más elevada en s, se agrava la tensión de recursos en la economía en lugar de relajarse, por el impacto neto sobre el bienestar podría ser negativo.

Las cpo respecto la educación, suponiendo soluciones interiores para el tiempo de aprendizaje en los dos grupos, establecen que:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_i^{h,q}} = -\lambda_i \frac{N\alpha_q}{n_i^{w,q}} y_i + \varphi_i \pi_{s,n}^q N L_s^q \leq 0 \quad (4.373)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_i^{h,u}} = -\lambda_i \frac{N\alpha_u}{n_i^{w,u}} y_i + \varphi_i \pi_{s,n}^u N L_s^u \leq 0 \quad (4.374)$$

Estas dos cpo muestran, en un entorno discreto, el mismo tipo de balance entre costes marginales y beneficios marginales de un problema de acumulación de capital humano en un horizonte infinito: los primeros, dados por la renuncia a la productividad marginal del trabajo, se igualan a los segundos para una solución interior, viniendo dados estos últimos por la contribución marginal a la producción de nuevos trabajadores cualificados en el futuro. Estas ecuaciones permiten hallar una relación entre los dos multiplicadores de Lagrange, que se utilizarán para derivar la tasa de retorno social:

$$\varphi_i = \frac{\lambda_i \frac{\alpha_q}{n_i^{w,q}} y_i}{\pi_{s,n}^q L_s^q} = \frac{\lambda_i \frac{\alpha_u}{n_i^{w,u}} y_i}{\pi_{s,n}^u L_s^u} \quad (4.375)$$

Por lo que respecta a la cpo respecto a la variable de estado, se tendrá:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial L_{i+1}^{q}}=-\varphi_{i}+\delta\left\{m_{i+1,L^{q}}\frac{\partial\Omega}{\partial m_{i+1}}+\varphi_{i+1}N\left(\pi_{s+1}^{q}-\pi_{s+1}^{u}\right)\right\}\leq 0 \quad (4.376)$$

$$\lim_{i\to\infty}\delta^{i}\varphi_{i}L_{i+1}^{q}=0 \quad (4.377)$$

A partir de las cpo del consumo, particularizadas a estado estacionario, se deduce que:

$$\frac{\lambda_{i}}{\delta\lambda_{i+1}}=\frac{u_{C_{i}^{i,j}}}{N\beta v_{C_{i+1}^{i,j}}}\frac{m_{s+1}}{m_{s}};\ j=q,u \quad (4.378)$$

Combinando la cpo del tiempo de aprendizaje y la del número de cualificados, resultan dos tasas de retorno sociales, cada una correspondiente a la inversión en educación de los respectivos grupos, que se igualarán a la relación marginal de sustitución intertemporal entre el consumo presente y futuro y la tasa de retorno social de la inversión social en capital humano. Formalmente y comenzando por la tasa social de los cualificados:

$$\frac{u_{C_{s}^{s,q}}}{\beta v_{C_{s+1}^{s,q}}}\frac{m_{s+1}}{m_{s}}\geq\frac{m_{s+1,L^{q}}\Phi_{s+1}\pi_{s,n}^{q}L_{s}^{q}}{\frac{\alpha_{q}}{n_{s}^{w,q}}y_{s}}+\frac{\frac{\alpha_{q}}{n_{s+1}^{w,q}}y_{s+1}}{\frac{\alpha_{q}}{n_{s}^{w,q}}y_{s}}\frac{\pi_{s,n}^{q}L_{s}^{q}}{\pi_{s+1,n}^{q}L_{s+1}^{q}}N\left(\pi_{s+1}^{q}-\pi_{s+1}^{u}\right)\equiv rr_{s,s+1}^{hn,q}\Big|^{P};$$

$$\Phi_{s+1}=\frac{\partial y_{s+1}}{\partial m_{s+1}}+\left(D_{s+1}^{u}-D_{s+1}^{q}\right) \quad (4.379)$$

En cuanto a la tasa de los no cualificados, que en general será distinta de la los cualificados:

$$\frac{u_{C_{s}^{s,u}}}{\beta v_{C_{s+1}^{s,u}}}\frac{1-m_{s+1}}{1-m_{s}}\geq\frac{m_{s+1,L^{u}}\Phi_{s+1}\pi_{s,n}^{u}L_{s}^{u}}{\frac{\alpha_{u}}{n_{s}^{w,u}}y_{s}}+\frac{\frac{\alpha_{u}}{n_{s+1}^{w,u}}y_{s+1}}{\frac{\alpha_{u}}{n_{s}^{w,u}}y_{s}}\frac{\pi_{s,n}^{u}L_{s}^{u}}{\pi_{s+1,n}^{u}L_{s+1}^{u}}N\left(\pi_{s+1}^{q}-\pi_{s+1}^{u}\right)\equiv rr_{s,s+1}^{hn,q}\Big|^{P} \quad (4.380)$$

Cualquiera de los tasas anteriores se compone de dos sumandos, la renta marginal y un solo término que representa las ganancias de capital, representando la mejora de las condiciones de acceso de futuras generaciones a consecuencia del acceso de un nuevo individuo. Véase que en la ecuación de acumulación de individuos cualificados no existe un término de depreciación como tal, al ser incierto el mantenimiento de la condición de cualificado entre generaciones; implícitamente la tasa de depreciación está incluida en la probabilidad multiplicada por el número de individuos sujetos a la "lotería" de la cualificación. Comenzando por la renta marginal (primer sumando), el numerador de la tasa refleja probabilidad que la inversión en educación implica en términos de incremento de los individuos cualificados, multiplicada por la renta que la variación en m desencadenada por este hecho genera. A su vez, dicha renta marginal está integrada por la suma de los impactos privado y externo sobre la producción, así como el efecto sobre la demanda agregada, mientras que el coste marginal en el denominador refleja la pérdida de producción procedente de detraer tiempo al trabajo de mercado. Además, el efecto spill-over de la renta beneficia igualmente a cualificados y no cualificados y es común a las tasas de ambos grupos, aunque es necesario en general realizar supuestos sobre la margnitud relativa de la primera derivada de la función de probabilidad para llegar a una conclusión sobre el tamaño relativo de dichas rentas marginales. Es importante señalar que, al desaparecer los no cualificados de la tasa de retorno, el efecto del aumento de los cualificados sobre m (m_{s+1,L^q}) debe ser neto, esto es, medirá el impacto directo por incremento de los cualificados más el indirecto por la disminución de los no cualificados. El término de ganancias de capital se valora, análogamente a una tasa de retorno estándar con acumulación continua, por los costes de producción relativos en s+1 y s, y multiplica al incremento neto futuro de probabilidades de capacitación para la siguiente generación debido a la elevación del número de cualificados. El hecho de que dicha probabilidad incremental se mida en términos netos indica que indirectamente la tasa recoge la disminución de no cualificados paralela al incremento de los cualificados, dado el tamaño exógeno de la población.

Una última observación concierne al signo de la tasa social, que puede ser positivo o negativo a causa de la indefinición de los numeradores de sus dos miembros. La indefinición de la renta marginal ya fue comentada antes, pero en la medida en que las probabilidades de éxito en la adquisición de educación dependen de los esfuerzos educativos relativos, a priori nada garantiza que la probabilidad de los cualificados sea superior a la del otro grupo, si ambas están evaluadas para diferentes esfuerzos. En el caso de que el signo global fuera negativo, es claro que la decisión social óptima sería la inversión nula en capital humano. Este es un problema específico de este tipo de modelo de cualificaciones binarias sin una gradación continua del capital humano; como vimos, no se presenta en un contexto de agentes homogéneos y efectos externos en el stock de capital humano, al no dar lugar este último supuesto a un fraccionamiento de la restricción de recursos de acuerdo con la proporción de cada grupo. En un caso muy concreto, el de un estado estacionario con m constante y mayor a 1/2 y $\phi = 1/2$, el consumo de los no cualificados en ambos períodos será superior al de los cualificados, en cuyo caso, teniendo en cuenta además que la inversión neta en capital físico se anularía en todo período, el valor sombra de m se haría positivo siempre que se verificasen las dos condiciones que resultan conjuntamente suficientes para que la productividad marginal social de m resulte también positiva. Aun así, nada podría decirse sobre el signo de las ganancias de capital.

Comparando la tasa social con el retorno privado, se observa rápidamente que el principal móvil de la inversión privada, la transferencia intergeneracional incremental a consecuencia de un cambio de status laboral en los hijos, está ausente en la primera, al constituir una mera redistribución de renta entre individuos dentro del mismo período y no formar parte de la restricción de recursos de la economía. Cualitativamente el origen de las rentas sociales del activo no es muy distinto: el aumento de la proporción de cualificados sobre el total de la población, que a su vez genera una variación del bienestar, bien por medio de un incremento total del output (bien en el componente privado de la producción, bien en el de efectos externos), aunque se complementa con un efecto composición relativo a la demanda agregada. Por lo demás, en las dos tasas el coste de la inversión es análogo, al proceder de la variación del tiempo de trabajo y, derivadamente, la productividad marginal perdida. Además de esta divergencia, la diferencia en el horizonte de planificación añade un término en la tasa del planificador (las ganancias de capital) que refleja la ineficiencia dinámica propia de la optimización en un horizonte de 2 períodos por los agentes privados; un tratamiento más extenso de este problema podrá encontrarse en el capítulo 5.

Respecto al trabajo de Moretti, efectos similares están alojados en distintos puntos de la tasa. Los dos efectos spill-over que barajaba Moretti están presentes en este modelo intertemporal, si bien tratados de una manera más uniforme. El primero, aquel que asociaba a las productividades de los distintos tipos de trabajadores, se evidencia en el modelo intertemporal a través del efecto externo dado por la proporción de trabajadores cualificados y se manifiesta en el período siguiente a aquel a que se refiere la inversión en educación. El segundo, de carácter privado, también es recogido por la tasa de retorno y se deriva igualmente de la complementariedad entre ambos tipos de trabajadores en la función de producción, solo que se plasma en la variación marginal de la producción -privada- derivada de un incremento de m, en lugar de tratarse de un puro efecto escala como en el trabajo de Moretti. Además, mientras en el artículo de este autor no había un coste asociado de paso de una cualificación, la endogeneización del tiempo la versión intertemporal añade un precio de la inversión, que se ubica en el denominador de la tasa del planificador y que formaba también parte de la tasa privada. Por último, el planteamiento del problema en un horizonte intertemporal tiene unos peajes inevitables en forma de adición a la tasa de las ganancias de capital o de una renta marginal más compleja, aunque al mismo tiempo esta estructura presenta la ventaja de la comparabilidad con la tasa de retorno de otros activos, financieros o reales.

BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO IV

Acemoglu, Daron (1996), 'A Microfoundation for Social Increasing Returns in Human Capital Accumulation', The Quarterly Journal of Economics, 111 (3), 779-804.

Acemoglu, Daron and Joshua D. Angrist (2001), 'How Large Are Human Capital Externalities? Evidence from Compulsory-Schooling Laws', NBER Macroeconnomics Annual 2000, NBER Books, 15 9-74.

Bansal, Ravi, Thomas D. Tallarini, and Amir Yaron (2008), 'The Return to Wealth, Asset Pricing and the Intertemporal Elasticity of Substitution', Society of Economic Dynamics. 2008 Meeting Papers,

Barnett, William A. (1977), 'Pollak and Wachter on the Household Production Function Approach', Journal of Political Economy, 85 (5), 1073-82.

Becker, Gary S. (1975), 'Investment in Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, With Special Reference to Education', NBER Books, 2nd edition

Booth, A.L. and M.G. Coles (2010), 'Tax policy and returns to education', Labour Economics, 17 (1), 291-301.

Braakmann, Niels (2009), 'Are There Social Returns to Both Firm-Level and Regional Human Capital? Evidence from German Social Security Data', University of Lüneburg, Institute of Economics Working Paper Series, 143

Chiswick, Barry R. (2003), 'Jacob Mincer, Experience and the Distribution of Earnings', Review of Economics of the Household, 1 (4), 343-61.

Dickson, Matt and Colm Harmon (2011), 'Economic returns to education: What We Know, What We Don´t Know, and Where We Are Going,Some Brief Pointers', Economics of Education Review, 30 (6), 1118-22.

Dinda, Soumyananda (2008), 'Social capital in the creation of human capital and economic growth: A productive consumption approach', The Journal of Socio-Economics, 37 (5), 2020-33.

Epstein, Larry G. and Stanley E. Zin (1991), 'Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis', Journal of Political Economy, 99 (2), 263-86.

Freeman, Richard B. (1986), 'Chapter 6 Demand for Education', in Orley, C. Ashenfelter and Richard Layard (ed.), Volume 1 (Elsevier), 357-86.

——— (1977), 'The Decline in the Economic Rewards to College Education', The Review of Economics and Statistics, 59 (1), 18-29.

——— (1975), 'Overinvestment in College Training?', The Journal of Human Resources, 10 (3), 287-311.

Ge, Suqin (2013), 'Estimating the returns to schooling: Implications from a dynamic discrete choice model', Labour Economics, 20 (0), 92-105.

Heath, Julia A (2001), 'Human Capital Investment: An International Comparison: Organisation for Economic Co-operation and Development; Centre for Educational Research and Innovation, OECD, Paris.', Economics of Education Review, 20 (1), 93-94.

Heckman, James J., Lance J. Lochner, and Petra E. Todd (2008), 'Earnings Functions and Rates of Return', Journal of Human Capital, 2 (1), 1-31.

——— (2003), 'Fifty Years of Mincer Earnings Regressions', IZA Discussion Papers, 775

——— (2006), 'Chapter 7 Earnings Functions, Rates of Return and Treatment Effects: The Mincer Equation and Beyond', in E., Hanushek and F. Welch (ed.), Volume 1 (Elsevier), 307-458.

Jacobs, Bas (2005), 'Optimal Income Taxation with Endogenous Human Capital', Journal of Public Economic Theory, 7 (2), 295-315.

Jensen, Robert (2010), 'The (Perceived) Returns to Education and the Demand for Schooling', The Quarterly Journal of Economics, 125 (2), 515-48.

Kara, Orhan (2008), 'Comparing Two Approaches to the Rate of Return to Investment in Education', Education Economics, 18 (2), 153-65.

Katz, Lawrence F. and Kevin M. Murphy (1992), 'Changes in Relative Wages, 1963-1987: Supply and Demand Factors', The Quarterly Journal of Economics, 107 (1), 35-78.

Lustig, Hanno and Stijn Van Nieuwerburgh (2008), 'The Returns on Human Capital: Good News on Wall Street is Bad News on Main Street', Review of Financial Studies, 21 (5), 2097-137.

Mankiw, N. Gregory (1985), 'Consumer Durables and the Real Interest Rate', The Review of Economics and Statistics, 67 (3), 353-62.

Martins, Pedro S. and JimY. Jin (2010), 'Firm-level Social Returns to Education', J Popul Econ, 23 (2), 539-58.

Milesi-Ferretti, Gian Maria and Nouriel Roubini (1998), 'On the Taxation of Human and Physical Capital in Models of Endogenous Growth', Journal of Public Economics, 70 (2), 237-54.

Mincer, Jacob (1974), 'Schooling, Experience and Earnings', National Bureau of Economic Research, New York,

——— (1958), 'Investment in Human Capital and Personal Income Distribution', Journal of Political Economy, 66 (4), 281-302.

Moretti, Enrico (2004), 'Estimating the Social Return to Higher Education: Evidence from Longitudinal and Repeated Cross-Sectional Data', Journal of Econometrics, 121 (1,Äì2), 175-212.

Ogaki, Masao and Carmen M. Reinhart (1998), 'Measuring Intertemporal Substitution: The Role of Durable Goods', Journal of Political Economy, 106 (5), 1078-98.

Palacios, Miguel (2014), ‘Human Capital as an Asset Class Implications from a General Equilibrium Model’, Review of Financial Studies,

Pollak, Robert A. and Michael L. Wachter (1975), ‘The Relevance of the Household Production Function and Its Implications for the Allocation of Time’, Journal of Political Economy, 83 (2), 255-78.

Ponzetto, Giacomo A.M. and Ugo Troiano (2014), ‘Social Capital, Government Expenditures and Growth’, Barcelona Graduate School of Economics Working Papers, 612

Purnastuti, Losina, Paul W. Miller, and Ruhul Salim (2013), ‘Declining rates of return to education: evidence for Indonesia’, Bulletin of Indonesian Economic Studies Bulletin of Indonesian Economic Studies, 49 (2), 213-36.

Schündeln, Matthias and John Playforth (2014), ‘Private versus social returns to human capital: Education and economic growth in India’, European Economic Review, 66 (0), 266-83.

Vaillancourt, Francois (1995), ‘The Private and Total Returns to Education in Canada, 1985’, The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d’Economique, 28 (3), 532-54.

Wolter, Stefan C. and Bernhard A. Weber (1999), ‘On the Measurement of Private Rates of Return to Education / Ein Ansatz zur Messung privater Bildungsrenditen’, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 218 (5/6), 605-18.

V. Capital humano, movilidad social e intervención pública.

V.1. Movilidad intergeneracional y social en la Teoría del Capital Humano.

Como paso previo a una revisión y análisis de la literatura sobre idoneidad de distintas políticas educativas, conviene definir un marco previo sobre aquellos factores que justifican la intervención pública en este campo. Hablaríamos principalmente de la influencia de la renta familiar en la acumulación de capital humano, así como del papel de todas aquellas variables moduladoras que juegan un papel esencial en los resultados, como el grado de altruismo intergeneracional y las restricciones crediticias. Antes de comenzar la discusión, conviene también distinguir los conceptos de movilidad intergeneracional y movilidad social, que a menudo se entremezclan en los debates de política economíca. Mientras por el primero se entiende la capacidad de generar rentas de un individuo en relación con la cohorte anterior (o, en el contexto de los modelos con los que se va a realizar el análisis, la evolución a lo largo de la historia familiar del stock de capital humano), el segundo involucra a la comparación entre la capacidad de generación de diferentes individuos que coexisten dentro de la sociedad. Los dos tipos de movilidad no necesariamente son equivalentes: pueden observarse mejoras, por ejemplo, de una determinada famlia entre generaciones y sin embargo ser estas compatibles con una depauperación relativa respecto a la media de los individuos. Mientras para estudiar los condicionantes del primer tipo de movilidad son suficientes modelos de agentes homogéneos, en el segundo es necesaria la introducción de heterogeneidad entre agentes. Debido a las complicaciones analíticas que suele acarrear la heterogeneidad, los modelos predominantes son los de agentes homogéneos, mientras que la movilidad social se apoya más en estudios de tipo empírico. En el capítulo 6 se propone un marco de agentes heterogéneos para estudiar ambos tipos de movilidad, así como las políticas educativas más adecuadas para fomentarla.

Teniendo en cuenta el marco de referencia conceptual empleado desde el comienzo de este trabajo, hay que señalar que **la teoría beckeriana de inversión en capital humano es también una teoría de distribución de la renta dentro de una economía de mercado,** en la medida en que da cabida de un modo natural a diferencias en la inversión en el activo que tienen su origen en la heterogeneidad natural de las características físicas e intelectuales de las personas. Dichos factores afectan a la decisión óptima de acumulación del activo y, derivadamente, acaban traduciéndose en desigualdades en la renta laboral, al venir influida la productividad marginal del trabajo y el salario real por la acumulación de capital humano[175].

Becker (1967) ofrece una primera explicación de este fenómeno de un modo, como es habitual, escasamente matematizado pero enormemente claro y por medio de argumentos difícilmente rebatibles una vez se aceptan los supuestos de partida. Para ello parte de un análisis de equilibrio parcial referido al mercado de inversiones en capital humano. En una versión básica del modelo, un demandante y un oferente representativos determinan la inversión en el activo y su tasa de retorno, que en equilibrio debe igualarse al coste de financiación (ver capítulo 4, donde se desarrollan en diferentes contextos estos resultados). Como se aprecia, un primer supuesto esencial es el funcionamiento perfecto del mercado de capitales, en el que, para simplificar, solamente se financian operaciones de inversión en capital humano; en cualquier caso, los individuos podrán recurrir a él y esto les permitirá suavizar sus diferencias de status familiar; este supuesto será recurrente en toda la literatura de Becker, de manera notable -como se vio en el capítulo 2- en Becker y Tomes (1979, 1986).

El equilibrio del mercado se determina por la igualdad ex ante entre demanda de fondos prestables y oferta de los mismos. A consecuencia de los rendimientos decrecientes del input variable en la tecnología de acumulación, la demanda es decreciente respecto al coste de financiación, reflejando con este comportamiento el decrecimiento de la tasa de retorno respecto a la cantidad aplicada del input, en concreto a consecuencia del componente de rentas marginales del activo. En cuanto a la oferta, si las fuentes de financiación son homogéneas, la curva será monótonamente creciente. No obstante, si se recurre a distintas fuentes con costes diferentes (por ejemplo, herencias, con un coste nulo, o intereses subsidiados por el gobierno, para ciertos tramos de crédito) la oferta será discontinua y escalonada, con posibles discontinuidades en algumos tramos del recorrido. Dependiendo de cuál sea la configuración de la oferta, en el equilibrio precios y cantidades pueden estar correctamente definidos o los primeros pueden tener valores múltiples. En

---

[175] El análisis del grado en que dichas disparidades en la acumulación implican diferencias en la renta se complica en la medida en que la oferta de trabajo se endogeneiza, ya que un menor salario por hora puede verse parcial o totalmente compensado por las horas trabajadas. Un recurso típico en la mayor parte de los modelos es fijar la jornada laboral en el período en que se produce la comparación de los efectos sobre la renta de distintos patrones de acumulación: por ejemplo, en un horizonte de 2 períodos se dedicaría tiempo a la producción de capital humano solamente en el primero de ellos, mientras que voluntariamente se llegaría a un equilibrio esquina en el segundo.

cualquier caso, se supone en el resto del análisis una oferta monótonamente creciente que garantiza la unicidad del equilibrio en precios y cantidades.

Las diferencias en las inversiones obedecen a distintas razones. En primer lugar, de oferta, ya que incluso personas con las mismas capacidades en origen pueden enfrentarse a distintas oportunidades de financiación, bien por factores geográficos (distintos países con políticas de ayudas a la financiación de educación heterogéneas), bien por un entorno familiar más favorable que comporta costes de financiación más bajos en un tramo inicial de la inversión o bien (no es mencionado por Becker, pero sería un factor latente) debido a la ausencia de fondos prestables a partir de cierto nivel de la inversión, circunstancia en la que que se alcanzaría un equilibrio restringido de crédito. En cualquier caso, cualquiera de estas causas implicaría curvas de oferta situadas en mayor medida hacia la izquierda, dando lugar a equilibrios con menor volumen de inversión y mayores costes de financiación (o simplemente con menor volumen, en presencia de restricciones cuantitativas de crédito). El origen de la desigualdad puede localizarse en la demanda, bien en las facultades genéticas o en la facilidad de aprendizaje (en términos de las tecnologías de acumulación, una mayor productividad multifactorial), generando curvas situadas más o menos a la derecha para cada coste de financiación. Finalmente, las dos clases de factores pueden solaparse e incluso interrelacionarse -individuos con mayor capacidad pueden encontrar fuentes de financiación más baratas, como becas públicas o privadas-. **La conclusión principal de este análisis, que no puede interpretarse en clave dinámica, es que en la medida en que las diferencias en la inversión de equilibrio no obedezcan a distorsiones del mercado (estructurales o inducidas) y, al ser las decisiones adoptadas por los propios individuos que internalizan las consecuencias futuras de la tasa de acumulación elegiga, la desigualdad social resultante no puede calificarse de ineficiente.**

Los modelos de equilibrio general y generaciones solapadas (OLG) son el marco natural para evaluar, introduciendo diferentes clases de heterogeneidad en los agentes, las consecuencias de estas tanto sobre la movilidad intergeneracional como sobre la movilidad social, tanto bajo perfecto funcionamiento de los mercados de capital como con distintos tipos de fricciones o anomalías en las tecnologías, de acumulación o preferencias. Dentro de ellos, como se ha dejado entrever en los capítulos previos, pueden encontrarse tanto aquellos en los que los padres deciden óptimamente los parámetros básicos de la educación de la siguiente generación -los predominantes- como otros en los que cada generación es responsable de sus propios gastos en educación, si bien no escapa habitualmente a influencias familiares como los legados financieros o la influencia más o menos directa del capital humano de los progenitores.

Una de las primeras implicaciones del análisis estático de Becker es que, en ausencia de rasgos heterogéneos de los agentes, y e igualdad de acceso a los mercados de capitales -además de no haber problemas de movilidad social, como es obvio- la movilidad interneracional es perfecta, dada una determinada tecnología de acumulación y unas preferencias que permitan la aplicación del teorema de Fisher. **Chusseau et al. (2012)** proponen un sencillo modelo canónico de equilibrio general con OLG que muestra la dinámica de la movilidad intergeneracional. En él, el tipo de interés está dado, aunque este supuesto puede justificarse en el contexto de una economía abierta. en el que se cuantifica una movilidad intergeneracional estándar en un modelo à la Lucas en ausencia de fricciones o no capaz de anidar las disti convexidades. Como tecnología propone la siguiente función de acumulación de capital humano, donde las variables siguen la misma notación que se ha venido empleando hasta ahora[176]:

$$a_{s+1}^{h} = a_{s}^{h} + \left(x_{s}^{h}\right)^{\eta} \left(n_{s}^{h}\right)^{\gamma} \left(a_{s}^{h}\right)^{\varepsilon} \quad (5.1)$$

Los patrones de acumulación de capital humano son diferentes según los modelos, pero pueden distinguirse aquellos en los que la educación se suministra en el primer período de vida a un coste que deben sufragar bien los propios individuos, bien los progenitores, o aquellos en los que existe una dotación previa de capital humano, a partir de la cual el único coste de acumulación es el de oportunidad. En el primero de estos esquemas, x_{s}^{h} será una variable operativa en la tecnología de aprendizaje y n_{s}^{h} bien será también endógena, o bien =1, en aquellos contextos en los que los individuos dediquen su dotación de tiempo íntegramente a la formación. En el segundo, x deviene no operativa y n^{h} es la única variable de decisión, con un coste asociado igual al salario de mercado. La dinámica del modelo y, en última instancia, la movilidad intergeneracional está marcada por la estructura de la función de inversión bruta en capital humano y, en particular, por la suma de sus exponentes. Cuando esta es inferior a la unidad, el equilibrio estacionario viene marcado por un stock constante de capital humano, mayor o menor en función de las distintas características del entorno (fricciones de crédito, etc). En el análisis comparativo de políticas educativas del capítulo 6, sin embargo, se consideran modelos de crecimiento endógeno, en los que el estado estacionario se caracteriza por una tasa de crecimiento constante del capital humano, en la línea de Lucas-Uzawa.

[176] En este apartado se considera solamente el fenómeno de la movilidad intergeneracional en el contexto de las decisiones privadas; más adelante, al comentar las principales políticas públicas educativas, se introducirá en las funciones de acumulación una variable relacionada con las distintos instrumentos públicos.

Sin fricciones de crédito, existe un estado estacionario en el que existe convergencia intergeneracional en la acumulación de capital humano, en el sentido de que el nivel o la tasa de crecimiento de este se estabiliza. Dependiendo de la existencia de dinámica de transición, esto implica un incremento permanente del capital acumulado entre cohortes, si bien la tasa de crecimiento puede estabilizarse desde un primer momento, o seguir una senda habitualmente creciente y cóncava en el espacio a_s^h, a_{s+1}^h hasta alcanzar el estado estacionario. A fin de comparar los resultados en función de los inputs utilizados, el mismo trabajo de Chusseau et al. propone un sencillo modelo canónico que permite obtener una solución cerrada para el stock de capital humano de equilibrio y su valor estacionario. En este modelo, los individuos viven durante tres períodos: en el primero acumulan capital humano y no consumen; en el segundo, consumen, trabajan y en su caso ahorran; para simplificar el modelo, se supone que la totalidad de los gastos realizados para financiar el capital humano se financian con recurso a crédito (claro está, cuando no existen fricciones en los mercados de capital)[177]. Finalmente, al principio del período de madurez los individuos reciben una dotación unitaria de renta, a la que podrán añadir su dotación de capital humano en concepto de renta salarial[178].

Así, las preferencias de los individuos toman una forma logarítmica en los consumos del segundo y tercer período de vida, en la que el valor de σ desempeña un valor análogo al de la tasa de descuento temporal:

$$U = (1-\sigma)C_s^{s-1} + \sigma C_{s+1}^{s-1} \quad (5.2)$$

Al no existir fricciones de crédito, el problema de optimización puede resolverse aplicando el teorema de separación de Fisher, de modo que la inversión óptima en capital humano se determina maximizando la renta intertemporal, que descontada apropiadamente al período s puede escribirse como:

$$y_s = 1 + a_s^{hs} - (1+r_s)x_s^h \quad (5.3)$$

En estas condiciones, la maximización de la renta sujeta a la tecnología de acumulación (con $n_s^h = 1$) arroja el siguiente valor óptimo:

---

177 En este mismo apartado analizaremos más adelante y con mayor detalle los efectos de las restricciones de crédito en un modelo similar en que se relaja este supuesto, innecesario y cuyo único objetivo es facilitar la obtención de una solución cerrada.

178 La identificación del stock de capital humano con el salario, como hemos visto a lo largo de los capítulos anteriores, es relativamente frecuente, obedece también a operativizar los modelos y puede explicarse mediante una función de producción del bien final lineal y de coeficiente unitario en el capital humano.

$$x_s^h = \left(\frac{\mu}{1+r_s} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \left(a_s^h \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\mu}} \quad (5.4)$$

El valor óptimo depende positivamente del capital humano previo, lo que genera una persistencia en la senda de equilibrio; esta persistencia, que no es equivalente a persistencia en rentas si el mercado de crédito es operativo, viene explicada por la dependencia positiva de la tasa de retorno del capital humano respecto al stock precedente, como se concluyó en el capítulo 3. Sustituyendo este valor en la ecuación de acumulación del capital humano, es posible resolver la ecuación en diferencias resultante $a_{s+1}^h = \phi\left(a_s^h\right)$ y extraer su solución estacionaria, igual, bajo estos supuestos, a:

$$a^h = (\eta)^{\frac{1}{1-\eta-\varepsilon}}, \ \eta + \varepsilon < 1 \quad (5.5)$$

De esta manera, mientras en la convergencia hacia el equilibrio estacionario el capital humano se acumula de una manera monótona, aunque a ritmo decreciente, dada la concavidad de ϕ, una vez alcanzado este la movilidad intergeneracional se detiene (o, si los rendimientos fueran constantes, la tasa de crecimiento se estabilizaría).

En el segundo tipo de modelos, con elección del tiempo de aprendizaje, las mismas hipótesis que las utilizadas cuando el input se adquiría en el mercado conducen a una definición de la renta como la siguiente: $y_s = \left(1-n_s^h\right)\left(1+a_s^h\right)$. La solución de equilibrio general para n^h también es creciente respecto al stock de capital humano bajo los supuestos específicos realizados y, más concretamente, a consecuencia tanto de los rendimientos decrecientes del capital humano como de un salario real constante por unidad de capital humano, lo que implica una tasa de retorno creciente respecto al stock de este activo[179]. Esta relación creciente es la que permite construir otra ecuación en diferencias del capital humano y despejar su valor de equilibrio estacionario, que ahora será:

$$a^h = \left[\left(n^h\right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (5.6)$$

[179] Como se vio en el capítulo 3, con rendimientos constantes del capital humano en la tecnología de aprendizaje la tasa de retorno del capital en equilibrio parcial es neutral respecto al capital humano acumulado hasta el período en el que se acomete la nueva inversión en el activo. En equilibrio general la relación dependerá del tipo de función de producción empleada dentro del sector de oferta del bien final.

Donde el valor estacionario del tiempo de aprendizaje es la solución a la siguiente ecuación implícita:

$$(1+\gamma)n^{h}+n^{h(1-\varepsilon-\gamma)(1-\varepsilon)}-\gamma=0 \quad (5.7)$$

Si en los anteriores modelos se introducen elementos de heterogeneidad en los parámetros de la tecnología (por ejemplo, diferentes productividades multifactoriales, ya que la consideración de stocks de capital iniciales diferentes dificultaría la obtención de soluciones cerradas), se desprende que, si bien la movilidad intergeneracional se mantiene, la reducción de la movilidad social se ve limitada en estado estacionario. Si los rendimientos en el capital humano son decrecientes, exisitirá en general un estado estacionario asociado a un nivel positivo y constante de los inputs, aunque este será diferente en función de la productividad multifactorial que exhiban los distintos agentes. Si los rendimientos son constantes, en la medida en que la solución estacionaria implique una acumulación neta positiva del activo dichas tasas divergirán, por lo que la disparidad social en niveles de capital humano se incrementará en general con el tiempo. Si los rendimientos son crecientes se abren varias posibilidades en función del grado de concavidad de la función de acumulación (ver capítulo 4 sobre tasas de retorno), aunque el caso más favorable para la movilidad social, un estado estacionario con niveles del activo diferentes aunque constantes, podrá alcanzarse solo asintóticamente. **Por tanto los límites a la movilidad social se materializan dinámicamente incluso en entornos de funcionamiento perfecto de los mercados de capital, siempre que los agentes presenten características heterogéneas; este resultado, sin perjuicio de que se produzca una movilidad intergeneracional continua.**

Aparte de estas consideraciones sobre entornos sin fricciones, hay que referirse a aquellas dificultades a la movilidad social que el relajamiento de los distintos supuestos del entorno beckeriano producen. Un primer obstáculo, ya identificado por Becker y Tomes, es la existencia de fricciones al crédito. Estas requieren versiones algo más elaboradas algo más elaboradas del modelo canónico presentado que permitan identificar los principales condicionantes de los resultados. Como primera aproximación, pueden distinguirse dos tipos de enfoques de tratamiento de las restricciones de crédito. En un primero, que no es el mayoritario, los tipos de interés del crédito están sujetos a una prima de riesgo decreciente en la renta de los padres. Este tipo de fricción, sin embargo, no impide la convergencia de los individuos con idénticos parámetros tecnológicos al equilibrio estacionario, sino que retarda la velocidad de transición para las familias con menores medios[180].

Otro posible canal de actuación de las restricciones crediticias concierne a los préstamos realizados de padres a hijos, sin legados añadidos -Berham (1995)- o con legados -Galor y Zeira(1993), Han y Mulligan (2001)-. Estos préstamos son en ocasiones indirectos, al sustanciarse en la adquisición de una posición deudora a la muerte de los padres que los hijos deben atender y que sirve para proporcionarles una formación en un momento crítico en que se produce la acumulación de capital humano de la siguiente generación. En aquellos modelos con legados en los que la inversión en capital humano se decide por el propio individuo y no por sus padres, las restricciones financieras pueden hacer que el tamaño del legado, que a su vez genera rentas cuando se invierte en un activo financiero, sea superior a la inversión en capital humano, de suerte que la posición neta del agente en el activo crediticio sea positiva. Cuando la adquisición óptima de input es inferior al tamaño del legado, la restricción de crédito no es operativa; cuando es superior, de nuevo la acumulación del activo tiene lugar a un ritmo subóptimo. Si este es el caso, el proceso de acumulación puede detenerse o no; en el primer caso, de nuevo se alcanza el equilibrio estacionario, si bien más tarde para aquellas familias con menores dotaciones de capital humano que para las familias que pueden suavizar óptimamente su perfil de consumo; no obstante, pueden surgir aparecer también sendas estacionarias asociadas a una trampa de pobreza en la que determinados hogares quedan estancados en un equilibrio en el que su inversión en capital humano es nulo. Esto puede suceder bien desde el comienzo del horizonte, bien en un determinado punto de la trayectoria endógena del stock. Dada la tecnología de aprendizaje empleada, en el momento en que la posición es nula también lo será la de las futuras generaciones, por lo que esta situación se consolida en el tiempo. A menudo esta clase de equilibrios aparece porque las restricciones de crédito vienen acompañadas por no convexidades en la función ϕ que relaciona los stocks de capital humano consecutivos en la senda de equilibrio, aunque esto no es una condición necesaria. **En consecuencia, la existencia de restricciones crédito puede llegar a convertirse en un problema esencial desde el punto de vista de la movilidad intergeneracional, al detenerse esta, e incluso aunque esta continúe la desigualdad entre individuos a lo largo de la dinámica de transición puede ser importante**. En los modelos que se estudiarán en el apartado correspondiente se analizarán las consecuencias de esta fricción desde una óptica más amplia.

---

[180] En el contexto de este modelo canónico, los menores medios familiares podrían quedar explicados por un menor stock de capital de partida en el cabeza de la dinastía o una menor dotación de renta exógena.

Barham (1995) demuestra cómo las restricciones cuantitativas pueden constituir una interferencia esencial en la convergencia de todo individuo hacia el equilibrio estacionario. Su enfoque se basa en un generaciones que viven durante 3 períodos, con una identificación logarítmica que toma como argumentos los consumos de cada período y una prima de satisfacción en caso de que se adquiera formación. Así:

$U = \ln C_{s-1}^{s-1} + \ln C_{s}^{s-1} + \ln C_{s+1}^{s-1} + vH$ (5.8)

Con H el tamaño constante de esta prima y v=1 si se ha invertido en capital humano. La formación, endógena en su cuantía, se adquiere durante el primer período de vida, en la que, caso de acometerse, se renuncia al salario de los no cualificados w_u , al proporcionarse la formación en escuelas que funcionan a tiempo completo. En la edad adulta, se obtiene un ingreso a partir de las inversiones en capital humano emprendidas en la juventud, con una función creciente y cóncava que relaciona ambas variables w(x) y $w(0) = w_u$. Además puede ahorrarse, de suerte que en la vejez se vive de los rendimientos de los activos en los que se materializó este ahorro. Es imposible solicitar crédito en los mercados de capital para financiar la educación a cuenta de futuros ingresos y solamente la familia puede proporcionar este crédito, al mismo tipo de interés que el mercado (r). Con estos supuestos, pueden distinguirse varias posibles situaciones.

Primero, aquellos individuos que optan por no invertir en capital humano. Su utilidad intertemporal será la siguiente, en la que la optimización se realiza respecto a los ahorros en la juventud y madurez.

$U = \ln\left(w_{s-1,u} - b_s\right) + \ln\left(w_{s,u} + \left(1 + r_{s-1}\right)b_s - b_{s+1}\right) + \ln\left(\left(1 + r_s\right)b_{s+1}\right); b \geq 0$ (5.9)

Otro caso lo constituyen los individuos que adquieren educación y que no están restringidos de liquidez, en el sentido de que no se ven afectados por un techo sobre la cantidad que piden prestada a su familia. La utilidad intertemporal pasa a expresarse como:

$U = \ln\left(b_s - x_{s-1}^h\right) + \ln\left(w\left(x_{s-1}^h\right) - b_s\left(1 + r_{s-1}\right) - b_{s+1}\right) + \ln\left(\left(1 + r_s\right)b_{s+1}\right) + H;$

$b_s < 0;\ b_{s+1} > 0\ (5.10)$

Maximizándose esta última respecto a la inversión en educación en s-1, así como la posición en crédito al final de s-1 y s. La combinación de las cpo nos llevará, como es habitual, a la igualdad entre las tasas de retorno del crédito y el capital humano; esta ecuación permitirá despejar la inversión óptima:

$w'\left(x_s^h\right) = 1 + r_{s-1}$ (5.11)

Una condición sine qua non para identificar a los hogares que se encuadren en esta situación establece que su nivel óptimo de educación sea suficientemente bajo como para poder ser financiado por los ahorros de la generación anterior. En este sentido, será necesario que la generación anterior haya ahorrado lo suficiente como para poder prestar la cantidad deseada al final del período s-1; esto hará necesario que $b_{s-1}^{s-2} \geq b_s^{s-1}$. Por otro lado, la utilidad intertemporal derivada de la formación deberá ser superior a la de la ausencia de cualificación. Es fácil demostrar que las cpo permiten establecer que ello se cumplirá cuando $3\ln b_{s+1}^q + H \geq 3\ln b_{s+1}^u$, donde los superíndices q y u denotan al equilibrio propio de un individuo con y sin formación, respectivamente. Nótese que los beneficios "no pecuniarios" de la educación, H, son los que permiten que $b_{s+1}^q \leq b_{s+1}^u$. Este resultado es crítico para facilitar el tránsito de una generación de no educados a otra con formación.

Finalmente, una tercera categoría de individuos serán aquellos que deriven una satisfacción más elevada de la inversión en educación, pero lo hagan en condiciones restringidas, enfrentándose a un límite máximo en el crédito que pueden solicitar en el primer período de su vida, b_s ; dicho límite viene dado por los ahorros de sus padres. Dicho de otra forma, para que aquella restricción devenga vinculante, el valor óptimo de la posición en crédito para los hijos debe ser mayor a los ahorros de los padres. La utilidad de los individuos afectados por esta restricción será:

$$U = \ln\left(\overline{b}_s - x_s^h\right) + \ln\left(\left(1 + r_{s-1}\right)\overline{b}_s + w\left(x_s^h\right) - b_{s+1}\right) + \ln\left(\left(1 + r_s\right)b_{s+1}\right) + H \quad (5.12)$$

Consiguientemente y a diferencia del caso no restringido, los valores óptimos de la adquisición de inputs educativos y de ahorros en s estarán influidos por la restricción crediticia o, equivalentemente, por los ahorros de sus padres. La consecuencia inmediata de la restricción es que la tasa de retorno del capital humano es mayor a la del activo crediticio para el valor de x que resuelve el problema ($w'\left(x_s^h\right) > 1 + r_{s-1}$), indicando con ello que la conducta óptima sería invertir una cantidad superior de recursos en educación. Análogamente a lo exigido cuando los individuos no estaban restringidos, la utilidad intertemporal deberá ser mayor a la de aquellos hogares sin formación. Combinando de la misma forma las cpo, puede obtenerse un valor crítico de b_{s+1}^{qc} (qc=régimen con educación y restricciones de crédito) tal que iguale ambas corrientes de utilidad, valor que, como sucedía sin restricciones de crédito, es decreciente en H. En este caso puede suceder que tal valor crítico ($\underline{b}$) sea superior o inferior a b_{s+1}^u . Si es menor o igual, el principal mensaje desde el punto de vista de la movilidad intergeneracional es que podrá pasarse de una generación no educada a otra con formación; si $\underline{b} > b_{s+1}^u$ la dinámica del modelo implica la consolidación de esta situación, ya que la generación precedente nunca podría reunir los recursos suficientes para proporcionar a la siguiente el crédito que hace el estudio una estrategia preferida.

Las características de las sendas estacionarias pueden estudiarse analizando la forma de la curva que relaciona ahorros consecutivos en equilibrio durante el segundo período de vida; a esta curva se le puede denotar como $b_{s+1}^{s} = \phi\left(b_{s}^{s-1}\right)$ y su pendiente puede tener varios signos, dependiendo del valor de varios parámetros relevantes, aunque en algún momento debe hacerse decreciente. El análisis se restringe, sin embargo, a una pendiente positiva a partir del punto $b_{s}^{s-1} = \underline{b}$ y una segunda derivada negativa al menos en un primer tramo, para mostrar que la emergencia de trampas de pobreza no tiene por qué ir acompañada necesariamente de no convexidades. En puridad esta curva refleja solamente los equilibrios de aquellas generaciones que adquieren educación sujetas a restricciones de crédito: de hecho, ni los individuos que no adquieren educación ni aquellos que lo hacen no restringidamente muestran dependencia respecto a los ahorros de la generación anterior. Los equilibrios estacionarios se caracterizarán de manera diferente en cuanto a la ubicación de ϕ . Un equilibrio estacionario con restricción de crédito se ubicará necesariamente en la intersección de la curva con la bisectriz, ya que el crédito de los hijos está atado a los ahorros de los padres. Un equiibrio estacionario sin restricción de crédito puede o no estar situado sobre la bisectriz; siendo $b_{s}^{s-1,q}$ y $b_{s+1}^{s,q}$ los ahorros y crédito de padres e hijos respectivamente, tan solo es necesario que el primero sea superior o igual al segundo. Otra definición relevante en este contexto preciso es la de trampa de pobreza. Aquellas sendas sin trampa de pobreza se distinguirán porque, comenzando en el umbral $\underline{b}$ de acceso a educación restringida, muestran una evolución ascendente de los ahorros hasta alcanzar el umbral de la formación no sujeta a restricciones de crédito. Por el contrario, las trampas de pobreza reflejan las situaciones de aquellas familias que indefinidamente permanecen ancladas en un equilibrio en el que la inversión en educación es nula, incluso aunque socialmente fuera beneficioso que fuera positiva.

Cuando $\underline{b} < b_{s+1}^{u}$ el modelo puede dar lugar a equilibrios estacionarios muy variados o a la ausencia de ellos, pero nunca a una trampa de pobreza. Dependiendo de la posición vertical de ϕ , puede haber desde ningún equilibrio estacionario a dos. Si ϕ se encuentra completamente por encima de la bisectriz, solo habrá un equilibrio estacionario sin restricciones cuando esta alcance el punto $\left(b_{s}^{s-1,q}, b_{s+1}^{s,q}\right)$. Cuando ϕ parte de debajo de la bisectriz y la cruza, dependiendo de si aquella presenta un punto de inflexión o no pueden presentarse un punto de corte con la bisectriz o dos. Dependiendo de si las abscisas del equilibrio estacionario están a la izquierda o a la derecha de $b_s^{s-1,q}$ se estará ante equilibrios restringidos o no restringidos. Cuando existe un solo equilibrio estacionario sobre la bisectriz, este será restringido y estable. Cuando hay dos, uno será siempre restingido y el segundo puede ser restringido o no restringido, con el primero inestable y el segundo estable. Cuando el ahorro de los padres está a la derecha del equilibrio estable, el juego de la pendiente de ϕ y la bisectriz genera una dinámica de aproximación al equilibrio estable, mientras que cuando está por debajo se genera una trayectoria cíclica, con un descenso progresivo del ahorro tal que existirá una generación en la que la inversión en educación será nula, si bien sus hijos sí recibirán educación (al ser $\underline{b} \leq b_{s+1}^{u}$), iniciándose de nuevo el ciclo. Finalmente, ϕ puede quedar íntegramente por debajo de la bisectriz, en cuyo caso la trayectoria es también cíclica en el sentido descrito más arriba. A este tipo de sendas se les califica de “indigencia relativa”, pero en ningún caso constituyen una trampa de pobreza, al no reflejar una ausencia permanente de inversión en capital humano.

Cuando $b_{s+1}^{u} < \underline{b}$, las dinámicas son similares, aunque ahora existe la posibilidad de que surjan trampas de pobreza. Para empezar, el nivel de ahorro inicial de los padres en s=0 permite realizar un primer filtro, de modo que si $b_s^{s-1} < \underline{b}$ ninguna de las cohortes de dicha familia invertirá jamás en educación. Si $b_s^{s-1} \geq \underline{b}$, la deriva hacia una trampa de pobreza dependerá del número de equilibrios estacionarios. Si existe un único equilibrio estacionario estable no restringido, se convergirá hacia él, algo que sucederá también si existe un único equilibrio estacionario estable restringido. Si hay múltiples equilibrios, la posición del ahorro inicial será determinante: si este se sitúa a la derecha del equilibrio inestable, se convergerá hacia el equilibrio estable, sea restringido o no; por el contrario, si se encuentra a la izquierda, se acabará convergiendo hacia la trampa de pobreza.

Las consecuencias de las restricciones de crédito pueden analizarse también en un entorno de fertilidad endógena y sustitución del crédito de padres a hijos por inversión en la educación de los segundos, lo que exige la introducción directa o indirecta de componentes altruistas en las preferencias de los primeros. En esta línea tiene gran interés el trabajo de **Ehrlich and Kim (2007),** quienes plantean un modelo en la línea de su aportación de 1991 (ver capítulo 3), en el que conviven agentes heterogéneos en renta que presentan hasta tres rasgos de heterogeneidad: diferente productividad de aprendizaje, distintos niveles de capital humano “genéticos” y habilidades diferentes en la aplicación de su tiempo a la función de aprendizaje de los niños. En concreto, se supone la existencia de dos grupos de individuos cuyas proporciones son variables -en la medida en que la fertilidad de ambos es endógena-. Las tecnologías de acumulación adoptan formas ligeramente diferentes, al estar afectadas por la influencia del otro grupo (podría decirse que incorporan “peer effects”, característica que, como se verá más adelante permiten que en los estados estacionarios la desigualdad entre grupos se estabilice en estado estacionario, a pesar de que los rendimientos a escala en el capital humano son constantes[181]). Así, siendo 1 y 2 los superíndices que denotan a ambos grupos -y el 1 de rasgos más favorables-, dichas ecuaciones de acumulación pueden escribirse como[182]:

$$a_{s+1}^{hi} = B^i \left(a_s^{hi} + \omega^i\right) n_s^{hi} \left(I_s^i\right)^{\gamma};\ 0 < \gamma < 1;\ I_s^i = \begin{cases} 1,\ i = 1 \\ \dfrac{a_s^{h1} + \omega^1}{a_s^{h2} + \omega^2} \dfrac{N_s^1}{N_s^2},\ i = 2 \end{cases} \quad (5.13)$$

Esto es, mientras los efectos de entorno son neutros para la clase “alta”, son positivos para la “baja” en tanto aumente el peso de los individuos más dotados, o sea la mayor la dotación relativa de estos. Las preferencias, comunes a ambos grupos, son aditivas y de elasticidad de sustitución intertemporal constante, dependiendo del consumo del primer período de vida y de la “compañía”, que se define de modo análogo al trabajo de 1991. Por tanto y a diferencia de este último, el consumo en este último no produce satisfacción alguna, sino relevante solamente la restricción presupuestaria del adulto-joven, en la cual se encuentra alojada la diferencia en la eficiencia (θ^i de aplicación del tiempo a la educación):

$$C_s^{s-1,i} \le a_s^{hi}\left(1 - vN_s^i - \theta^i N_s^i n_s^{hi}\right) \quad (5.14)$$

---

[181] Es notable que el modelo de Berham endogeneiza la inversión en capital humano, aunque no explicita la acumulación del activo como tal. Si lo hiciera y considerara, para facilitar la comparación con Ehrlich y Kim, rendimientos constantes en capital humano, una inversión constante en una familia y nula en otras se traduciría en una brecha de desigualdad creciente entre ambas. El “peer effect” de Ehrlich y Kim contiene la magnitud de este problema.

[182] Nótese que esta estructura de la ecuación de acumulación es la única que puede preservar el argumento beckeriano de las diferentes capacidades de la persona en su origen. Si se usa, como es mayoritario en la literatura de equilibrio general, una posición inicial en capital humano que se subsume en la cantidad acumulada posterior, las diferencias en la habilidad inicial no solo acaban diluyéndose en el stock acumulado, sino que no dan lugar a diferencias de demanda en modelos de 2 períodos cuando la tasa de retorno se calcula respecto al tiempo.

La producción agregada es lineal en el capital humano agregado, de suerte que el salario unitario por unidad aplicada de este activo es unitario. El problema se resuelve por los hogares de cada grupo respecto al tiempo dedicado a la educación de la prole y el número de niños.

En estado estacionario, dada la naturaleza de la tecnología deberá cumplirse que el índice de desigualdad sea constante, como también la fertilidad y la tasa de acumulación de los stocks de capital humano, así como sus niveles relativos intergrupo y el tiempo destinado a la educación. Si los niveles relativos deben igualarse, también la tasa de acumulación de los individuos 1 y 2 lo hará. La evolución dinámica del stock de capital humano, dados los supuestos realizados, toma una forma lineal con ordenada en el origen positiva, al igual que en el artículo de 1991, lo que permite, dependiendo del valor de la pendiente de dicha relación, que el estado estacionario pueda mostrar un nivel constante y positivo del capital humano (distinto en general para cada grupo) o bien una tasa de crecimiento constante a largo plazo, que deberá igualarse entre grupos. Con independencia del tipo de estado estacionario que predomine, una característica común entre ambos será que el valor estacionario del índice de desigualdad (o el peer effect) para el grupo 2 se hará constante, como también deberá serlo la ratio de niveles de capital humano entre grupos, lo que implicará que las tasas de crecimiento marginal del componente acumulable serás las mismas. En cuanto al valor estacionario del índice de desigualdad, este vendrá determinado solamente por factores tecnológicos, prevaleciendo la misma solución tanto en el estado estacionario con estancamiento como en aquel con crecimiento[183]:

$$I = \left[\frac{B^1}{\theta^1} \frac{B^2}{\theta^2} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5.15)$$

La principal diferencia entre estados estacionarios, sin embargo, se debe a la composición de dicha desigualdad. Es inmediato comprobar que, bajo estancamiento, la ratio entre los niveles relativos de capital humano se debe solamente a las dotaciones iniciales

[183] El valor estacionario de I puede despejarse a partir de la cpo de la fertilidad y la condición de igualación de las tasas marginales de acumulación. Nótese que el resultado es una consecuencia lógica de esta última ya que son tanto las diferencias grupales en la productividad del aprendizaje como en la eficiencia de utilización del tiempo las que pueden generar una brecha en las tasas marginales de acumulación, que habrá de ser compensada por el índice de desigualdad, sin perjuicio de que la distancia entre las dotaciones relativas sea más o menos determinante de uno de los componentes del índice de desigualdad.

relativas. Esto significa que cualquier cambio en el índice de desigualdad estacionario se ajustará vía fertilidad relativa, toda vez que la ratio entre capitales humanos está dada por las dotaciones de partida de los individuos.

En efecto, la mera sustitución de $B^1 n^{h1} = B^2 n^{h2} (I)^{\gamma}$ en las ecuaciones de acumulación, para niveles constantes de los stocks, arroja:

$$\frac{a^{h1}}{a^{h2}} = \frac{\omega^1}{\omega^2} \quad (5.16)$$

Por el contrario, en el estado estacionario con crecimiento la anterior igualdad deja de cumplirse y el peso de la divergencia entre dotaciones iniciales dentro de la ratio entre niveles estacionarios de capital humano se diluye asintóticamente. Consiguientemente, el valor estacionario de esta última obedecerá principalmente a la dinámica durante la transición al estado estacionario. De la solución estacionaria para el índice de desigualdad se desprende también que, cuando las únicas diferencias entre grupos se deben a las dotaciones iniciales, el índice de desigualdad se hace 1. Esto significa que los tamaños relativos de ambos grupos compensarán perfectamente las desigualdades generadas por las diferencias en las dotaciones relativas iniciales[184].

En resumen, si bien la movilidad intergeneracional está garantizada gracias a la acumulación de capital humano, la movilidad social tiene un límite a largo plazo, que vendrá dado por la misma diferencia de status de origen en un estado estacionario con estancamiento o por los restantes factores de heterogeneidad entre agentes, corregidos por las diferencias de fertilidad, cuando existe crecimiento a largo plazo. A pesar de que el modelo supone una transposición relativamente fiel de los motores de la desigualdad por el lado de la demanda de capital humano según la visión de Becker, así como una dinamización de sus argumentos, también hay algunas diferencias notables que tienen sus consecuencias en las proposiciones anteriores. Primero, como se comentó al principio, no hay acceso al mercado de crédito y ni siquiera al crédito “intergeneracional” como paliativo, siendo la renta de los progenitores la única fuente de financiación de la inversión en el activo; esta es la razón esencial por la que, incluso a largo plazo, las diferencias entre individuos no se compensan por completo, siendo el índice de desigualdad en general distinto de 1 -salvo en un caso muy especial como vimos-

[184] Las cpo revelan que, si el coeficiente v es común entre grupos, los educativos multiplicados por el parámetro θ de ineficiencia serán los mismos; cuando este parámetro coincide y también lo hacen las productividades educativas B, no hay ninguna razón para que el índice de desigualdad o de “peer effects” adopte un valor diferente de 1 para garantizar la igualdad de las tasas de acumulación marginales.

y, en particular, el cociente en el nivel de capital humano productivo también distinto de 1. Con funcionamiento perfecto de los mercados de capital estas diferencias podrían cancelarse asintóticamente -o al menos aproximarse los niveles de capital humano en mayor medida- siempre que el grado de altruismo fuera suficientemente elevado, aunque se trasladarían a perfiles de consumo diferentes entre individuos -con mayores sacrificios de consumo más o menos prolongados según cual fuera la fuente de desigualdad-. Con crédito "intrafamiliar", como se vio al comentar las conclusiones de Berham, de nuevo la movilidad social puede enfrentarse a límites esenciales, que tienen un origen similar a las inversiones de Ehrlich y Kim. Segundo, las decisiones se adoptan por los padres, no por los hijos, de acuerdo con unas preferencias con altruismo limitado y definidas en un horizonte finito, lo que de acuerdo con numerosos autores, es fuente de ineficiencias, lo que constituiría una fuente de ataque de la distribución de renta resultante.

El panorama en cuanto a la movilidad social en ausencia de crédto puede ser algo más benévolo cuando se considera un modelo algo menos estilizado que el de Ehrlich y Kim. Así, **Owen y Weil (1998)**[185]**,** en un modelo OLG sin capital humano en sentido estricto (aunque con varias proxies al concepto), distinguen dos tipos de heterogeneidad entre agentes: la condición de cualificado-no cualificado, que no es rígida entre generaciones y puede adquirirse gracias al pago de un determinado gasto educativo $\bar{x}$, y un shock aleatorio con soporte en un intervalo positivo que determina la eficiencia del trabajo. Traducidos a términos comunes con Ehrlich y Kim, la eficiencia del trabajo sería el nivel de capital humano en estos segundos autores, que se convierte en puramente aleatorio, mientras que la adquisición del grado educativo sería el condicionante del salario real por unidad de capital humano, que en el trabajos de estos últimos autores era unitario. Así, la función de producción agregada se basa en la complementariedad entre trabajadores cualificados y no cualificados, de modo que un incremento en el número de los primeros generará una reducción del salario real para ese mismo grupo y un incremento para los no cualificados. De algún modo Owen y Weil desdoblan las características del capital humano, aislando una dimensión puramente productiva y "de señalización", cuya mejora constituye una inversión para el individuo, y otra, estocástica, que cualifica a la anterior en cuanto a la conformación de las rentas laborales. Por lo demás, se supone que no existe consumo en el primer período de vida, de modo que durante el mismo solamente podrá decidirse gastar o no una transferencia recibida de los padres en educación; durante el segundo período podrá dedicarse el neto de dicha transferencia sobre los gastos educati-

[185] Maoz y Moav (1999) analizan el modelo de Owen y Weil a lo largo de las trayectorias de transición al estado estacionario, mientras que estos últimos se centran solamente en este tipo de equilibrio general.

vos, más la correspondiente renta salarial, en consumo o en una transferencia a la generación más joven con la que se convive. En coherencia con este esquema, las preferencias, logarítmico-aditivas, dependen del consumo en el segundo período de vida y del legado a los jóvenes, marcando los coeficientes de cada uno de sus elementos las proporciones en que se asigna la renta disponible en el segundo período.

Los supuestos del modelo sientan la base de la movilidad social en dos direcciones, a diferencia del trabajo de Ehrlich y Kim y buena parte de los de esta rama de la literatura de capital humano. En primer lugar, dados los costes educativos fijos y la diferencia entre salarios según el tipo de cualificación, es inmediato calcular el umbral de shock de eficiencia que inducirá a llevar a cabo la inversión en cualificación; teniendo en cuenta el carácter aleatorio de esta variable, este se convierte en un factor de estrechamiento de las diferencias sociales. En segundo lugar, la complementariedad de ambos tipos de trabajadores estrecha el abanico salarial e incrementa la probabilidad de que hijos de familias cualificadas decidan no acometer la inversión en educación, siempre especialmente si los costes educativos son relativamente elevados y el shock de eficiencia no ha sido generoso con ellos. En equilibrio general, el número de trabajadores educados dependerá tanto de la esperanza del shock aleatorio y su relación el valor umbral del mismo que determina la inversión en educación, los salarios de ambos grupos de trabajadores en el período anterior y la transferencia en educación de los padres de cada individuo.

La economía presenta múltiples estados estacionarios. Para cualquier valor de los parámetros tecnológicos, siempre existirá algún equilibrio sin movilidad social cuando el número de trabajadores cualificados es bajo: véase que en este caso, propio de economías poco desarrolladas, la diferencia entre salarios reales de ambos grupos es elevada, lo que implica diferencias importantes en la capacidad de realización de transferencias, dado un grado de altruismo común en las preferencias, incluso aunque los incentivos hagan descender el valor umbral del shock de eficiencia. Por otro lado, siempre habrá valores de los costes educativos suficientemente bajos que puedan generar un estado estacionario con movilidad social en las dos direcciones. De manera interesante, no existe ningún estado estacionario en el que solo exista movilidad social en una dirección, ya que en este toda la población acabaría formando parte de uno de los dos grupos, pero mientras este proceso tuviese lugar los salarios reales evolucionarían de modo que o bien provocarían ausencia de movilidad o la ampliarían en las dos direcciones.

La ventaja de utilizar una clasificación binaria de los grados de cualificación deriva, pues, de una visualización mayor de la movilidad "hacia abajo", toda vez que los modelos de agentes heterogéneos con una modelización más convencional de

la acumulación de capital humano solo se concentran en mostrar la diferencia estacionaria (o en transición) entre posiciones en este activo, pero no en el hecho de quién ocupa esta posición; por el otro lado mientras aquellos son rígidos en la consideración de los rasgos de heterogeneidad entre los agentes que determinan su inversión en educación, el modelo de Owen y Weil flexibiliza al menos algunos de ellos, suavizando la invariabilidad de los comportamientos en función de características dadas desde el comienzo de la vida de las dinastías. **Hassler y Rodríguez-Mora (2000)** elaboran otro modelo (ver Anexo 4) con distinción binaria de dos posiciones sociales, caracterizadas por distintas habilidades, detrás de las que late de nuevo una inversión en capital humano: empresarios y trabajadores. Cuando los procesos de cambio tecnológico presentan una varianza importante, las ventajas dinásticas en el acceso a la posición empresarial se diluyen, facilitando la movilidad social de los trabajadores con más habilidades innatas; este resultado permite pues trazar algún paralelismo con el trabajo comentado de Owen y Weil, en el sentido de la existencia de variables que permiten hacer más fluida la movilidad social (cuando no permitirla discurrir en dos direcciones).

Más allá de la posible emergencia de trampas de pobreza, las restricciones crediticias generan además una mayor persistencia de los shocks de la renta a través de generaciones, incluso aunque en última instancia se retome la convergencia a la senda estacionaria. En el Anexo 1 se aborda este problema en un modelo de Han y Mulligan (2001), que además resulta de interés por describir el problema desde el punto de vista de la generación de los padres, que son los que adoptan las decisiones relativas a la educación de la próxima generación - a diferencia de la mayor parte de enfoques analizados, en el que eran los individuos los que se responsabilizaban de aquellas-.

Otras trampas de pobreza. Como se sigue de la discusión anterior, las trampas de pobreza nacidas exclusivamente a causa de las restricciones de crédito resultan un argumento escasamente convincente por varias razones. La primera, la falta de realismo de una crónica insuficiencia de ahorro sin más soporte que una desigualdad inicial en la distribución de la renta. Si bien el modelo de Barham no contiene altruismo, la presencia del mismo conduce a una reducción del consumo de equilibrio en los padres para lograr allegar los fondos necesarios para hacer frente a la educación de los hijos. Otra crítica procede de la falta de evidencia empírica de la indivisibilidad de las inversiones educativas (como muestra Besley (1995)); en presencia de una divisibilidad perfecta, la convergencia hacia un estado estacionario acabaría produciéndose, solo que a un ritmo más lento. Además, los efectos de entorno o la estocasticidad de los factores de heterogeneidad suponen razones adicionales para relativizar los problemas de desigualdad a largo plazo generados por las restricciones crediticias.

Por esta razón a partir de los años 90 han sido cada vez más numerosos los trabajos que, con o sin restricciones de crédito, intentan poner de relieve otros factores que expliquen la existencia de trampas de pobreza. La mayor parte de ellos han utilizado no convexidades en la tecnología de acumulación de capital humano, capaces de generar más de un estado estacionario en el modelo, habitualmente uno de ellos asociado a niveles altos de rentas y otro a situaciones de pobreza; hacia cuál de los dos tiende el sistema depende en buena medida de las condiciones iniciales. Entre ellos podríamos destacar los casos de Galor y Zeira (1993), Maoz y Moav (1999), Moav (2002,2005), Mookherjee y Ray (2003), Moav y Neeman (2012), Ghatak y Nien (2002), Galor y Tsiddon (1997), Caselli (1999) y Aghion et al. (2002). Clásicos resultan también los trabajos de Llungqvist (1993) sobre ausencia de un mercado de servicios del capital humano y Ray y Streufert (1993) sobre equilibrios con desempleo causados por la malnutrición, aunque estos últimos a partir de estructuras de modelización que no se basan en la movilidad intergeneracional, por lo que se dejan de lado en este estudio.

Un argumento típico que da lugar a no convexidades es la existencia de un componente fijo del precio asociado a alguno de los inputs necesarios para la inversión en capital humano. Este sería el caso de uno de los trabajos precursores de esta literatura, el de **Galor y Zeira (1993).** Estos autores basan su enfoque en la existencia de imperfecciones en los mercados de crédito y en concreto un grado de información asimétrica que puede conducir al impago.; tal fricción no se traducirá, sin embargo, en restricciones cuantitativas de crédito como las que acaban de describirse. Estos autores parten de un marco muy similar al modelo canónico que acaba de verse y en el que los individuos viven durante dos períodos, teniendo la opción de no invertir en capital humano y trabajar en una tecnología de trabajo no cualificado durante los dos períodos, o bien dedicar el primero a invertir en formación (financiada por crédito) y disfrutar de un salario superior en el segundo. Las preferencias de los agentes son altruistas, al depender tanto del consumo en su segundo período de vida como del legado que realizarán a sus descendientes; a su vez, cada individuo de la próxima generación recibe este legado al comienzo de su vida, pudiendo invertirlo a un tipo de interés r para maximizar su renta en el período siguiente. Las preferencias tienen una estructura logarítmica:

$$U = \alpha \ln C_s + (1-\alpha) \ln B_{s+1} \quad (5.17)$$

La simple sustitución en la función de utilidad de los legados, despejados de la igualdad entre la relación marginal de sustitución de los 2 bienes y su precio relativo, permite transformar la función de utilidad en la siguiente expresión, que facilita la comparabilidad entre diversas situaciones solamente por medio de la renta en s:

$U = u(y_s) + G;\ G = \alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$ (5.18)

La imperfección en el mercado de crédito reside en la posibilidad de eludir la devolución de las cantidades prestadas. Supongamos que el prestamista incurre en unos costes z para asegurarse el pago del deudor. Esto no evita completamente la posibilidad de impago, aunque para que se produzca obliga al deudor a desembolsar unos costes $kz, k > 1$. Siendo b la cantidad que un individuo pide prestada, i el tipo de interés al que lo hace y r el tipo de interés que se cargaría en ausencia de riesgo de impago, la condición de beneficios nulos procedentes de la actividad del préstamo se traduce en:

$b(1+i) = b(1+r) + z$ (5.19)

Por otro lado, los prestamistas elegirán desplegar un esfuerzo z para desincentivar completamente los impagos, conforme a la siguiente ecuación:

$b(1+i) = kz$ (5.20)

Combinando las dos últimas ecuaciones, puede endogeneizarse el tipo al que se toma prestado, que será mayor que r e independiente de la cantidad tomada a préstamo b: a medida que aumenta b, crecen los incentivos para impagar, lo que eleva también el valor óptimo de z; esto hace innecesario que el tipo de interés aumente también con b. Entonces:

$i = \frac{1+kr}{k-1} > r$ (5.21)

En este entorno, existen tres posibles situaciones para los hogares. En la primera, estos no invierten en capital humano en el primer período[186], por lo que su utilidad total (subíndice q en los salarios se usa para los cualificados y u para los no cualificados) será:

$U = u\left[(1+r)\left(B_{s-1} + w_{s-1,u}\right) + w_{s,u}\right] + G$ (5.22)

Cuando se invierte en capital humano en el s-1, hay dos posibilidades: que el legado recibido de la generación anterior sea suficiente o no para atender cubrir dicha inversión. Si lo es, el excedente se canalizará hacia el préstamo a tipo r (ya que la cuña entre r e i, z, solo cubrirá costes fijos), obteniéndose la siguiente utlidad:

---

[186] En el modelo solamente se optimiza la elección binaria de inversión/no inversión en capital humano, pero el volumen de esta. Antes bien, se supone que la adquisición de formación necesaria para adquirir la condición de trabajador cualificado durante la juventud es fija. La posición en el activo crediticio vendrá dada, por tanto, solamente por la cuantía exógena del legado y su diferencia con dicha inversión.

$$U = u\left[\left(B_{s-1} - x_{s-1}^{h}\right)\left(1+r\right) + w_{s,q}\right] + G \quad (5.23)$$

Cuando la inversión tiene un tamaño tal que fuerza a solicitar un crédito por encima del legado recibido a tipo i, la utilidad cobrará el valor:

$$U = u\left[\left(B_{s-1} - x_{s}^{h}\right)\left(1+i_{s-1}\right) + w_{s,q}\right] + G \quad (5.24)$$

La inversión en capital humano se llevará a cabo siempre que la utilidad asociada supere a la alcanzable cuando la estrategia es una inversión nula. A su vez, sin más que comparar las realizaciones de la utilidad, puede demostrarse que la elección dependerá de que el legado inicial se encuentre por encima por de un cierto umbral[187], el cual a su vez será función del diferencial de intereses activos y pasivos; este umbral dependerá positivamente del salario de los no cualificados y negativamente de los no cualificados, como cabía esperar. Por otro lado, el umbral depende también de ambos tipos de interés: será creciente respecto al tipo activo y respecto al volumen de inversión en capital humano capitalizada al tipo pasivo, al inflingir un mayor nivel de esta una mayor pérdida de renta actualizada. De cualquier modo, la principal implicación de esta estructura es que la introducción de una cuña fija entre los tipos de interés puede conducir a que determinados sectores de la población, que inician su vida con legados más bajos, decidan no invertir en capital humano como estrategia óptima, lo que provoca tanto ausencia de movilidad intergeneracional como una creciente divergencia social entre hogares.

Chusseau et al. (2012) demuestran que la presencia de un coste fijo puede generar trampas de pobreza, incluso aunque aquel no vaya acompañado por fricciones en los mercados de crédito. En el marco del modelo canónico expuesto, esta variante podría incorporarse sin más que suponer que la adquisición del input educativo de mercado conlleva el pago de un precio estructurado en dos partes: una variable, en la que por tratarse del bien de consumo final se incurre en un precio unitario y otra fija (k), independiente de la cantidad de input adquirida. Suponiendo un tipo de interés nulo, este supuesto llevaría a considerar una renta capitalizada a la edad adulta como la siguiente: $y_s = 1 + a_s^h - \left(x_s^h + k\right)$. Teniendo en cuenta que la renta resultante de una inversión nula en educación es 1, la renta asociada a una solución óptima positiva para x deberá confrontarse con la anterior. Dicha solución óptima es y la condición correspondiente que tiene que satisfacerse son, en el marco de este modelo canónico:

$$x_s^h = \left[\eta\left(a_s^h\right)^{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\eta}} \Rightarrow a_s^h - \left[\eta\left(a_{s-1}^h\right)^{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\eta}} > k \quad (5.25)$$

---

[187] Este modelo no es directamente integrable en el modelo canónico planteado, al ser en este último las dotaciones de renta unitarias.

Este tipo de condición implica la existencia de un valor crítico del capital humano al comienzo de la vida del individuo por debajo del cual la renta intertemporal es inferior a 1, por lo que nunca se invertirá en educación.

Otros modelos ponen el acento en el lado de la demanda (y, en particular, el consumo) para explicar la aparición de no convexidades. Un buen ejemplo son los modelos con fertilidad endógena neo-malthusianos que se comentaron en el capítulo 3, en los cuales se impone un nivel exógeno mínimo al consumo asociado a la subsistencia: este puede resultar un catalizador para que el ahorro resulte insuficiente, si la capacidad de generación de rentas en el período inicial es muy baja, incluso en presencia de altruismo intergeneracional. Otros autores han explorado la endogeneización de las bajas tasas de ahorro en familias de bajos ingresos; en este sentido destaca la aportación de **Moav y Neeman (2012)**, que ponen en relación este fenómeno con la voluntad de señalizar un status social en los individuos de baja extracción social, lo que al mismo tiempo resulta innecesario en los de clase alta. En la medida en que estos gastos suntuarios suponen un drenaje de recursos hacia el consumo, el ahorro disminuye y se hace imposible la financiación de las inversión en educación por los hijos. Merece la pena detenerse brevemente en este último mecanismo, al ser relativamente novedoso dentro de esta literatura.

Los autores proponen un modelo OLG de 2 períodos. En el primero de ellos se realiza una inversión en capital humano con cargo exclusivamente a un legado proporcionado por los progenitores conforme al siguiente mecanismo de acumulación, que implica una tasa de depreciación unitaria entre cohortes:

$a_{s+1}^h = Bx_s^h + \omega$ (5.26)

En el segundo período se dispone de una renta salarial dada por la inversión realizada en capital humano más un término dependiente k también del tamaño de dicha inversión y con soporte en un intervalo de extremos positivos y negativos y esperanza nula: $y_s = a_s^h + \kappa_s$. Dicha renta financia el consum estándar C, el consumo suntuario Z (-que lleva asociado el efecto demostración comentado-) y un legado B a la generación futura. En definitiva, esta restricción presupuestaria, así como las preferencias que se maximizan son las siguientes:

$y_s\left(x_s^h\right) = C_s + Z_s + B_{s+1}$ (5.27)

$U = \Psi\left(C_s^{\chi} B_{s+1}^{1-\chi}\right)^{\sigma} S_s^{1-\sigma}$ (5.28)

Dentro de las preferencias, S el status social, variable que se forma a través de una percepción social mediante la observación de los gastos suntuarios y el nivel de capital humano del individuo, esto es: $S_s = E\left[y_s \middle| a_s^h, Z_s \right]$. El equilibrio corresponderá a un punto en el que se verifique: i) El gasto de los individuos en gasto suntuario $Z\left(a_s^h, y_s\right)$ es óptimo dada la creencia social $S\left(a_s^h, Z_s\right)$. ii) A su vez, la creencia social es consistente con la función de demanda de gasto suntuario: $S\left(a_s^h, Z_s\right) = E\left[S : Z\left(a_s^h, y\right) = Z_s \right]$.

Centrando la atención en los equilibrios separados, las señales emitidas individualmente por cada individuo deberán ser coherentes con su auténtica renta, de manera que las conjeturas sociales sobre esta última coincidirán con la realidad. Las cpo permiten obtener en forma implícita la ecuación para la conjetura sobre el status. Salvo para algunos valores de las elasticidades de la función de utilidad esta no tiene una solución explícita para la misma, aunque sí se puede despejar la demanda del bien de consumo suntuario en función de la conjetura social. Este último dependerá no solamente de la renta conjeturada (y, por tanto, real en equilibrio), sino también del límite inferior de la distribución de la renta, dependiente de las propiedades que se definan para la variable estocástica k.

Analizando las propiedades principales de la demanda marshalliana del consumo suntuario, se aprecia que cuando la renta es igual a su límite inferior el consumo suntuario es nulo. Por lo demás, este último es creciente tanto en el componente estocástico de la renta como en la propia renta total. Otra propiedad fundamental de esta solución es que, si la renta más baja que puede obtener un individuo para un cierto capital humano es no decreciente y convexa en dicho stock, la proporción de gasto suntuario sobre capital humano $Z\left(a_s^h\right)/a_s^h$ es decreciente en el stock de este activo. Esta proposición es clave para la emergencia de trampas de pobreza, al implicar que las familias pudientes dedicarán una mayor fracción de su renta a la educación de sus hijos. Introduciendo ciertas restricciones sobre la distribución de la variable estocástica es posible extender esta propiedad a la proporción entre gasto suntuario y renta de los individuos, que será también decreciente respecto al stock de capital humano. La proposición no regirá, sin embargo, a consecuencia de la primera propiedad comentada, para valores de la renta en el entorno del mínimo de su distribución.

La extracción completa de las cpo permite especificar la función $a_{s+1}^h = \phi\left(a_s^h\right)$ para un individuo con realizaciones nulas del shock de renta k; para ello hay que tener en cuenta que el legado se iguala al gasto educativo de los jóvenes. Por su parte, $C_s = \chi\left(y_s - Z_s\right)$, $B_{s+1} = \left(1-\chi\right)\left(y_s - Z_s\right)$. La pendiente de ϕ es siempre positiva, pero el signo de su segunda derivada depende de las propiedades que se atribuyan a la distribución estocástica de k en cuanto al límite inferior del shock $\underline{\kappa}$, que forma parte de la solución óptima de Z. Suponiendo una estructura de $\underline{\kappa}$ en tramos en función de la estructura del capital humano, ϕ tendrá primero un tramo lineal y más tarde uno convexo, lo que llevará a presentar dos equilibrios estacionarios. El de inversión baja en capital humano es estable, por lo que cualquier familia que inicie su andadura con un stock bajo se verá arrastrada hacia la trampa de pobreza[188], salvo que se beneficie de una cadena de realizaciones positivas del shock estocástico k. Por el contrario, a la derecha del equilibrio estacionario de alta inversión en capital humano se produce ulteriores inversiones que alejan todavía más de aquel, pudiéndose acotar los parámetros del modelo para no quebrar la condición de transversalidad.

Finalmente, algunos autores han intentado explicar en el marco neoclásico los fenómenos de desigualdad persistente sin imponer a la tecnología restricciones tan fuertes como para generar no convexidades, aunque en bastantes casos se recurre a imperfecciones de mercado. **Mookherjee y Ray (2003)** son un buen ejemplo, con un modelo basado en externalidades pecuniarias derivadas de la inversión en capital humano en un contexto de restricciones crediticias. Estas surgen por el hecho de que, al tomar la decisión sobre la acumulación de este activo dentro de una cartera de opciones, cada una de las cuales se distingue por permitir adquirir una posición distinta en aquel, sus rentabilidades relativas están influidas por el mapa de elecciones realizadas previamente por otros individuos. La sustituibilidad imperfecta en los servicios del capital humano en cada una de las líneas profesionales elegidas está influida por Banarjee y Newman (1991,1993).

El modelo de Mookherjee y Ray tiene una estructura dinástica, con un continuo de individuos indexados por i en cada período, distribuidos dentro un intervalo $[0,1]$ y su prinicipal rasgo, como anticipamos más arriba, es la existencia de un conjunto de alternativas profesionales O; cada uno sus elementos i tendrá asociado un nivel de capital humano a_s^{hi} . La distribución del conjunto de los individuos por alternativas se denota por λ_s . Este parámetro puede entenderse como un vector que recoge la posición en capital humano de cada miembro de la sociedad en el período s, en función de la opción profesional esco-

188 A la derecha de la trampa de pobreza, el incremento en la renta se traduce en un incremento del gasto suntuario sobre la renta y, consiguientemente, en una reducción de la fracción de la renta invertida en capital humano. A la izquierda, el hecho de que la renta se encuentre en un entorno de su mínimo implica que la fracción de la misma en gasto suntuario disminuye, lo que acelerará la acumulación.

gida en s-1. Se distinguen dos sectores en la economía: el de la producción del bien final y la tecnología educativa, siempre convexa. Esta última se basa tanto en la distribución profesional de s -debido a sus externalidades pecuniarias- como en la cantidad aplicada del bien final. En forma implícita, esta tecnología de aprendizaje incluirá vectores de elementos $\left(\lambda_s, x_s^h, \lambda_{s+1}\right)$. Para construir las restricciones presupuestarias, se definen las ya famliares funciones que relacionan posición en capital humano del individuo i con su renta salarial -se supone tiempo de trabajo exógeno- $w\left(a_s^{hi}\right)$, así como la función de costes de inversión $c\left(a_{s+1}^{hi}\right)$, que incluyen tanto la adquisición del input de mercado propiamente dicha como el pago a aquellas instituciones que se ocupan del proceso educativo. No hay mercado de crédito externo a la familia y todos los gastos en educación de cada generación son sufragados por sus progenitores. Esto implica que el problema de maximización de la utilidad dinástica se somete a una restricción presupuestaria flujo que iguala la suma de consumo y costes de inversión en capital humano a las rentas salariales del período. El equilibrio genera en cada s vectores de consumos, demandas de inputs para producir capital humano y un mapa de elecciones profesionales, dadas unas sendas de precios. En el estado estacionario, todos estos valores se estabilizarán.

Una propiedad crucial del estado estacionario es que, dentro del mismo, no se producirán transiciones entre elecciones profesionales. El motivo reside en la concavidad estricta de las preferencias dinásticas: dada la imposibilidad de apelar al mercado de crédito para financiar la educación de los niños, estas implican un menor sacrificio marginal para las familias más ricas, esto es, para aquellas que parten de una posición profesional con el mayor capital humano. En consecuencia, estas últimas incurrirán en un mayor gasto educativo en sus hijos y las profesiones que exigen un gasto en entrenamiento mayor solo podrán ser financiadas por sus propios ocupantes, manteniéndose todo lo demás igual. El argumento se reitera a medida a que se desciende por la escala profesional, ordenada de mayor a menor contenido en capital humano. Por otra parte, cuando dos dinastías ocupan posiciones profesionales diferentes en estado estacionario, es inmediato deducir que sus niveles de consumo serán también distintos, al igual que su bienestar. Así s**e hace evidente que la desigualdad será una nota distintiva del estado estacionario siempre que la escala profesional sea heterogénea en el período de partida, sin necesidad de apelar a no convexidades en la tecnología.** Si el conjunto de elecciones profesionales es un subconjunto del espacio métrico compacto y conexo, c(0)=0, el conjunto de profesiones presenta un coste máximo y otro un minimo de formación y la función de producción es cuasicóncava, exisitirá un único estado estacionario, cuya eficiencia en un sentido paretiano no está garantizada a priori.

Numerosos trabajos de OLG con fertilidad endógena que buscan reproducir con su dinámica transiciones demográficas contrastadas empíricamente apuntan a varios estados estacionarios, uno de los cuales suele ser una trampa de pobreza, si bien esta suele venir explicada por determinadas características horizontales a todos los grupos sociales y son especialmente aplicables a sociedades en estadios iniciales de desarrollo. En dicho contexto, el progreso técnico constituye una vía para escapar de la trampa de pobreza, al elevar el retorno de la calidad de los niños (y por tanto conducir a inversiones positivas en capital humano) en relación con su cantidad: es el caso de contribuciones comentadas en el capítulo 2, como las de Galor y Weil (2000) o Galor y Moav (2002). Pequeñas modificaciones en las hipótesis de sus modelos, sin embargo, pueden dar lugar a que una economía, o parte de sus individuos, queden estancados en una trampa de pobreza y elevada natalidad, incluso en un marco de progreso tecnológico. Este es el caso de **Moav (2005),** que propone una función de producción de capital humano en la que el trabajo es un factor productivo, lo que implica una reducción de la tasa de retorno de este activo a consecuencia de mayores costes de producción a medida que la tecnología evoluciona.; por esta razón, los estados estacionarios a que da lugar el modelo son robustos al cambio tecnológico. Veamos con algún detalle mayor el mecanismo que subyace a este argumento.

El modelo se estructura en torno a individuos que viven durante dos períodos; como es habitual dentro de este esquema, en el primero de ellos ven aumentar pasivamente su capital humano gracias al esfuerzo de sus padres y en el segundo consumen, tienen hijos, invierten una cantidad mínima en su educación (v por hijo) y deciden qué inversión desean realizar por encima de este nivel mínimo. Las preferencias de los individuos ponderan, de acuerdo con el grado de altruismo de los padres, el consumo de estos últimos y varias variables relacionadas los descendientes, a saber, su número y su renta total en su sentido beckeriano[189]:

$$U=(1-\Psi)\ln C_s^{s-1}+\Psi\left(\ln N_s+\theta\ln ea_{s+1}^h\right) \quad (5.29)$$

La función de acumulación de capital humano depende del gasto en un input diferente del tiempo, los profesores. En concreto, se demandan unidades de trabajo-eficiencia de los profesores (x), como una plasmación de la idea de que el capital humano de los profesores es también relevante en el proceso de acumulación. Los costes derivados de la inversión serán ex_s^h . Siendo h la función de inversión bruta en capital humano, creciente y

[189] La remuneración por unidad de capital humano se toma como dada y constante a lo largo del horizonte, aunque este extremo no queda justificado en el desarrollo del modelo.

estrictamente cóncava, se supone que $h(0)>0$, lo que garantiza que, aunque la tasa de depreciación es unitaria entre cohortes, la cantidad mínima invertida por los adultos es suficiente, por pequeña que sea, para garantizar que la siguiente generación tendrá elementos mínimos de subsistencia. Un supuesto central del modelo es que se restringe mediante una condición paramétrica el tamaño máximo que puede alcanzar v; a continuación veremos la implicación que tiene este hecho. La restricción presupuestaria en el período de madurez, la única relevante en el problema de optimización de las preferencias, será:

$C_s^{s-1} + N_s vea_s^h + N_s ea_s^h x_s^h \leq ea_s^h$ (5.30)

El equilibrio general se resuelve en el consumo en la fase adulto, la cantidad y la calidad de los niños, constituyendo ambas variables los dos destinos del ahorro generado por los padres. A partir de las cpo se extrae la función que marca la dinámica de acumulación del modelo, $x_{s+1}^h = \phi\left(x_s^h\right)$. Es posible demostrar que, si el nivel de capital humano de los padres (o equivalentemente, la demanda de inputs que conformó su educación) no supera cierto límite, la cantidad de input x que demandarán será nulo[190]. La razón es que, dado el techo impuesto a v, los individuos con menos ingresos elegirán un equilibrio esquina con inversión adicional nula en capital humano, al ser más barato en términos relativos invertir en un tamaño familiar mayor. El mayor atractivo de la inversión en fertilidad tiene dos consecuencias adicionales: a) Ante un ahorro bajo (proporción fija de la renta disponible, al tratarse de una utilidad logarítmica), resta fondos a la inversión en calidad de los descendientes y b) Obliga a repartir el gasto educativo entre un mayor número de hijos, por lo que la inversión per capita es menor.

Si además θ , la ponderación de los ingresos de la siguiente cohorte en la función de utilidad es suficientemente elevado, ϕ tendrá la siguiente forma en el espacio $\left(x_s^h, x_{s+1}^h\right)$: i) tendrá un punto de corte con el eje horizontal a la altura del valor crítico que determina una inversión futura positiva en capital humano paa un valor presente positivo; ii) será cóncava, con dos puntos de corte con la bisectriz, cada uno de los cuales representa un estado estacionario, uno de baja inversión en capital humano e ingresos y el otro con un alto nivel de educación. El equilibrio de baja inversión es inestable, de manera que un stock inicial de capital humano a su izquierda conduce a un equilibrio nulo, mientras que a su derecha se converge al equilibrio de alta educación. Una implicación directa del modelo es que, si el capital humano medio de la economía es superior a la ordenada del equilibrio estacionario de baja educación, mayor igualdad implica mayor crecimiento, ya que

---

[190] La fertilidad óptima es mayor para aquellos individuos con un gasto en educación en s inferior al nivel crítico.

un mayor número de familias convergirán hacia el equilibrio de ingresos más altos; el canal a través del que interacciona la menor desigualdad con el crecimiento es el descenso de la fertilidad óptima.

El **papel del progreso tecnológico** es otra línea de trabajo fuera dentro del ámbito estricto de las no-convexidades. Junto a numerosos aspectos positivos, algunos autores señalan también sus poteniales efectos adversos sobre la desigualdad, en la medida en que sesga la demanda de las empresas hacia aquellos trabajadores más cualificados, ha sido subrayado por autores como **Galor y Tsiddon (1997),** Cooley**,** Grenwood y Yorukoglu (1997), Lloyd-Ellis (1999), Caselli (1999), Galor y Moav (2000), o Aghion, Howitt y Violante (2002). En el trabajo seminal de los primeros, estos consideran una economía dividida en J sectores productivos, cada uno de los cuales se caracteriza por una tecnologia que utiliza capital y unidades eficiencia de trabajo, siendo homogénea de grado 1 respecto al segundo de los inputs. Los productores operan en un entorno competitivo y retribuyen a los factores productividos conforme a su productividad marginal. La producción agregada es la suma del output de los J sectores, los factores de los cuales se contratan para maximizar el beneficio de cada uno de ellos. La economía es abierta y el tipo de interés, estacionario, lo que permite pensar en un stock de capital físico también estacionario producto de la maximización del beneficio.

Los hogares viven durante 2 períodos; en el primero de ellos se forman, trabajan y ahorran (materializándose los ahorros en capital productivo, que se alquila a las empresas); en el segundo consumen con cargo a las rentas del ahorro del período anterior. En el primer período se asigna la dotación de tiempo normalizada a 1 entre aprendizaje y trabajo. El proceso de aprendizaje es peculiar, aunque en esencia corresponde a la inversión en capital humano específico a un sector determinado con tasa de depreciación unitaria. Las unidades de eficiencia que un individuo podrá ofertar en el sector j dependerán de su habilidad innata ω (distribuida uniformemente en el intervalo $[0,1]$ y de su grado de compatibilidad con los requerimientos de dicho sector, así como con la experiencia previa de sus padres como factor de aumento del propio aprendizaje. Así, siendo a_s^{hij} las unidades de eficiencia que i puede ofrecer en j:

$$a_s^{hij} = \gamma z_s^j + B_s^j \omega_s^i;\ \mathrm{z}_s^j, B_s^j > 0 \quad (5.31)$$

Cuando hay experiencia laboral de los padres en el mismo sector j, $\gamma = 1$. Las preferencias, comunes a todos los individuos, son logarítmicas en los consumos de los dos períodos; no hay en este modelo, a diferencia de la mayor parte de los revisados en esta línea de la literatura, altruismo, sino que todas las decisiones de formación son acometidas y financiadas por el propio individuo con cargo a sus ingresos. Esta estructura se debe a que la inversión en capital humano se realiza en el mismo período en que este genera ingresos. Las restricciones de ambos períodos serán:

$$C_{s-1}^{s-1,i} + s_s^i \leq y_s^i = e_s\left(1-n^{hj}\right)a_s^{hij} \quad (5.32)$$

$$C_s^{s-1,i} \leq \left(1+r_s\right)s_s^i \quad (5.33)$$

La maximización de la utilidad intertemporal se realiza respecto a los consumos y al sector en el que se ofrecerán los servicios de trabajo. En concreto, se escoge aquel sector de entre los J operativos que proporciona el nivel de utilidad indirecta más elevado. En este contexto puede introducirse en el modelo la innovación tecnológica como un proceso nuevo j+1 (frente a uno j ya existente) tal que hace la rentabilidad del capital humano invertido en este tipo de formación mayor. Centrándonos en tecnologías estacionarias (esto es, aquellas cuyos parámetros identificativos se mantienen constante a lo largo de todos los períodos en que se aplican), esta propiedad se resumen en las dos siguientes desigualdades, que expresan la superioridad de la nueva tecnología:

$$\left(1-n^{hj+1}\right)B^{j+1} > \left(1-n^{hj}\right)B^{j} \quad (5.34)$$

$$\left(1-n^{hj+1}\right)z^{j+1} > \left(1-n^{hj}\right)z^{j} \quad (5.35)$$

$$n^{hj+1} > n^{hj} \quad (5.36)$$

Es decir, a pesar de que la nueva tecnología es siempre más intensiva en tiempo, su grado de adaptabilidad a las habilidades individuales es suficientemente mayor como para gantizar una mayor retribución. Estas relaciones tienen varias implicaciones importantes: si el padre del individuo i trabajó en el sector j, existirá un valor crítico de la dotación de habilidades $\bar{\varpi}$ tal que el individuo de la siguiente generación permanecerá indiferente entre la tecnología j y j+1. Si, por el contrario, el padre trabajó ya en j+1, existirá un nivel inferior crítico de habilidad innata $\underline{\omega}$ que provocará tal indiferencia. Dada la coexistencia de estos niveles, en un mismo momento del tiempo las tecnologías j y j+1 seguirán operativas, aunque vista la superioridad en términos técnicos de j+1 respecto a j, solamente estas dos serán utilizadas por las empresas.

Las predicciones del modelo en términos de movilidad intergeneracional se deducen del análisis anterior. Partiendo de la coexistencia de las tecnologías j y j+1 en un período de tiempo s, sea m_s la proporción de individuos cuyo padre trabajó en la tecnología antigua. Esto significa que, para ellos, una proporción $1-\bar{\varpi}$ pasará a trabajar en j+1, mientras que el resto se mantendrá en la tecnología antigua. Algo similar podría decirse de aquellos cuyo padre trabajó en la tecnología nueva. Esta relación puede sintetizarse en la siguiente ecuación de movimiento de m, que indirectamente es también una ecuación de movimiento del output agregado (ya que la producción depende totalmente del número de unidades de trabajo eficiencia en cada tecnología, al ser el capital físico estacionario):

$$m_{s+1} = \bar{\varpi} m_s + \underline{\omega}\left(1 - m_s\right) \quad (5.37)$$

Esta ecuación caracteriza la dinámica global del modelo, estable sea cual sea el punto de inicio y con convergencia hacia el valor estacionario de m:

$$m = \frac{\underline{\omega}}{1 - \left(\bar{\varpi} - \underline{\omega}\right)} \quad (5.38)$$

La mera existencia de este equilibrio estacionario implica que, para que la fracción se mantenga constante, en el mismo existe movilidad intergeneracional de una tecnología a otra, viniendo dados sus umbrales por $\bar{\varpi}$ y $\underline{\omega}$ y teniendo los flujos en cada sentido la misma magnitud. Paralelamente a la convergencia en el empleo se produce la del output del conjunto de la economía. Así, si por ejemplo $m_0 > m$, la fracción del empleo en el sector de la antigua tecnología descenderá monótonamente, al tiempo que aumentará el output. A pesar de la existencia de movilidad intergeneracional en estado estacionario, se verificarán dos proposiciones al respecto: i) Tanto la habilidad media como el nivel medio de capital humano serán superiores en el sector más avanzado tecnológicamente que en el más retrasado, a causa de la existencia de "triggers" que desencadenan la movilidad intersectorial de los trabajadores, garantizando que el nivel medio de habilidad será mayor en el tecnológicamente superior. La transmisión de padres a hijos del componente educativo en la ecuación de acumulación favorece también este resultado. ii) En estado estacionario la dinámica del capital humano medio será decreciente en los dos sectores. Si partimos de $m_0 > m$, al disminuir con el tiempo el número potencial de entrantes en el sector avanzado (con mayores habilidades) y aumentar el de entrantes en el más atrasado (con menores habilidades), en ambos sectores la trayectoria del capital humano será descendente. No obstante, la distancia relativa se mantendrá. En definitiva, incluso existiendo un solo estado estacionario las diferencias en rentas entre los segmentos de la población ubicados en cada sector son permanentes, si bien factores aleatorios posibilitan cierto grado de movilidad intergeneracional y social.

En definitiva, el marco neoclásico de crecimiento con capital humano constituye un contexto más rico que el modelo neoclásico tradicional con capital físico, en el sentido de que el primero da cabida a que diferentes fricciones o peculiaridades tecnológicas pueden producir trampas de pobreza, si hablamos de estados estacionarios múltiples, o simplemente estados estacionarios con una fracción de la población con un stock sensiblemente inferior del activo e ingresos menores a

causa habitualmente de condiciones de partida diferentes. El “mapa” de desigualdad social que dibujan unos y otros modelos en enormemente heterogéneo: mientras en los primeros la movilidad intergeneracional y, con frecuencia, la movilidad social es nula, en los segundos se produce esta movilidad hacia arriba o incluso en dos direcciones, lo que constituye un resultado más realista, aunque a aquella menudo de modo aleatorio y condicionada por factores que no se encuentran estrictamente dentro del alcance de los agentes. Por lo demás, t**odos los casos considerados se producen a consecuencia de invalidaciones de unos u otros supuestos que priman en el modelo de competencia perfecta**, la mayor parte de las cuales cuentan con un soporte empírico reducido -o cuando menos, su permanencia en el largo plazo-. En cualquier caso, el modelo neoclásico sin fricciones genera desigualdad a largo plazo entre individuos cuando se observan determinados elementos de heterogeneidad entre agentes que ni siquiera el acceso perfecto al mercado de capitales puede soslayar: un buen ejemplo viene dado por la diferencia de productividad en los procesos de aprendizaje. Incluso aunque estas asignaciones desiguales no puedan ser calificadas de ineficientes en un marco neoclásico puro, aceptación o no de las mismas depende en gran medida del componente redistributivo de las preferencias sociales. Como además señala adecuadamente Castelló-Climent (2011), cuando estas situaciones son generadas por fricciones tienden a retroalimentarse en el tiempo a través de mecanismos recurrentes (mayor propensión a sufrir restricciones de crédito de las familias sin formación, a presentar tasas de fertilidad superiores -que en última instancia expulsan al capital humano, al tratarse de activos reales sustitutivos-. Incluso aun pensando en grados de movilidad intergeneracional solamente parcialmente limitados, estas situaciones plantean un reto desde la perspectiva de la igualdad de oportunidades e inciden negativamente sobre el crecimiento de la economía. Los canales a través de los que lo hacen son tanto directos -la propia acumulación de capital humano- como indirectos (por ejemplo, menor inversión en salud y menor longevidad, como en Chakraborty y Das (2005) o Castelló-Climent y Doménech (2008)). Estas reflexiones parecen justificar al menos un análisis de en qué condiciones la intervención pública -dirigida a la raíz de la distorsión, esto es, la insuficiente acumulación de capital humano de acuerdo con algún criterio de optimalidad social- puede llegar a mitigar estos problemas sin crear otros mayores, o bien las soluciones deben proceder del propio sector privado.

V.2. Políticas de crédito público a la educación.

Lochner y Monge-Naranjo (2011) proponen un modelo -ver el marco general en el Anexo, similar al de Berham, con y sin restricciones de crédito- en el que las políticas de crédito público dirigidas a compensar las ineficiencias del mercado se rigen por un doble principio. Primero, el crédito estará consagrado únicamene a financiar gastos educativos en sentido estricto, sin que quepa afectar al consumo. En otras palabras, $b_{s+1} < x_s^h$. Per se esta desigualdad implica ausencia de restricción, ya que la cantidad de inversión deseada es inferior al endeudamiento acometido. En comparación con las restricciones crediticias existentes en una economía sin intervención, resulta una condición más ventajosa para los estudiantes con una mayor habilidad, toda vez que en el óptimo no restringido la inversión es una función creciente de esta última. Así, los individuos con más posibilidades, que tienen en principio una ratio elevada de activos financieros sobre capital humano, consumirán con cargo a su dotación financiera en el primer período e invertirán lo máximo posible. Al contrario, la condición es más onerosas para aquellos estudiantes con escasas habilidades, ya que el óptimo restringido les permitía financiar al menos parcialmente su consumo ante las menores perspectivas de crecimiento de su renta en el último período de vida. La segunda condición que se impone es que el programa de préstamos públicos no es ilimitado, sino que se instrumenta a través de un tope al endeudamiento con fines estrictamente educativos. Combinando las dos características, se tiene la siguiente condición de un programa público:

$b_{s+1} < Min\left[\bar{b}^g, x_s^h\right]$ (5.39)

Suponiendo, para facilitar la comparabilidad con el régimen de restricciones de crédito sin intervención, que $\bar{b}^g = \bar{b}$. En tal caso, se podrán clasificar a los individuos en 2 ó 3 grupos según el grado de restricción de crédito experimentada y el valor de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Comenzando por el caso en que esta es ≤ 1 , podrán encontrarse 3 posibles situaciones. La primera, la de aquellos individuos no restringidos. A su vez, dentro de ella hay dos posibles variantes. En la primera se encontrarían aquellos agentes para los que $B_s > \bar{B}$, de suerte que estos no se ven afectados por la restricción de crédito y pueden maximizar libremente, dependiendo su inversión solamente de su habilidad inicial A y manteniendo invariante su bienestar respecto a un mercado sin fricciones de crédito. Otra variante vendría dada por aquellos individuos que registran una inversión óptima inferior al límite de los créditos públicos, de modo que si denotamos con un asterisco las variables en el óptimo no restringido, $x^*(A) < \bar{b}^g$. En comparación con un mercado de crédito restringido sin intervención pública, la condición sobre el destino excluyente de los créditos educativos reduciría su bienestar, ya que cuando el crédito es público no pueden utilizar el margen hasta el límite para financiar consumo.

Aparte de estos casos, pueden encontrarse otros dos en los que la restricción al crédito se hace efectiva. Previamente definamos $\bar{A}$ como aquel valor crítico de la habilidad de partida que iguala la inversión en capital humano no restringida al límite de crédito proporcionado por el gobierno, esto es: $x^*(\bar{A}) = \bar{b}^g$. Asimismo puede definirse $\hat{B}$ como aquel nivel de riqueza financiera tal que iguala la inversión restringida al mismo límite, teniendo en cuenta que será una función de A: $x(A, \hat{B}(A)) = \bar{b}^g$. Establecidos estos parámetros, algunos agentes situarán su inversión restringida por encima de $\bar{b}^g$; estos serán aquellos para los que $A > \bar{A}$ y $B_s > \hat{B}$, que financian un tramo de su inversión mediante crédito público y otro mediante el recurso a su riqueza financiera inicial. Finalmente, para aquellos que verificaran $A = \bar{A}$ ó $A > \bar{A}$ y $B_s = \hat{B}$, su inversión en capital humano se igualaría a $\bar{b}^g$, optimizando libremente en el primer caso y encontrándose restringidos en el segundo. Esta última tipología solamente se encontraría cuando la inversión en capital humano fuera decreciente respecto a A, ya que de lo contrario no podría garantizarse $\hat{B} > 0$. En definitiva, individuos con habilidades relativamente reducidas no estarían restringidos, mientras que de aquellos con una alta capacidad, la inversión en capital humano nunca sería inferior al límite de crédito público, fuera la primera restringida o no restringida.

En suma, la introducción de una política de crédito público con limitaciones cuantitativas equivalentes a las del mercado empeora la eficiencia para los agentes con menores habilidades y riqueza, al limitar sus posibilidades de suavización del consumo, aunque produce resultados análogos a los del mercado con fricciones en los restantes casos. **En lo referente a la movilidad social, genera resultados análogos a los del mercado, aunque estos pueden ser tanto mejores cuanto más elevado sea el techo. Para evaluar los efectos netos de estas medidas en función del techo consignado haría falta, no obstante, trasladar el análisis a un entorno de equilibrio general que tuviera en cuenta la financiación del crédito concedido por el gobierno** -en apartados posteriores se hará alusión a estudios de este tipo, solo que referidos a otros instrumentos educativos-. Incluso suponiendo que el servicio del crédito público sea prioritario para todo agente y por tanto la concesión de este no genere déficit en un horizonte de dos períodos, la financiación de la adquisición de un activo financiero debe hacerse bien mediante la obtención de un superávit público, bien mediante la emisión de deuda; en cualquier caso estos instrumentos en general ejercen efectos distorsionantes sobre las decisiones de acumulación de capital humano, como se verá en apartados posteriores, pudiendo llegar a compensar las ventajas que en primera instancia se derivan de su introducción.

Los créditos públicos en educación pueden estudiarse en combinación con la acción de los créditos privados. Deteniéndonos por un momento en las características de estos últimos, se caracterizan por girarse contra los ingresos futuros que proporciona la inversión en capital humano. Otra diferencia con los créditos públicos es que los primeros pueden verse afectados por impagos, mientras que el pago de los últimos normalmente es más rígido. Si denotamos por $\bar{\kappa}$ las penalizaciones por impago, los agentes solamente atenderán el servicio del crédito privado ($(1+r_s)b_{s+1}^p$) cuando este sea inferior a las penalizaciones impuestas $\bar{\kappa}Af\left(x_s^h\right)$. Despejando esta desigualdad, se llegará a la siguiente cota superior del crédito privado, en función de las ganancias posteriores a la etapa educativa, siendo $\kappa \equiv \bar{\kappa}/(1+r)$:

$$b_{s+1}^p \leq \kappa Af\left(x_s^h\right) \quad (5.40)$$

De esta restricción se desprende que, cuando hay prestamistas privados, el nivel de aptitudes A puede resultar clave a la hora de delimitar los individuos no restringidos, ya que a mayor A tanto mayor será el techo; esto no sucede en el régimen público, al ser el techo de crédito independiente de este parámetro. Este caso tendrá tantas más probabilidades de suceder cuanto mayor sea κ , ya que un A más elevado también implica un aumento de la inversión de equilibrio en un régimen no restringido. Por la misma lógica, los individuos que se sitúen en el extremo superior del intervalo que da soporte a la distribución estocástica de A pueden no estar restringidos nunca, incluso con valores de la penalización intermedios.

Teniendo en cuenta además que el volumen de crédito privado no afecta a la cuantía de crédito público repagada y viceversa, la cota superior conjunta de ambos tipos de crédito será:

$$b_{s+1}^g + b_{s+1}^p \leq \min\left[x_s^h, \bar{b}^g\right] + \kappa Af\left(x_s^h\right) \quad (5.41)$$

Utilizando ahora el superíndice g+p para denotar las variables de equilibrio en el régimen en que coexisten los dos tipos de crédito, se verificará:

$$\frac{\partial \bar{B}^{g+p}(A)}{\partial b^g}, \frac{\partial \bar{B}^{g+p}(A)}{\partial \kappa} < 0 \quad (5.42)$$

Esto es, la progresiva relajación de las condiciones crediticias en cualquiera de los dos segmentos conduce a una disminución de la riqueza financiera mínima para eludir la restricción de liquidez, o lo que es lo mismo, a un aumento de los individuos que optimizan libres de restricciones. Una consecuencia directa de la anterior propiedad es:

$$\bar{B}^{g+p}(A) < Min\left\{\bar{B}^g(A), \bar{B}^p(A)\right\} \quad (5.43)$$

Esto es, para un nivel de habilidad original, el umbral de riqueza financiera para maximizar sin restricciones será siempre menor en el régimen mixto que en cualquiera de los puros tomados aisladamente. Por otro lado, para aquellos individuos con $A > \bar{A}$, esto es, restringidos por los límites de crédito público y/o privado, la inversión en capital humano se elevará cuando estos techos aumenten, de modo que:

$$\frac{\partial x^{g+p}\left(A,B_s,\bar{b}^g,\kappa\right)}{\partial \bar{b}^g},\frac{\partial x^{g+p}\left(A,B_s,\bar{b}^g,\kappa\right)}{\partial \kappa}>0 \quad (5.44)$$

No obstante, aun coincidiendo en el signo los signos de estas derivadas parciales, el impacto de los cambios en los techos crediticios privado y público es asimétrico, con un mayor potencial acumulado para el público. En efecto, un incremento del techo del crédito público no solamente permite elevar la inversión -dada una riqueza financiera inicial-, sino que al elevar la acumulación arrastra también el alza el techo de crédito privado, con el consiguiente efecto combinado. El aumento de κ , sin embargo, no tiene un efecto colateral sobre el crédito público.

La confluencia de crédito público y privado entraña otro tipo de interacciones dignas de señalar. Por reseñar las más importantes, de nuevo cuando $A > \bar{A}$, la inversión en el régimen mixto será inferior a la que hubiera tenido lugar en el régimen no restringido y la inversión con restricción de crédito será creciente respecto a la riqueza inicial de los individuos, como ya sucedía en el régimen público. Pero además, para valores empíricamente relevantes e inferiores a 1 de la elasticidad de sustitución intertemporal y si la proporción del crédito privado sobre el crédito total es superior a un cierto umbral, la inversión en el óptimo restringido del sistema mixto será creciente en el nivel de habilidad A; esta propiedad es, en definitiva, una extensión de la vista anteriormente en el marco de un régimen privado puro. En cuanto a aquellos trabajadores con $A < \bar{A}$ que en el régimen público se encontraban obligados al canalizar todo el crédito a inversión, en el régimen mixto presentan una inversión de equilibrio superior a la no restringida y por lo tanto socialmente ineficiente. La razón es que, conforme incrementan su capital humano, se eleva el umbral de crédito privado y de este modo pueden aumentar su acceso y destinar la cantidad adicional obtenida a un mayor consumo durante el período de aprendizaje.

En resumen, la conjunción de prestamistas públicos y privados produce efectos mixtos desde el punto de vista de la eficiencia, aunque mejoras desde el de la movilidad intergeneracional. Respecto a los primeros, el signo depende de cuál sea la situación de partida de cada agente. En el lado más positivo, se mitiga la importancia de la dotación financiera de partida como condicionante de la consecución de la inversión socialmente óptima; al mismo tiempo, la endogeneidad del techo privado respecto a la capacidad innata de los individuos puede llegar a incrementar la inversión viable para aquellos que están dotados de ella en mayor grado, por lo que el efecto de A sobre la inversión se hace más potente. Los individuos más expuestos en cualquier régimen son aquellos con escasas habilidades y un nivel medio-bajo de riqueza financiera, al experimentar una pérdida en sus posibilidades de consumo en el régimen público -dada la condicionalidad sobre la utilización del préstamo- e incurrir en sobreinversión cuando entran en juego prestamistas privados. Para estos últimos el acceso ampliado al crédito en este último caso no representará una mejora de sus oportunidades de promoción social.

V.3. Intervención pública mediante impuestos+subvenciones y eficiencia dinámica.

Pasando a este segundo instrumento, hay dos cuestiones básicas a analizar. La primera, hasta qué punto el equilibrio competitivo descentralizado con pleno funcionamiento de los mercados de crédito que financien el gasto en educación puede dar lugar a asignaciones eficientes que hagan innecesaria la intervención pública. También conviene analizar dicha eficiencia en ausencia de acceso perfecto al crédito, aunque esta se encuentre paliada por elementos de "eficacia intermedia", como unas preferencias que reflejen altruismo intergeneracional siquiera limitado o, cuando este es perfecto, se manifieste en forma de legados financieros unidireccionales (esto es, de padres a hijos y mayores o iguales a 0). Como veremos a continuación, el estado del debate refleja una ausencia de consenso teórico debido a la diversidad de criterios de eficiencia, que lleva a una heterogeneidad de resultados, si bien conforme los criterios se hacen progresivamente más sofisticados permiten concluir que las restricciones habituales en un marco OLG introducen ineficiencias de distintos tipos sea cual sea el grado de restricciones financieras en el que se planifican las inversiones en educación. La segunda cuestión se refiere a la selección de los instrumentos fiscales óptimos en presencia de restricciones de crédito cuando sus vías de financiación entrañan algún tipo de distorsión en las decisiones de los agentes.

V.3.1 Subvenciones educativas por motivos de eficiencia

El común denominador de estos modelos es la evaluación de las condiciones de eficiencia dinámica del equilibrio competitivo descentralizado con o sin altruismo intergeneracional, medida esta por distintos criterios que se traducen en resultados de diferente signo. La heterogeneidad en los criterios normativos utilizados conduce también a respuestas diversas para corregir los problemas de ineficiencia.

Una primera posición encuentra el equilibrio descentralizado sin altruismo dinámicamente eficiente siempre que los mercados de crédito se encuentren operativos; sin embargo, la ausencia de estos o su funcionamiento imperfecto justifica la intervención pública mediante subvenciones educativas, financiadas preferentemente mediante impuestos no distorsionantes. Otra nota común a estos autores es que, mediante la anterior línea de razonamiento, concluyen la complementariedad de los sistemas de pensiones y en la inversión en educación como vía para dotar de eficiencia dinámica a los entornos de OLG en ausencia de altruismo intergeneracional. El interés por este enfoque se deriva en la estela de Ehrlich y Lui (1991), quienes introducen las transferencias intergeneracionales "hacia delante" como mecanismo de aseguramiento en la vejez y, simultáneamente, vía de inversión en capital humano incluso cuando no existe altruismo intergeneracional en las preferencias de los adultos. El argumento de estos últimos sobre acuerdos intergeneracionales implícitos se reelabora ya por Rangel (2000) en una economía de intercambio estacionaria, subsumiendo las pensiones financiadas por un mecanismo de "pay as you go" dentro de este esquema, de modo que el contrato intergeneracional provee inversión en un bien público (educación) para la generación que acaba de nacer, a cambio de futura financiación de las pensiones vía impuestos por parte de estos últimos; bajo estas premisas se demuestra que este mecanismo garantiza un equilibrio estable, el cual incluye la inversión continuada en una cantidad adecuada del bien público educación. Un modelo similar es construido por Boldrin y Montes (2000) y Belletini y Berti Cerroni (1999) prueban que la financiación de la seguridad social en un marco institucional en el que funcionan este tipo de acuerdos pueden conducir a equilibrios estacionarios con una mayor tasa de crecimiento de la producción[191]. Cremer, Kessler y Pestiau (1992) estudian el efecto de la combinación de pensiones y educación pública sobre la eficiencia en un modelo OLG de intercambio puro y **Boldrin y Montes (2005b)**, sobre los precedentes de los anteriores trabajos, trasladan el enfoque a un modelo OLG de producción endógena e imposición distorsionante sobre algunas decisiones de oferta. Su artículo tiene una notable influencia sobre la literatura posterior que relaciona educación y pensiones como elementos de un mismo sistema de eficiencia dinámica.

Este último modelo, uno de los más representativos dentro de esta tendencia, se basa en la modelización de cohortes de tres períodos de vida. Las preferencias carecen de altruismo, dependiendo exclusivamente del consumo en el segundo y tercer período de

[191] Boldrin y Rustichini (2000) demuestran esta estabilidad sobre la base de que un modelo de "pay as you go" posibilita a los adultos en la edad madura tener el monopolio de los ahorros para financiar la vejez, por lo que la tasa de retorno de dichos ahorros es de este modo más elevada. Es este beneficio el que posibilita la estabilidad del sistema.

vida: en este último no se trabaja y se vive de los rendimientos del ahorro. A consecuencia de la falta de altruismo, en este modelo el volumen de recursos dedicado a educación se decide durante el primer período de vida solicitando un préstamo que se repagará durante la edad adulta. Los jóvenes combinan los inputs educativos así conseguidos con una dotación de capital humano innata para producir su nuevo stock, que utilizarán durante el segundo período de vida. En lo que respecta al ahorro generado durante la edad adulta, este se materializará bien en capital físico, bien en préstamos a la generación más joven para que adquieran los inputs necesarios para financiar sus estudios. El siguiente conjunto de restricciones presupuestarias describen la tensión entre recursos y posibilidades de gasto de un individuo nacido en s-1 a lo largo de toda su vida, cuando los mercados de crédito para financiar la educación existen y están operativos:

$$0 \leq x_{s-1}^{h} \leq \frac{e_s a_s^h}{1+r_{s-1}} (5.45)$$

$$C_s^{s-1} + S_s + \left(1+r_s\right) x_{s-1}^{h} \leq e_s a_s^h (5.46)$$

$$C_{s+1}^{s} \leq \left(1+r_s\right) S_s (5.47)$$

Para simplificar, se supone que el stock de capital humano que constituye la dotación de los jóvenes es el mismo que el de la siguiente generación en su fase adulta; además, para facilitar la obtención de una solución cerrada las tasas de depreciación de ambos tipos de capital son unitarias. El problema de optimización consistirá por tanto en la maximización de la utilidad intertemporal sujeto a las tres restricciones flujo en cada uno de los períodos de vida y las variables de control serán la inversión educativa en el primer período (o, equivalentemente, el préstamo a tomar durante el mismo) y el volumen de ahorro durante el segundo período, que residualmente permitirá calcular los consumos en el segundo y tercer período. Es posible demostrar que: para una tecnología convexa en el bien final y en h (y decrecientes tanto en el capital humano como en el gasto en aprendizaje), la economía presenta una único estado estacionario globalmente estable caracterizado, como es habitual para este tipo de funciones, por una ratio constante capital físico/ capital humano. Además, para valores de los parámetros razonables desde el punto de vista de su calibrado, la senda de equilibrio general cumplirá las condiciones suficientes de eficiencia dinámica en el sentido de Cass (1972), esto es, no existe ninguna senda de las variables de estado aparte del equilibrio competitivo descentralizado que proporcione más consumo en algún período sin mermar el consumo en otro período[192].

---

192 En concreto se prueba la condición suficiente de Cass para un conjunto de valores plausibles de los parámetros, esto es, que la tasa bruta de retorno del capital físico en unidades eficiencia (dada por su productividad marginal) sea mayor que la tasa de crecimiento de la economía.

Sin embargo, los mercados de crédito a la educación existen en muy contadas ocasiones, por lo que en ausencia de altruismo parece necesaria alguna clase de intervención pública. **Es posible plantear una versión alternativa del modelo en el que se recaudan impuestos lump-sum sobre la generación adulta para dirigirlos a los jóvenes y financiar con ellos la compra de su material educativo**. El paso de uno a otro sistema genera una asignación diferente, en la mayor parte de los casos con ineficiencias estáticas y dinámicas asociadas y pérdidas de bienestar para las generaciones adulta y mayor en proporciones relativas que dependerán de los parámetros de partida. En general el conjunto de posibilidades de consumo de los adultos se contraerá, al desaparecer en su vejez las rentas procedentes del crédito a la generación joven que se concedía en una economía con mercados de crédito completos. Esto llevará a que en equilibrio el ahorro sea mayor, con un menor tipo de interés asociado, un mayor stock de capital físico y también una inversión educativa más elevada, a consecuencia de las condiciones de no arbitraje entre activos o eficiencia estática.

Esta distorsión puede reducirse siempre que el gobierno instrumente un conjunto de transferencias compensatorias que repliquen las condiciones que conducían a una asignación competitiva. En concreto, siempre que una vez llegada la edad adulta se restituya a los mayores la cuantía del impuesto que estos pagaron un período atrás, más los correspondientes intereses, se conseguirá el resultado deseado. De este modo, la generación intermedia sufriría una doble detracción de rentas por medio de impuestos *lump-sum*: una, destinada a la financiación de la educacion de los jóvenes, y otra la financiación "pay as you go" para restituir a los mayores la leva educativa a la que contribuyeron un período atrás. Con todo esto, las nuevas restricciones presupuestarias para un miembro de una cohorte nacido en s-1 serían las siguientes, denotándose con un asterisco las variables asociadas al equilibrio competitivo descentralizado con mercados completos y sin intervención pública:

$$0 \leq x_{s-1}^{h} = z_{s-1} \quad (5.48)$$

$$C_{s}^{s-1} + S_{s} \leq e_{s}a_{s}^{h} - T_{s}^{e} - T_{s}^{p};\; T_{s}^{e} = \left(x_{s}^{h}\right)^{*};\; T_{s}^{p} = P_{s} = \left(1+r_{s}\right)^{*}\left(x_{s-1}^{h}\right)^{*} \quad (5.49)$$

$$C_{s+1}^{s-1} \leq \left(1+r_{s}\right)S_{s} + P_{s} \quad (5.50)$$

Finalmente, cuando se utlizan impuestos distorsionantes para financiar la educación, la asignación resultante descentralizada deja de ser eficiente; este sería el caso, por ejemplo, de un impuesto lineal sobre la renta. En tal caso, las decisiones entre consumo y ahorro quedarían afectadas por el tipo impositivo; también se vería afectada la tasa de retorno sobre el capital humano, ya que si el tipo sobre las rentas del trabajo y del capital es el mismo, la renta del activo se vería mermada, pero no así su coste de obtención, que incluiría la devolución del préstamo. De este modo, la referencia del equilibrio competitivo ya no sería válida para determinar la recudación óptima que financia los gastos del gobierno en educación. **Estas dos ineficiencias podrían verse simultáneamente corregidas mediante la introducción de un subsidio adecuadamente calibrado sobre las rentas del capital percibidas en la vejez, pagadero durante la edad adulta:** en cuanto a la decisión ahorro/consumo, compensaría la imposición del tipo sobre las rentas del capital y, en lo tocante a la inversión óptima en capital humano, lograría reducir proporcionalmente renta y coste de producción del activo, resultando neutral en cuanto a la producción óptima del mismo.

Otros autores se decantan, sin embargo, por otros criterios para medir la eficiencia del equilibrio competitivo descentralizado con crédito. Del Rey y López-García (2012, 2013) parten del anterior modelo, si bien utilizan una versión modificada de la regla de oro en estado estacionario como referente de eficiencia, esto es, la maximización de la función de bienestar del agente representativo (con los consumos expresados en unidades de trabajo-eficiencia, o lo que es lo mismo, divididos por el stock de capital humano de una cohorte) sujeta a la restricción de recursos de la economía[193] y particularizando la solución del programa a la senda estacionaria. La utilización de este criterio frente a uno estándar basado en el consumo per cápita obedece a razones puramente subjetivas del planificador, que consideraría que, en un entorno en el que aumenta la eficiencia del trabajo, este incremento debe verse acompañado de una expansión del consumo, crezca o no la población.

---

[193] La maximización de la utilidad (y, en general, la reexpresión de todo el modelo) en términos de trabajo-eficiencia descansa en la homogeneidad de grado 1 de las preferencias y conduce a cpo diferentes para cada activo. Es fácil comprobar que tanto la RMS intertemporal del consumo como la productividad marginal del capital se igualan a la tasa de acumulación del capital humano (y no a su tasa de retorno) y, cuando el crecimiento neto de la población es positivo, al crecimiento de la economía, entendiendo por tal la composición de la tasa de acumulación del capital humano con el crecimiento de la población; o dicho de otro modo, la productividad marginal del capital físico en unidades de eficiencia se iguala a la tasa de crecimiento del factor trabajo, dada tanto por cantidad como por calidad o eficiencia del mismo. Pero además, existe una cpo diferenciada para el capital humano, que establece la igualdad -como es habitual- entre los beneficios y costes marginales derivados de tal inversión.

Este criterio normativo alternativo lleva a los autores a discutir la condición suficiente de eficiencia utilizada por Boldrin y Montes, en tanto que bajo la regla de oro modificada, aunque la inversión en capital físico sea inferior en laissez-faire que bajo la regla de oro, la acumulación de capital humano podría ser superior o inferior que las dictadas por este último criterio, que genera condiciones diferentes para cada activo. Por ello la evaluación de la eficiencia dinámica del equilibrio competitivo descentralizado exige la comparación separada de los stocks de ambos activos con los resultantes de la regla de oro, en lugar de guiarse solamente por uno de ellos. De este modo, comparando ambas asignaciones, se concluye que la asignación de laissez-faire, para valores comparables y plausibles de los parámetros del modelo, conducirá a una asignación dinámica ineficiente en el sentido indicado por la regla de oro modificada.

El criterio de regla de oro se extiende al análisis de las ganancias de bienestar derivadas de dos tipos de políticas: establecimiento de pensiones pay-as you go de adultos a mayores y de subsidios a la educación, financiados mediante impuestos lump-sum. En un entorno de crecimiento endógeno como el que proporciona el modelo de Boldrin y Montes, la corrección de una ineficiencia en el sentido de la regla de oro es solamente una condición necesaria, pero no suficiente para que cualquiera de estos instrumentos pueda aumentar el bienestar. **Centrándonos en los subsidios educativos, estos pueden incrementar o no la acumulación de capital físico, al ejercer un doble efecto**. Primero, incrementan la tasa de retorno del capital humano, aumentando el gasto educativo y, en la medida en que este es proporcional al stock de capital físico, elevan también la posición en este activo. Pero en sentido contrario, si las preferencias no son logarítmicas se producirá una disminución relativa del ahorro frente al consumo en el segundo período -dados los salarios reales-, que presione al alza el tipo de interés y expulse el capital físico. **Dejando de lado esta disquisición, incluso suponiendo que el efecto de las subvenciones sea el de fomentar la inversión en capital físico, serán necesarias dos condiciones para que aquellas constituyan una asignación superior desde la óptica de la eficiencia: i) Que la tasa de crecimiento de la economía sea inferior a la productividad marginal del capital (y, por tanto, una subvención que fomente la acumulación de capital humano restaure la cpo del capital físico conforme a la regla de oro) y ii) Que la medida conduzaca a un incremento neto de la renta intertemporal**, puesto que un capital humano más alto impulsará los salarios reales a la baja. En este sentido, puede demostrarse que la maximización de la renta intertemporal respecto al gasto educativo, evaluada en la regla de oro modificada, es equivalente a la cpo respecto al capital humano. Consiguientemente, el cumplimiento de estos dos requisitos supone “reequilibrar” el sistema para que este pase a satisfacer las condiciones de eficiencia generales derivadas y, en caso de que no se cumplan dichas condiciones, el resultado de la introducción de las subvenciones en términos de eficiencia será ambiguo.

El tercer resultado básico de este trabajo es que, incluso a lo largo de la senda eficiente dada por la regla de oro, con productividad marginal del capital físico igualada a la tasa de crecimiento de la economía, la política de subvenciones óptima pasaría por un signo negativo de las mismas o, en otras palabras, imponer un impuesto a la adquisición de educación. En efecto, incluso aunque los salarios reales y tipos de interés óptimos según este criterio se aplicaran al equilibrio competitivo descentralizado, la comparación de las condiciones de primer orden del planificador y el agente representativo en cuanto al préstamo óptimo a realizar a los jóvenes revelan la necesidad de una política como la descrita. Para el primero de ellos, los beneficios marginales vendrán dados por las mayores posibilidades de consumo debido a la tasa de crecimiento del capital humano y los costes marginales, principalmente, por la suma del sacrificio de consumo durante la edad adulta más la cantidad adicional de inversión en capital físico para que la ratio entre los dos tipos de capital se mantenga constante en estado estacionario y análogo gasto para el consumo. Para el agente que optimiza descentralizadamente, los beneficios marginales vendrán en forma de mayores ingresos marginales en el segundo período (que suponen, indirectamente, una ganancia en consumo) y los costes marginales ignorarán los dos últimos términos mencionados. De aquí que quepa concluir que el agente representativo tenderá a sobreinvertir en educación y por tanto este tipo de gasto deba ser sometido a un impuesto. A pesar de que las preferencias no son altruistas, el hecho de centrar el análisis de bienestar en el estado estacionario diluye los efectos externos causados por la omisión de los efectos de la acumulación de capital humano sobre las generaciones posteriores, ya que la utilidad será la misma para todas las generaciones bajo la regla de oro -al crecer el consumo a la misma tasa que el capital humano en estado estacionario-. **Este resultado es esencialmente opuesto al obtenido por Boldrin y Montes y a otros trabajos que se comentarán después.**

El empleo de criterios de eficiencia utilitaristas conduce a conclusiones sustancialmente diferentes cuando se sustituye la regla de oro modificada por el problema de un planificador benevolente convencional, que maximiza la satisfacción de los agentes generada por su corriente de consumos per cápita sujeta a la restricción de recursos de la economía. Este enfoque, más convencional que el de López-García y Del Rey, es el que puede encontrarse en trabajos como **Docquier et al. (1999, 2003, 2007)**, con la misma estructura temporal de las dos últimas contribuciones comentadas, ausencia de altruismo en las preferencias de los agentes y funcionamiento perfecto del mercado de crédito. El resultado muestra que, para que la senda descentralizada verifique las propiedades de eficiencia de la solución del planificador, deben incorporarse subsidios a la educación, al pesar en este escenario la ausencia de internalización por los padres de parte de los beneficios marginales de la acumulación, en concreto los relacionados con la mayor producción de la generación futura (o de todas las futuras, si la tasa de depreciación fuera nula). La divergencia entre ambos problemas procederá de la consideración de preferencias dinásticas en el caso del planificador, frente a otras limitadas al horizonte vital en el caso de los agentes privados.

A unas conclusiones similares llega el trabajo clásico de **Eckstein y Zilcha (1994)** -ver Anexo 2 en más detalle- plantean un modelo de generaciones solapadas con heterogeneidad en la distribución inicial de capital humano en el que se diferencian dos regímenes educativos: el privado, caracterizado por aportaciones voluntarias de inputs (tiempo) a la educación de los hijos y el público, con aportaciones públicas obligatorias que complementan a las privadas y se financian con un tipo elegido por el gobierno, a diferencia de otros modelos de determinación endógena que se abordarán más adelante. La economía contiene también capital físico, de modo que las distorsiones originadas por la imposición sobre la renta se evidencian junto a las posibles ganancias del sistema público en términos de reducción de la desigualdad. La configuración de las preferencias -con presencia del ocio de los padres, pero no del de los hijos, así como ausencia de los ingresos de estos últimos- genera ineficiencia paretiana en la provisión de educación, con subinversión. La introducción de tipos impositivos suficientemente bajos genera mayor crecimiento en el régimen público (al cabo de un cierto número de períodos, una vez los efectos positivos de la mayor acumulación de capital humano compensan la distorsión ocasionada a la acumulación del capital físico) y reducción de la desigualdad en todo período.

Las condiciones de eficiencia del equilibrio competitivo descentralizado pueden estudiarse también en presencia de legados, que exigen un grado de altruismo siquiera intermedio en las preferencias. Uno de los trabajos principles dentro de esta variante corresponde a **Caballé (1995)**. Su trabajo **demuestra que las asignaciones competitivas descentralizadas derivadas de un modelo OLG con altruismo precisan ser complementadas con subvenciones públicas con finalidades educativas**, siendo el principal rasgo diferencial del modelo la existencia de legados intergeneracionales en ls que se materializa el altruismo paterno. El marco modelizador de Caballé es similar al descrito en los anteriores trabajos, todos los cuales se articulaban en torno a 3 períodos de vida de los agentes. Conforme a la ya comentada presencia de altruismo intergeneracional, la utilidad de cada individuo depende de los consumos realizados en los dos últimos períodos de vida, así como de la utilidad de los siguientes miembros de la dinastía. Esta mecánica, referida a un individuo representativo de la generación nacida en s, adoptaría la siguiente forma, siendo además sus preferencias homotéticas y separables incluso entre los componentes relativos a la misma cohorte:

$$U_s = u\left(C_{s+1}^s, C_{s+2}^s\right) + \theta U_{s+1} \;\; ; u\left(C_{s+1}^s, C_{s+2}^s\right) = \frac{\left(C_{s+1}^s\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{\left(C_{s+2}^s\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (5.51)$$

Los legados toman la forma de bien de consumo o de inversión en capital humano. El primer tipo de legados (B) se realiza en el último período de vida y se recibe en la madurez. El segundo se efectúa en la madurez y se recibe en la juventud. La función de aprendizaje dependerá del x y será homogénea de grado 1 en el capital humano heredado como dotación al principio de la vida, o lo que es lo mismo, el nivel educativo "medio" del período. Esta influencia del stock de capital humano se considera, no obstante, una externalidad que no es tenida en cuenta por los progenitores a la hora de derivar sus condiciones de primer orden y, en particular, el esfuerzo destinado a educar a la generación joven. La inversión realizada durante la madurez podrá materializarse en capital físico y capital humano de la siguiente generación. La función productora del bien final tiene rendimientos constantes a escala y las propiedades de concavidad habituales respecto a cada uno de los inputs. La asignación del tiempo no juega ningún papel en el modelo, ya que su dotación se destina inelásticamente a aprendizaje en el primer período, a trabajo en el segundo y a ocio en el tercero, si bien este último no pertenece como argumento a la función de utilidad dinástica. La inversión en capital humano de los progenitores será la única vía de financiación del capital humano. Con estas hipótesis, las restricciones presupuestarias durante el segundo y tercer período de vida serán las siguientes:

$$C_{s+1}^s + x_{s+1}^h + S_{s+1} \le e_{s+1} a_{s+1}^h + B_{s+1} (5.52)$$

$$C_{s+2}^s + B_{s+2} \le \left(1 + r_{s+1}\right) S_{s+1} (5.53)$$

$$a_{s+1}^h = i_s^h + \left(1 - \delta^h\right) a_s^h (5.54)$$

En equilibrio general la condición óptima de los legados directos implica que la desutilidad procedente de la pérdida de consumo en la vejez a causa del legado es mayor o igual que el incremento de la utilidad de la generación posterior al recibir este. La vigencia de un signo "menor" implicaría el deseo de los mayores de recibir una transferencia positiva de sus hijos, lo que no resulta posible al ser este por construcción un modelo de altruismo en una sola dirección. Las otras cpo igualan, por un lado y como es habitual, la RMS entre consumo presente y futuro de los padres a la tasa de retorno del capital físico, así como la RMS entre consumo paterno presente y consumo filial futuro a la tasa de retorno del capital humano. Si los legados no son operativos, combinando las cpo se concluye que la tasa de retorno del capital físico será menor que el retorno del capita humano; esto significa que la inversión en este último será inferior a la realmente óptima si los legados pudieran ser negativos (o, en otras palabras, subinversión en capital humano para un stock del activo dado). Este resultado es común a modelos sin capital humano, que apuntan a una sobreinversión en capital físico, como el de Weil (1997) o el de Nerlove, Razin y Sadka (1988) con capital humano y agentes de dos períodos de vida.

El estado estacionario se encuentra correctamente definido en este modelo y es único; la utilidad dinástica se encontrará además acotada y se satisfará la condición de transversalidad bajo cumplimiento de una condición que liga el factor de altruismo intergeneracional y la relación marginal de sustitución del consumo entre dos generaciones consecutivas. En general la tasa de altruismo intergeneracional, que formará parte de la tasa de descuento de la utilidad dinástica, mostrará una relación positiva con la tasa de crecimiento estacionario. El modelo se ha comentado hasta el momento bajo el supuesto de población constante y normalizada a 1, pero puede introducirse una tasa de crecimiento exógena del tamaño de las cohortes. En este último escenario y asumiendo que la tasa de altruismo intergeneracional presenta una relación decreciente respecto al tamaño de las cohortes -como en Becker y Barro (1988)-, la tasa de crecimiento estacionaria guardará una relación negativa respecto a la tasa de crecimiento de la población.

En cuanto al signo de los legados en estado estacionario, depende de la relación entre el parámetro que mide el altruismo y un cierto umbral $\bar{\theta}$, definido en función de otros parámetros del modelo. El que $\theta > \bar{\theta}$ es la condición necesaria y suficiente para la existencia de legados positivos. Además, para utilidades logarítmicas el umbral $\bar{\theta}$ está positivamente relacionado con el grado de externalidades del capital humano en la tecnología de aprendizaje (o dicho de otro modo, con la magnitud de su derivada parcial en la función h), como por otra parte es lógico: a mayor impacto de la dotación de capital humano sobre la acumulación del mismo activo, tanta menor necesidad de realizar un legado para que las próximas generaciones puedan alcanzar un cierto nivel de consumo[194]. Cuando existen legados positivos, el estado estacionario y localmente estable, convergiéndose a él inmediatamente a partir del primer período[195]. Por el contrario, cuando el grado de altru-

[194] La prueba no puede realizarse para preferencias homotéticas en general.

[195] La falta de dinámica de transición con legados operativos es análoga a la que se observaria en una economía abierta con perfecta circulación de capitales en la que el perfil óptimo pasa por la toma de posiciones positivas en bonos durante los primeros períodos de vida. En este sentido, el carácter no vinculante de la restricción de no negatividad de los legados, unido al supuesto de tasas de depreciación unitarias para ambas clases de capital, confieren una flexibilidad perfecta al ajuste del ratio de capitales hacia su valor estacionario.

ismo es menor que el umbral, puede existir un número mayor que 1 de estados estacionarios, algunos de ellos localmente inestables y con niveles nulos de legados.

Pasando al equilibrio del planificador, este no estará sujeto a restricción alguna en cuanto al signo de los legados entre mayores y jóvenes. El resultado fundamental del mismo es la ineficiencia de la inversión en capital humano derivada de un equilibrio competitivo descentralizado, al no internalizarse los efectos del capital humano sobre la acumulación al decidir la inversión en educación de los hijos. Por otra parte, el levantamiento de la restricción sobre el signo de los legados implica que en el equilibrio socialmente eficiente no se producirá el fenómeno de sobreinversión en capital físico que se comentó ntes.

Comparando las tasas de crecimiento entre el equilibrio de planificador y el descentralizado, cuando los legados están operativos en el equilibrio descentralizado existen dos efectos de signo contrario. Por un lado, la consideración explícita de todos los efectos de la acumulación de capital humano actúa en la dirección de una mayor tasa de crecimiento de este último en estado estacionario, así como de una menor ratio estacionaria entre capital físico y capital humano. Pero por otro, dado que los salarios reales son crecientes respecto a la ratio entre los dos tipos de capital, una mayor ratio estacionaria en la asignación descentralizada implica una mayor tasa de retorno del capital humano y una mayor acumulación de este. El primer efecto tenderá a predominar sobre el segundo tanto más cuanto más elevada sea la elasticidad de h respecto al capital humano. Cuando el primer efecto predomine sobre el primero (por ejemplo, si existen externalidades suficientemente importantes en el capital humano), el equilibrio del planificador estará asociado a una mayor tasa de crecimiento. Sin embargo, si ambas elasticidades coinciden, los efectos se compensarán y las tasas de crecimiento en el equilibrio descentralizado y socialmente eficiente serán las mismas. **Si los legados no son operativos en el equilibrio descentralizado** y los efectos externos son suficientemente importantes, hay un efecto adicional que convierte el resultado en ambiguo, cual es la sobreinversión en capital físico del laissez-faire. De este modo, la diferencia entre ambos equilibrios en inversión en capital físico pudiera ser lo suficientemente elevada como para compensar la diferencia en capital humano a favor del planificador. **El principal corolario de este resultado es que, con legados no operativos en el equilibrio descentralizado puede llegar a presentarse un trade-off entre eficiencia y crecimiento en la intervención pública en educación, ya que mientras el equilibrio privado está marcado por subinversión en capital humano en relación con el público por los dos motivos comentados (aunque solo uno de ellos es realmente específico de los entornos con legados), sin em-**

bargo puede presentar una mayor tasa de crecimiento. El signo de la ineficiencia apuntaría, sin embargo, a una política de fomento de la inversión en educación.

V.3.2. Paquetes fiscales óptimos con restricciones de crédito

Al margen de la polémica doctrinal anterior, cuando las restricciones crediticias devienen vinculantes el establecimiento de figuras impositivas que redistribuyan la renta hacia los hogares restringidos de crédito para financiar la educación y, en definitiva, garantizar la igualdad de oportunidades, es un instrumento ampliamente utilizado en los países occidentales. El problema puede abordarse en el marco de los propios modelos que explican la existencia de trampas de pobreza, lo que resta generalidad a los resultados, o en modelos más sencillos de OLG que resaltan, como elementos más importantes de la decisión, la capacidad de estimular la inversión en educación que los impuestos y los gastos que financian poseen, junto con sus costes en eficiencia.

Esta última línea sobre la configuración óptima de la estructura impositiva ha producido numerosos trabajos, baste citar como más importantes los de Jacobs (2002, 2005), Maldonado (2008), Jacobs y Bovenberg (2010), Jacobs y Bovenberg (2011), Jacobs, Schindler y Yang (2012). Centrándonos en los más representativos y/o recientes, **Jacobs (2002)** deriva su resultado en un marco OLG de dos períodos muy similar al descrito de Lochner y Monge-Naranjo. Los individuos viven durante 2 períodos y toman sus propias decisiones respecto a las inversiones en su educación. Con unas preferencias que dependen del consumo en cada período, en el primero de ellos se distribuye el tiempo entre trabajo y formación y, en el segundo, se trabaja la integridad del tiempo. El salario real por unidad de tiempo y capital humano, e, es constante entre períodos; en el primero, en el que todavía no se ha acumulado ningún conocimiento, se supone que el hogar ofrece los servicios proporcionados por una dotación básica unitaria de capital humano con que todo agente nace. En el primer período también puede ahorrarse, disfrutándose en este caso de las rentas del ahorro en el segundo período. La imposibilidad de endeudarse en los mercados de capital se reflejará, sin embargo, en el hecho de que la posición tomada en activos financieros durante la juventud debe ser estrictamente positiva.

Existen dos factores productivos relevantes en la producción de capital humano: la fracción de tiempo dedicada en la juventud (años de estudio) y la eficiencia en el aprendizaje, aleatoria, B. De este modo la función de acumulación, creciente y estrictamente cóncava en sus dos argumentos, puede escribirse -suponiendo una tasa de depreciación unitaria al final de la vida y ningún legado de capacidad genético entre cohortes consecutivas- como:

$a_{s+1}^{h} = h\left(B, n_{s}^{h}\right); h_{B}, h_{n} > 0; h_{BB}, h_{nn} < 0$ (5.55)

Además del tiempo, la acumulación de capital humano conllevará un coste fijo k en material educativo por año de estudio, aunque este no interviene en el proceso de acumulación per se; se supone que no existe sustituibilidad alguna entre el tiempo y el material de estudio. El vínculo entre generaciones se concreta en una dotación no pecuniaria ω (que hace las veces del legado exógeno en el modelo de Lochner) y que comprende todos aquellos activos que facilitan la generación de rentas (las redes sociales de los padres, los activos reales más líquidos, etc). Finalmente, la intervención del gobierno se concreta en dos actuaciones: un tipo impositivo constante sobre las rentas del trabajo, igual en los dos períodos de vida, así como una transferencia lump-sum g que puede interpretarse como una devolución fiscal.Con estas premisas, las restricciones presupuestarias de ambos períodos se escriben del siguiente modo:

$C_{s}^{s} + \kappa n_{s}^{h} + S_{s} \leq (1-\tau) e\left(1-n_{s}^{h}\right) + \omega + g$ (5.56)

$C_{s+1}^{s} \leq \left(1+r_{s}\right) S_{s} + (1-\tau) e a_{s+1}^{h} + g$ (5.57)

El consumo del segundo período será, pues, superior al del primer período; esto implica que el establecimiento de las transferencias en la misma suma a lo largo de la vida tendrá un efecto redistributivo desde las rentas más altas (los viejos) a las más bajas (los jóvenes); cabe calificar entonces al sistema impositivo en términos netos (impuestos menos transferencias) como progresivo. Los impuestos, que no pueden individualizarse por el supuesto de no observabilidad de la eficiencia innata en el aprendizaje, gravan solamente las rentas del trabajo y no las del capital, del mismo modo que tampoco recaen sobre el consumo. Como se aprecia también en la restricción, los gastos en material educativo no son deducibles fiscalmente y, dadas las dificultades de valoración de los legados familiares ω , estos tampoco forman parte de la base de impuesto alguno. La resolución del problema con niveles impositivos y de transferencias nulos arroja un resultado análogo al analizado en apartados previos: cuando la restricción de no negatividad del ahorro presenta holgura, las decisiones de consumo e inversión en capital humano serán independientes y los agentes invierten la cantidad que desearían. Sin embargo, cuando la restricción se hace vinculante, existe un nivel crítico de la dotación ω por debajo del cual no puede financiarse toda la inversión deseada. En este sentido, tanto los individuos más pobres (con menores dotaciones) y/o los más cualificados, que se benefician de un parámetro B superior, serán los más perjudicados -estos últimos porque, para una dotación dada, desearían invertir más al presentar una tasa de retorno del capital humano más elevada-.

La **política impositiva óptima** puede calcularse introduciendo un componente redistributivo o no. Cuando se habla de ausencia de redistribución, debe interpretarse un grado por encima del que llevan implícito por diseño el mecanismo de impuestos y transferencias. El efecto de las transferencias sobre el stock de capital humano es neutro para los individuos no restringidos de crédito y positivo para aquellos que sufren escasez de liquidez. El de los impuestos también presenta diferencias según el grado de acceso al crédito de los individuos. Para los no restringidos, el signo es inequívocamente negativo[196]. Para los individuos restringidos de liquidez, sin embargo, se observan dos efectos de signo contrario: el sustitución derivado de la reducción de la tasa de retorno del capital humano, unido a otro sobre la relación del valor sombra de la riqueza en los dos períodos, al afectar la imposición proporcionalmente más al segundo período y por tanto eleva relativamente la utilidad marginal del consumo en el segundo período, que estimularía la inversión en la juventud. Debe suponerse, sin embargo, para que el tipo óptimo esté acotado, que predomina el primero de estos efectos, desincentivador de la inversión. Por lo demás, la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno se escribe como:

$$\Lambda + G = \tau H \quad (5.58)$$

Así, los recursos se generan íntegramente a partir de la aplicación del tipo impositivo a la corriente descontada de rendimientos del capital humano. Los empleos se canalizan hacia la suma descontada de las transferencias más ciertos gastos autónomos sin incidencia en las decisiones de los agentes y que quedan englobados en Λ . Tras esta restricción, expresada en términos intertemporales, late la posibilidad de que el estado opte por deuda pública como una vía adicional de financiación, utilizando la posibilidad de materializar sus exacciones sobre el capital humano como colateral. La determinación del tipo óptimo se lleva a cabo mediante la optimización de la función indirecta de utilidad de los agentes sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno. Las cpo respecto a g y τ se sintetizan en la siguiente ecuación:

$$\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{\eta} + \frac{q}{\eta}\right] \quad (5.59)$$

Veamos sus elementos. ε representa la elasticidad de las rentas laborales respecto al tipo impositivo. Cuanto más sensible sea la inversión en capital humano al tipo impositivo,

---

196 En un modelo puro de imposición sobre el trabajo y tiempo como único input del capital humano, el resultado debería ser neutral, como se analiza en el capítulo 5 sobre financiación de políticas educativas. Sin embargo en este modelo en particular, la tasa de retorno se ve afectada además por los costes de adquisición de material educativo, no exentos de impuestos, por lo que no se produce una compensación de la disminución de la renta marginal del activo con otra en la misma proporción del coste de inversión.

más bajo deberá ser este. η es el valor marginal de los fondos públicos y responde a la siguiente definición:

$$\eta \equiv \frac{1}{1-\tau\frac{\partial H}{\partial G}} \quad (5.60)$$

Puesto que bajo restricciones de crédito la parcial del denominador es mayor que 0, el valor marginal será mayor que 1, ya que la restricción de crédito generará un efecto expansivo a consecuencia de la transferencia financiada con los impuestos. De la fórmula se desprende que, a mayor valor marginal, más elevado deberá ser el tipo impositivo. Por último, $q \equiv \left(\frac{1}{1+r_s}-\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s}\right)$ representa la pérdida de bienestar a consecuencia de las restricciones de crédito, al generar estas una cuña positiva entre el precio relativo de consumo futuro en términos del presente y la relación marginal de sustitución en el óptimo restringido. De esta manera, a mayor severidad de las restricciones más justificado estará el tipo impositivo para financiar un instrumento que tiende a relajarlas. **Se observa, pues, que cuando las restricciones de crédito están operativas, el tipo impositivo óptimo será en general positivo. En caso contrario,** $\eta = 1$ y $q = 0$ **, por lo que el tipo impositivo óptimo sobre el trabajo será nulo.**

El modelo puede resolverse también introduciendo objetivos redistributivos adicionales en una economía de agentes heterogéneos. Denominando F a la función de distribución acumulativa de (B,ω) y sabiendo que los soportes de ambas variables son $[\underline{B},\infty)$ y $[\underline{\omega},\infty)$, la restricción presupuestaria del gobierno pasará a escribirse como:

$$\Lambda + G = \tau \int_{\underline{B}}^{\infty}\int_{\underline{\omega}}^{\infty} H_{B\omega}\, dF(B,\omega) \quad (5.61)$$

El tipo impositivo y la cuantía de la transferencia se elegirán ahora para maximizar la siguiente función de bienestar social, sujeta a la restricción presupuestaria del gobierno:

$$W = \int_{\underline{B}}^{\infty}\int_{\underline{\omega}}^{\infty} \psi\left(V_{B\omega}\right) dF(B,\omega);\ \psi' > 0;\ \psi'' \leq 0 \quad (5.62)$$

Donde V denota el vector de funciones indirectas de utilidad de los agentes, obtenidas mediante la maximización de sus preferencias individuales sujetas a la cpo de acumulación de capital humano y a la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno. La especificación concreta que adopte ψ determinará las preferencias del gobierno sobre la distribución de la renta entre individuos; por ejemplo, $\psi'=1$ denotará unas preferencias igualitarias. Las cpo de este nuevo problema, adecuadamente reordenadas, permiten derivar la siguiente expresión paralela a la anterior, que muestra los determinantes del tipo impositivo óptimo:

$$\frac{\tau}{1-\tau}=\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\left(\zeta+\frac{(\eta-1)}{\hat{\eta}}+\frac{\hat{q}}{\hat{\eta}}\right) \quad (5.63)$$

Los componentes de la fórmula son similares a los utilizados con un único agente. $\bar{\varepsilon}$ es la elasticidad ε media ponderada y, como antes, tiene una relación inversa con el nivel del tipo óptimo:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\int_{\underline{B}}^{\infty}\int_{\underline{\omega}}^{\infty}\varepsilon_{B\omega}H_{B\omega}\,dF(B,\omega)}{\bar{H}};\ \bar{H}=\int_{\underline{B}}^{\infty}\int_{\underline{\omega}}^{\infty}H_{B\omega}\,dF(B,\omega) \quad (5.64)$$

η es el parámetro transformado al contexto de agentes heterogéneos, esto es:

$$\eta=\frac{1}{1-\int_{\underline{B}}^{\infty}\int_{\underline{\omega}}^{\infty}\tau\frac{\partial H}{\partial G}dF} \quad (5.65)$$

Análogamente, $1/\hat{\eta}$ es el inverso de η ponderado por la renta del primer período, siendo los factores de ponderación $\psi'\lambda_s$, mientras que $\hat{q}$ es la variable paralela obtenida a partir de q. Para completar la expresión, ζ mide la covariación normalizada entre el capital humano y la valoración social marginal de la renta, esto es:

$$\zeta=-\left[\int_{\underline{B}}^{\infty}\int_{\underline{\omega}}^{\infty}\left(\frac{H_{B\omega}}{\bar{H}}\right)\left(\frac{\psi'\lambda_s}{\bar{\lambda}}\right)dF(B,\omega)-1\right]>0 \quad (5.66)$$

Siendo $\bar{\lambda}$ el valor sombra medio de la renta. ζ mide pues la voluntad del gobierno de redistribuir, creciendo en valor conforme la función de bienestar social ψ se hace más cóncava y, por tanto, se ponderan más las rentas más bajas. Su signo positivo se debe a que la covariación entre capital humano y valoración social de la renta debe ser negativa, siempre que la política del gobierno tenga un tinte redistributivo. El parámetro alcanza un valor mínimo en 0 cuando el sesgo redistributivo de la política fiscal es nulo, caso en el cual $\psi'\lambda_s=\bar{\lambda}$, al producir la renta de todo agente la misma variación marginal en el bienestar social. A mayor valor absoluto de ζ , más alto será el tipo impositivo óptimo. En este sentido, la presencia de $\bar{\varepsilon}$ en la fórmula con signo contrario refleja el intercambio entre eficiencia y equidad que subyace a la fijación del tipo óptimo: cuanto más elevado sea este, mayor será la eficacia redistributiva pero más se erosionarán los incentivos a la acumulación de capital humano. Respecto a los restantes elementos que intervienen en la determinación del tipo óptimo, el segundo sumando del corchete representa el valor marginal de las transferencias: cuanto más distorsionantes sean estas, mayor será η en el numerador y, correspondientemente, más alto el tipo óptimo. Al mismo tiempo, cuanto más recaigan las restricciones de crédito sobre los individuos con mayores productividades en el aprendizaje, tanto más altos serán sus valores sombra de la renta, por lo que más reducido $\hat{\eta}$ y también mayor el tipo óptimo. Por último, $\hat{q}$ tiene una interpretación similar, solo que referida a las pérdidas de bienestar originadas por las restricciones de crédito, que ponderarán tanto más cuanto mejor dotados para el aprendizaje estén los agentes. Por lo demás, cuanto más severas sean las restricciones de crédito, para una determinada distribución conjunta F, tanto mayor será también $\hat{q}$ y τ .

Dos casos polares son especialmente interesantes en esta fórmula. Cuando la distribución de dotaciones y productividades colapsa hacia un agente homogéneo, la fórmula se convierte en la analizada antes: $\zeta = 0$, $\hat{\eta} = \eta$ y $\hat{q} = q$. Lo mismo sucedería cuando, aun siendo heterogéneos los agentes, el gobierno es indiferente a la desigualdad. Cuando no hay restricciones de crédito, $\eta = 1$ y $q = 0$, por lo que la ecuación toma la forma:

$$\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{\zeta}{\overline{\varepsilon}} \quad (5.67)$$

Esto es, a diferencia de lo concluido cuando el motivo estaba ausente de la acción del gobierno, el tipo óptimo sería positivo incluso cuando la acumulación de capital humano se convierte en un problema no restringido.

En resumen, en una economía de agente homogéneo la introducción de la imposición está justificada y aumenta el bienestar de los agentes privados, al aliviar mediante transferencias o impuestos negativos las restricciones de liquidez que la falta de acceso al crédito crea, aunque no está exenta de costes de eficiencia. Con agentes heterogéneos, situación que obviamente se aproxima más a la realidad, el cálculo del tipo impositivo óptimo tiene solución positiva, aunque está teñida de juicios subjetivos manifestados en la formulación de bienestar social, que desplaza a la maximización individual de la utilidad como función objetivo. De este modo, tipos óptimos para un gobierno con fuertes preferencias redistributivas pueden entrañar pérdidas de eficiencia tan severas que, para muchos agentes, ocasionen pérdidas de utilidad frente a una situación sin intervención; el resultado final de-

penderá en cualquier caso del grado de generalización de las restricciones de liquidez y de la ponderación que las preferencias del gobierno otorgan a las rentas de los individuos que las sufren en mayor medida. En este sentido, no se trata de una solución exenta de problemas y el conflicto entre eficiencia y equidad, al igual que en el resto de la teoría de la imposición óptima, está servido.

Otra rama de esta literatura se ha preocupado del **estudio de la imposición óptima en un contexto de restricciones crediticias endógenas**. El antes mencionado trabajo de Lochner y Monge-Naranjo (2002) justifica cómo, en un marco como este, las transferencias condicionadas a su utilización en educación tienen un efecto más potente que cuando las restricciones de crédito son puramente exógenas. Este argumento es fácilmente racionalizable en un modelo de restricciones endógenas como el estudiado antes, ya que, al ser el esfuerzo laboral exógeno y la inversión educativa verificable, los acreedores ven aumentar la posibilidad de colateralización de los créditos, por lo que tiende a disminuir el techo de crédito. Otros trabajos posteriores, como los de Andolfatto y Gervais (2006) o Jacobs y Yang (2010) derivan ya la estructura impositiva óptima. En una línea próxima al último se sitúa el de **Yang (2010)**, uno de los más completos en este área y que pone en cuestión supuestos como la observabilidad del esfuerzo educativo y la exogeneidad del tiempo de trabajo.

En este último trabajo, la estructura del modelo se inspira claramente en Jacobs (2002), por lo que nos centraremos exclusivamente en los aspectos diferenciales. Las preferencias se extienden a lo largo de dos períodos y tienen como argumentos tanto los consumos como, con signo negativo, la oferta laboral en el segundo período de vida, siendo las tres variables . A diferencia de Jacobs, no hay dotaciones de “capital social” utilizable en la inversión de capital humano ni una herencia genética común a todos los agentes que constituye su posición inicial en este activo; la consecuencia es que durante el primer trabajo la oferta de trabajo es nula, financiándose el agente con cargo a transferencias públicas y/o crédito. La acumulación de capital humano se lleva a cabo por medio de gasto educativo. Las restricciones presupuestarias de ambos períodos serán, por tanto:

$$C_s^s + x_s^h + b_{s+1} \leq g_s;\ b_{s+1} < 0 \quad (5.68)$$

$$C_{s+1}^s \leq (1-\tau) w\left(x_s^h\right) n_s^w - (1+r_s) b_s + g_{s+1};\ w' > 0;\ w'' < 0 \quad (5.69)$$

Los gastos educativos constituyen información privada, lo que implica que el salario del segundo período tampoco es observable, ni la oferta laboral en el mismo período. Para determinar el techo endógeno de crédito, debe partirse del hecho de que los bancos exigirán a los individuos como colateral una fracción υ de su renta disponible, excluidas las transferencias públicas (aunque estos no sepan exactamente a qué cantidad del numerario equivale la misma, ya que ni la formación ni el tiempo de trabajo son observables). Además, aquellos que impaguen deberán transferir al banco una cantidad fija F en concepto de costes de gestión en que incurre este último. De este modo, los costes de impago para el consumidor (c) son los siguientes:

$$c = \begin{cases} (1+r_s)b_{s+1} + F, \text{ si } (1+r_s)b_{s+1} \leq \upsilon(1-\tau)w\left(x_s^h\right)n_{s+1}^w \\ \upsilon(1-\tau)w\left(x_s^h\right)n_{s+1}^w + F, \text{ si } (1+r_s)b_{s+1} > \upsilon(1-\tau)w\left(x_s^h\right)n_{s+1}^w \end{cases} \quad (5.70)$$

El agente comparará la utilidad que le reporta pagar con la derivada de impagar y elegirá el vector de variables endógenas ligadas a la estrategia más ventajosa. Hay que tener en cuenta que la restricción flujo del segundo período para aquel que impaga es:

$$C_{s+1}^s + mín\left[(1+r_s)b_{s+1};\ \upsilon(1-\tau)w\left(x_s^h\right)n_{s+1}^w\right] + F \leq g_{s+1} \quad (5.71)$$

La restricción endógena de crédito $\bar{b}$ se impondrá en un nivel crítico que garantice la indiferencia entre el pago y el impago, conociendo las cpo de las agentes para cada opción. Así, se obtendría solucionando la siguiente ecuación que relaciona las funciones indirectas de utilidad V (y en las que el subíndice d se usa para denotar al agente que impaga):

$$V\left(\bar{b}, g_s, g_{s+1}, \tau, r_s\right) = V_d\left(\bar{b}, g_s, g_{s+1}, \tau, r_s, F, \upsilon\right) \quad (5.72)$$

Resolviendo el problema del agente que impaga, este se encuentra marcado por algunos rasgos característicos. Primero, $b_{s+1} = \bar{b}$. Segundo, $x_s^h > x_{sd}^h$, ya que de esta manera se reduce la cantidad a pagar en el segundo período; esto es, la inversión en capital humano de los impagadores es inferior. Por análogos motivos, $n_{s+1,d}^w < n_s^w$. En consecuencia, $C_{s,d}^s > C_s^s$ y $C_{s+1,d}^s < C_{s+1}^s$. De estos perfiles pueden deducirse además los efectos de los parámetros fiscales sobre el techo endógeno de crédito:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial g_s} > 0; \frac{\partial \bar{b}}{\partial g_{s+1}} < 0; \frac{\partial \bar{b}}{\partial \tau} <> 0 \quad (5.73)$$

Respecto a las transferencias, la del primer período favorece proporcionalmente más a los individuos que pagan, al ser su consumo inferior, por lo que tiene un efecto positivo sobre el límite crediticio. La del segundo, sin embargo, mitiga la penalización del impago, por no estar incluida en el colateral, por cuya causa endurecería la restricción de crédito. Los impuestos, no obstante, presentan un efecto ambiguo a consecuencia de un doble impacto en direcciones opuestas: por una parte incentiva el impago, al disminuir el valor del colateral, pero por otra penaliza más a los malos pagadores, ya que por ser el consumo en su madurez inferior, la utilidad marginal de su renta es mayor.

La determinación del tipo impositivo óptimo se realiza de nuevo maximizando la función indirecta de utilidad del agente homogéneo respecto a la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno. Se supone que no se realiza discriminación alguna de las transferencias por edades, de suerte que $g_{s+1} = g_s$. A partir de las cpo puede deducirse la siguiente ecuación, que sintetiza los factores que influyen en la conformación del tipo óptimo:

$$\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{\left(1-\eta_g\right)q\left(1+r_s\right)+\psi\left(\eta_g \frac{\partial \bar{b}}{\partial g}+\frac{\partial \bar{b}}{\partial \tau}\frac{1}{z}\right)}{\theta\varepsilon_{\tau x}+\varepsilon_{\tau n}} \quad (5.74)$$

El tipo impositivo, como ya sucediera en el modelo de restricciones crediticias exógenas, equilibra las consideraciones de pérdida de eficiencia y los beneficios sociales de una redistribución más flexible de la renta entre períodos. Los primeros costes se encuentran alojados en el denominador de la ecuación y se refieren a la repercusión del tipo sobre las decisiones de adquisición de inputs educativos y de oferta de trabajo ($\varepsilon_x, \varepsilon_n$ son las elasticidades compensadas de ambas variables respecto al tipo y θ la de la renta laboral respecto al gasto educativo).

En cuanto a los beneficios marginales presentes en el numerador, estos se componen de dos elementos: un primer sumando inherente a cualquier tipo de restricciones de crédito y un segundo específico de restricciones endógenas. El primero de ellos está compuesto por una medida de la distorsión generada por las restricciones de crédito no compensada por la capacidad del impuesto para financiar transferencias que la relajen. Así, la primera viene dada por el valor capitalizado de q -ver modelo de Jacobs-, al recaer los impuestos en esta variante solamente en el segundo período de vida, mientras que $\eta_g < 1$ es el incremento en la transferencia uniforme que puede lograrse con una unidad adicional de recaudación, homogeneizando la primera por medio de los valores sombra de la renta relativos; este primer factor tiene pues un papel análogo al del paréntesis $1-(1/\eta)+(q/\eta)$ en el modelo de Jacobs de agentes homogéneos, ausencia de redistribución y restricciones crediticias exógenas. El segundo sumando solamente es relevante cuando estas restricciones devienen endógenas y recoge, por un lado, el impacto del tipo impositivo y las transferencias que este financia sobre el techo crediticio y, derivadamente, el efecto de este cambio sobre el bienestar social (ψ es el valor marginal social de un cambio en la restricción de crédito) y se define como la suma de 3 variables: la relajación infinitesimal de la distorsión q, más dos efectos renta positivos propiciados por el efecto del aumento en el techo de crédito sobre la inversión en capital humano y la oferta de trabajo. **En definitiva, el tipo óptimo obedecerá a un conjunto más amplio de variables cuando las restricciones de acceso al crédito son endógenas**, al tener los parámetros fiscales consecuencias sobre la política óptima de los bancos de fijación de los límites de endeudamiento. Es importante subrayar que nada garantiza que el tipo impositivo sea superior con techo endógeno crediticio: si de la actuación neta de la autoridad fiscal el banco deduce que se incrementan los problemas de azar moral, con mayores incentivos al impago, disminuirá el límite de la posición negativa en el activo financiero, siendo de esta manera recomendable un menor tipo impositivo. **Podría suceder también que el tipo óptimo fuera negativo, en cuyo caso el sistema fiscal sería el inverso: impuestos de suma fija que financiarían subvenciones proporcionales a la renta laboral**. Esta aparente paradoja se explicaría por el hecho de que sus incentivos a una conducta más ortodoxa en el pago de la deuda se traducirían en una disminución de los techos por los bancos que más que compensaría la demanda inducida de crédito, aumentando así el bienestar. **En suma, la idoneidad de la imposición sobre la renta laboral no queda probada en el marco de estos modelos y, a mayores costes de supervisión y menor transparencia informativa, tanto más probable será que el tipo óptimo sea muy reducido o incluso negativo. Al margen de esta cuestión, los impuestos+subvenciones presentan algunos problemas como instrumento de promoción de la acumulación de capital humano, al exigir un conocimiento profundo de las preferencias de los individuos, la tecnología salarial o el grado de distorsión creado por las restricciones de crédito. Además, su eficacia puede verse alterada en marcos donde las decisiones educativas se adoptan por los progenitores y estos carecen de altruismo en sus preferencias, hay fenómenos de demostración en el consumo dentro de la función de utilidad o la heterogeneidad de los agentes impide, dado el tipo óptimo, generar un nivel de inversión suficientemente importante como para salir de un equilibrio autosostenido de pobreza. Las medidas de intervención en la provisión de la educación parecen por estas razones instrumentos complementarios de gran valor.**

Un último epígrafe obligado viene dado por los efectos de la intervención pública vía impuestos y subvenciones cuando el presupuesto no se equilibra período a período, sino que la emisión de deuda pública es posible. Partiendo del precedente de Lapan y Enders (1990), **Zhang (1997, 2003)** plantea un modelo de este tipo en un espíritu ricardiano, en el que no existe posibilidad de acceso al crédito (como en los modelos precedentes), aunque las conexiones intergeneracionales se concretan tanto en capital humano como en capital físico o deuda pública; como veremos, el efecto distorsivo de la deuda pública afecta a la elección relativa entre cantidad y calidad de los niños. En el modelo, las preferencias de los individuos, de 2 períodos de vida, son logarítmico-separables y dependen del consumo en la vejez así como del número de hijos; finalmente se estructuran en forma dinástica a través de una cadena de altruismo intergeneracional, del siguiente modo:

$$U_s = \ln C_s + \nu \ln N_s + \alpha \ln U_{s+1} \quad (5.75)$$

La fertilidad implica unos costes fijos de cuidado de cada niño en términos de tiempo, v, por lo que dada la dotación fija de tiempo en el segundo período de vida, la fertilidad se encuentra acotada superiormente por 1/v. El único uso alternativo del tiempo en el segundo período de vida es el trabajo, pero este queda determinado residualmente por el número de hijos: $n_{s+1}^w = 1 - vN_s$. La función de producción del bien compuesto es Cobb-Douglas de rendimientos constantes en el conjunto de capital físico y trabajo efectivo. Por lo que a la tecnología educativa respecta, presenta efectos externos en el capital humano medio, que interactúa con el paterno y el input de mercado en el proceso de acumulación a través de una estructura también Cobb-Douglas de rendimientos constantes:

$$a_{s+1}^h = B\left(x_s^h\right)^\gamma \left[\left(a_s^h\right)^\eta \left(a_s^h\right)_a^{1-\eta}\right]^{1-\gamma} ;0 < \eta, \gamma < 1 \quad (5.76)$$

El gobierno subvenciona la educación de las generaciones más jóvenes amparándose en el hecho de que las externalidades en la tecnología educativa no son debidamente internalizadas en los programas de optimización de los agentes. A este fin utiliza subvenciones a tipo constante, que operan sobre el coste del input de mercado. Asimismo hay dos tipos de impuestos: uno de suma fija y otro de tipo proporcional sobre el consumo. Finalmente, como segundo instrumento de financiación usa la deuda pública, de vencimiento a 1 período, cuando existen desfases entre la recaudación impositiva y la cuantía de las subvenciones: bonos del gobierno y capital físico se consideran sustitutos perfectos. Para facilitar el tratamiento analítico, la restricción presupuestaria del gobierno se considerará solamente en términos estacionarios. Finalmente, cada individuo recibe un legado en su juventud de su vida producto del ahorro durante su padre, que puede materializarse en capital físico o bonos del gobierno, y que devenga los correspondientes intereses o tasa de retorno equivalente.

En equilibrio general, si el coeficiente ligado a la fertilidad en las preferencias es lo suficientemente elevado, existirá una única solución interior en el número de hijos, en la que tanto esta última variable como la asignación del output entre uso alternativos (esto es, la ratio entre consumo y output, aquella entre gastos educativos y output, así como entre componentes del ahorro y output), es estacionaria. En cuanto al impacto de la deuda sobre las decisiones de los agentes, **el número de descendientes es decreciente en el volumen de deuda pública**, como en el mencionado trabajo de Lapan y Enders (1990) y Wildasin (1990) por un argumento de tipo ricardiano: en la medida en que una mayor deuda implica una carga futura de impuestos más elevada, los legados en forma de activos a las generaciones futuras aumentan, lo que implica un encarecimiento de los niños y por tanto una fertilidad más baja. Segundo, en una línea ricardiana, la fracción del stock de capital fisico sobre el output por trabajador no se ve alterada ante cambios en la deuda pública en circulación. Por análoga razón, la fracción de output que suponen los gastos educativos en los niños es insensible a la cantidad de deuda pública en circulación; de hecho capital físico y humano -para el total de niños- son dos vías asimilables de procurar el crecimiento de la renta a largo plazo de la dinastía, por lo que su comportamiento debe ser el mismo. Sin embargo, mientras se reduce el número de niños, aumenta la proporción de gasto por educativo sobre el output por niño; existe pues un desplazamiento desde la cantidad de niños hacia la calidad de los mismos.

Sobre la base de estos resultados es posible calcular el volumen óptimo de deuda pública reexpresando la función de utilidad del patriarca dinástico en función del volumen de deuda y maximizando dichas preferencias respecto a la restricción de recursos de la economía; este problema, hay que insistir, tiene sentido solamente en tanto en cuanto el capital humano “social” presenta efectos externos en el proceso educativo, ya que de lo contrario la emisión de deuda generaría siempre consecuencias negativas sobre el bienestar de la dinastía e impediría alcanzar la solución óptima social. El resultado del problema de optimización es un vector de valores para la deuda, el tipo de las subvenciones y el tipo del impuesto distorsionante sobre el consumo, ya que los tres instrumentos son complementarios para alcanzar el óptimo social. Por un lado, la deuda pública deja inalterada la fracción de gasto educativo sobre el output, que en ausencia de otros instrumentos seguiría por debajo de su nivel óptimo debido a las externalidades. Desde otro punto de vista, son las subvenciones las que logran aumentar esta última proporción de gasto en educación; sin embargo, es posible demostrar que si solamente se utilizan subvenciones entonces, aunque se puede reconducir la fracción de gasto educativo al óptimo social, la tasa de fertilidad sería superior a este último, al incentivar indirectamente este instrumento el coste por número de niño cuando la inversión en educación tiene una solución interior. Desde el tercer ángulo del problema, los impuestos sobre el consumo elevan el precio relativo de este con respecto al de la fertilidad, distorsionando las decisiones en favor de esta última: será necesario el efecto combinado de subvenciones y deuda para hacer descender esta aquella hasta su nivel óptimo.

El resultado de Zhang de la neutralidad del gasto educativo privado frente a variaciones en el volumen de deuda pública en circulación se debe al marco ricardiano de que el parte el modelo, en el sentido de que la deuda se mantiene sostenible en el tiempo mediante incrementos futuros de impuestos, manteniendo constantes las subvenciones educativas. Sin embargo **Greiner (2008)** rompe este patrón, manteniendo los impuestos constantes y efectuando los oportunos ajustes en el superávit primario mediante cambios en el gasto educativo del gobierno; de este modo, la política de gestión de la deuda interactúa más directamente que en el modelo de Zhang con las posibilidades de mantener una tasa de crecimiento a largo plazo de la economía. Adicionalmente, los gastos educativos públicos se combinan con el tiempo educativo consagrado por los agentes privados en la tecnología de acumulación, mostrando esta rendimientos constantes a escala, los mismos que presenta la función de producción agregada del bien final, que utiliza tiempo de trabajo efectivo y capital físico.

Cuando la deuda pública es sostenible, el modelo presenta un estado estacionario caracterizado por el crecimiento constante e igual de todo activo, incluyendo las dos clases de capital y deuda pública. El control de esta es garantizado por la siguiente regla de funcionamiento del superávit primario, igual a la recaudación impositiva menos los gastos en provisión de educación:

$$\frac{PS}{Y} = \phi + \psi \frac{B}{Y} \quad (5.77)$$

Donde B denota la deuda pública y PS el superávit primario. La sostenibilidad exige que, si el término constante es negativo, ψ sea superior a la diferencia entre el tipo de interés real y el crecimiento del PIB, mientras que si es positivo, la segunda relación se verifique en sentido contrario. De este modo, si $\phi > 0$ -esto es, si el gasto educativo aumenta conjuntamente con el PIB, haciendo deteriorarse el saldo primario-, la sensibilidad de este frente a la variación de la deuda deberá ser suficientemente importante como para hacer compatible crecimiento sostenido a largo plazo y sostenibilidad, ya que de lo contrario el primero se truncará para evitar una trayectoria de no-Ponzi en el sector público. Si la situación es la contraria, la sensibilidad del superávit primario deberá ser lo bastante baja como para no estrangular el crecimiento a largo plazo, ya que entonces la deuda presentará una trayectoria decreciente que solo podría constituir un estado estacionario mediante una contracción del PIB. **Por tanto, cuando no rige la equivalencia ricardiana la política educativa no puede ser independiente de la regla fiscal si se desea garantizar el crecimiento a largo plazo; caso contrario, solo podrá lograrse este con una posición acreedora del gobierno que permita financiar la inversión en capital físico.**

V.4. Educación pública. Fundamentos y efectos.

En la discusión sobre la idoneidad de los sistemas de provisión pública de educación, la mayor parte de los trabajos se centran principalmente en las variables de

crecimiento y reducción de la desigualdad como principales factores comparativos con los sistemas privados. El trabajo clásico por excelencia dentro del estudio de los efectos de la provisión pública versus privada de educación es **Glomm y Ravikumar (1992).** En él se combina la posibilidad de crecimiento endógeno en un marco OLG en el que la intervención pública se concreta en la mejora de un parámetro específico de la función de producción de capital humano, la calidad de la tecnología de formación. Los agentes viven a lo largo de dos períodos. La acumulación de capital humano en el primero de ellos se realiza tanto a partir del stock de los progenitores, como de los legados indirectos de estos últimos en forma de inversión en calidad de la tecnología de aprendizaje (E). El proceso de formación queda sintetizado en la siguiente función de inversión bruta en capital humano:

$$i_s^h = B(E_s)^\eta \left(a_s^h\right)^\varepsilon \left(n_s^h\right)^\gamma ; \eta,\varepsilon,\gamma \in (0,1) \quad (5.78)$$

Esta función se combina con el supuesto habitual en OLG sobre tasa de depreciación unitaria del capital humano -esto es, el capital no sobrevive a la cohorte, aunque juega su papel en la transmisión de conocimiento a la siguiente generación antes de destruirse-. Teniendo en cuenta este supuesto, la tasa de crecimiento del activo adopta la siguiente especificación:

$$\frac{a_{s+1}^h}{a_s^h} = B(E_s)^\eta \left(a_s^h\right)^{\varepsilon-1} \left(n_s^h\right)^\gamma \quad (5.79)$$

Desde la perspectiva del crecimiento a largo plazo en el modelo, la calidad del sistema educativo E juega un papel importante a la hora de garantizar el crecimiento a largo plazo, toda vez que el capital humano está sujeto a rendimientos decrecientes. La variable calidad, que la mayor parte de la literatura subsume en la productividad total de los factores, se individualiza para destacar su carácter endógeno e importancia, testificada por trabajos como el de Card y Krueger (1992) o Berkowitz y Hoekstra (2011). Dados los supuestos efectuados sobre las elasticidades de los inputs en la función de aprendizaje, pueden aparecer no convexidades en la tecnología educativa, aunque no a consecuencia de efectos externos à la Lucas, sino producto de una variable cuyas consecuencias son íntegramente consideradas en el momento en que se resuelve el problema de optimización; en este sentido no se aprecian diferencias entre el problema descentralizado y el del planificador.

En cuanto a la secuencia de las decisiones, durante la juventud se destina tiempo a aprendizaje y a ocio y no se trabaja; más tarde, durante la madurez no se aplica ninguna fracción de tiempo al ocio y se aplica inelásticamente toda la dotación de tiempo disponible al trabajo en el sector de mercado. Además, durante este segundo período se consume y se destinan recursos al legado de capital humano. Las preferencias, logarítmico-aditivas, dependerán del consumo, el tiempo de ocio y los legados a la generación posterior. Finalmente, se admite la posibilidad de que los agentes sean heterogéneos, con una función de probabilidad acumulada en la generación s-1 G_{s-1} logarítmico-normal (de media μ_{s-1} y distribución típica σ_{s-1}) que gobierna la distribución del capital humano entre los miembros de cada generación. Esta es por tanto una fuente de diferencias intergeneracionales en la renta de carácter aleatorio , en la línea de admitían Becker y Tomes (1979).

Formulados estos supuestos, **el modelo se resuelve bajo dos regímenes alternativos: de educación pública y de educación privada. En la versión de educación pública**, la calidad del sistema educativo se decide mediante "votación" de todos los agentes en el segundo período de su vida. En concreto, la financiación del nivel educativo se lleva a cabo mediante impuestos proporcionales sobre el nivel de capital humano del período, como proxy de la renta salarial. Esto es:

$$C_{s+1}^{s} \leq \left(1-\tau_{s+1}\right) a_{s+1}^{h};\ E_{s+1} = \tau_{s+1}\bar{a}_{s+1}^{h};\ \bar{a}_{s+1}^{h} = \int a_{s+1}^{h}\, dG\left(a_{s+1}^{h}\right) \quad (5.80)$$

El tipo impositivo endógeno se recauda, por tanto, sobre la esperanza del stock de capital humano en el período s+1, que a su vez se construye teniendo en cuenta dG, la función de densidad derivada de la distribución de probabilidad G. El valor esperado del capital humano adquirido por la generación nacida en s se calcularía teniendo en cuenta la distibución que sigue el stock de los padres y que fue transferido a los hijos a través del correspondiente proceso educativo en el período s. En este régimen público, los agentes, sustituyendo su restricción presupuestaria en su función de utilidad, maximizan en el tiempo de aprendizaje n_s^h y el consumo C_{s+1}^s la siguiente expresión:

$$\ln\left(1-n_s^h\right)+\ln\left(1-\tau_{s+1}\right)\left[B\left(E_s\right)^{\eta}\left(a_s^h\right)^{\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{\gamma}\right]+\ln\tau_{s+1}\bar{a}_{s+1}^h\ . \quad (5.81)$$

Dada la aditividad de la función de utilidad y su estructura logarítmica, el ocio óptimo en s podrá calcularse independientemente del tipo impositivo óptimo, aunque el consumo en el período de madurez quedará en función de aquel. Al comienzo de s+1 se maximizará en el tipo impositivo $\ln\left(1-\tau_{s+1}\right)\left[B\left(E_s\right)^{\eta}\left(a_s^h\right)^{\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{\gamma}\right]+\ln\tau_{s+1}\bar{a}_{s+1}^h$ y quedará determinada automáticamente la calidad del sistema educativo que se transfiere a la siguiente generación, nacida en s+1, así como el consumo del período. **Dada la estructura logarítmica de las preferencias y la ponderación igual que en las mismas recibe el consumo y los legados educativos, el tipo impositivo será independiente de la renta de los adultos, de modo que $\tau = 1/2$.**

En el régimen educativo privado, todas las variables endógenas se eligen por el agente en el primer período de su vida. En este caso cabe entender la calidad del proceso educativo como una transferencia de recursos a realizar por los adultos, que pasará a formar parte directamente de la función de producción de capital humano sin mediación alguna del sector público. Como en el régimen público, el gasto en consumo y en calidad de la educación durante s+1 reciben 1/2 de la renta disponible, solo que en esta ocasión el legado que recibe cada cohorte depende directamente de la renta de sus progenitores (no la proporción, sino la cantidad total). Así, los hijos de los familias con mayor capital humano serán proporcionalmente más beneficiados en el régimen privado, al primar en el régimen público para todos los individuos la misma calidad, resultante de aplicar un tipo impositivo común sobre la media del capital humano en un periodo.

El hecho de que este resultado se conozca desde el comienzo del período s permite que se utilice en la optimización respecto al tiempo de ocio, de modo que el efecto de una mayor inversión en capital humano sobre los legados futuros quede internalizado en la decisión de inversión en este activo. **La consecuencia es que en el sistema educativo privado el tiempo destinado al aprendizaje en s es superior al régimen de educación pública**, ya que los individuos consideran que cada unidad adicional acumulada de capital humano revertirá no solo en su renta futura, sino también en el legado a la próxima generación vía calidad del sistema educativo. En contraste, en el régimen público el pago basado en la contribución a la calidad de futuras generaciones se diluye, ya que la calidad depende de la media del capital humano futuro, cuya determinación escapa al control del hogar individual. Desde el punto de vista de la construcción de la tasa de retorno, la estructura temporal del modelo asegura que el tipo impositivo reduce el pago de la inversión en capital humano en su componente de renta salarial, sin que afecte simultáneamente el coste, por lo que la tasa es inequívocamente menor. **Este resultado se debe a la secuencia de las decisiones empleada, ya que al no trabajarse en el primer período el único coste de oportunidad del tiempo de aprendizaje viene dado en términos de la utilidad marginal del ocio sacrificada.** Sin embargo, el rasgo anterior no es el causante de la asignación de más tiempo de aprendizaje en el régimen privado, ya que sea por vía impositiva o libre, existe un descuento de un 50% de renta marginal máxima del capital humano en términos salariales a consecuencia del desvío de esta hacia gasto en calidad de la educación.

La comparación de las asignaciones resultantes en los regímenes público y privado puede hacerse en el mismo marco analítico suponiendo homogeneidad o heterogeneidad en la distribución del capital humano entre generaciones, sin más que reducir a cero en el primer caso su varianza. En este caso pueden compararse los estados estacionarios de los dos regímenes de provisión educativa sin necesidad de imponer condiciones a la distribución inicial de capital humano en la generación de los padres. Con independencia del tipo de rendimientos, **el nivel del stock de capital privado será siempre superior a la del público**. La razón estriba en que, mientras la calidad óptima E será la misma en uno que en otro, el tiempo de formación será mayor en el sistema privado por la razón apuntada anteriormente. El nivel de bienestar también será superior bajo un sistema educativo privado. Este resultado se condensa en las siguientes ecuaciones dinámicas del capital humano, representativas respectivamente del régimen privado (con superíndice pr) y público (superíndice p):

$$a_{s+1}^{h,pr} = A^{pr}\left(a_{s+1}^{h,pr}\right)^{\varepsilon+\eta} \quad (5.82)$$

$$a_{s+1}^{h,p} = A^{p}\left(a_{s+1}^{h,p}\right)^{\varepsilon+\eta};\ A^{pr} > A^{p} \quad (5.83)$$

A se deriva tras sustituir el valor óptimo del tiempo de aprendizaje en la ecuación de acumulación y combinarlo con los restantes parámetros. Obsérvese que, partiendo de un stock inicial homogéneo, los niveles son superiores siempre en el régimen privado **para un mismo período**. No obstante, las dos asignaciones admiten también una comparación en términos de tasas de crecimiento y de niveles/tasas de acumulación estacionarias. Comenzando por las tasas de crecimiento, es inmediato comprobar si $\varepsilon+\eta=1$ (situación equivalente a rendimientos constantes en capital humano), la tasa de acumulación siempre será superior en el régimen privado, siendo la diferencia relativa constante en el tiempo. Si $\varepsilon+\eta>1$ (rendimientos crecientes), la diferencia será creciente en el tiempo y también favorable al sector privado. Al contrario, con rendimientos decrecientes dados por $\varepsilon+\eta<1$ el cociente entre ambas tasas de acumulación será decreciente y, en el límite, coincidirán. En paralelo pueden extraerse conclusiones sobre la dinámica en estado estacionario, teniendo en cuenta la tipología de equilibrios de esta clase que pueden obtenerse con los diversos rendimientos. Con rendimientos constantes, la tasa de crecimiento es constante, quedando caracterizada su diferencia por la relación derivada antes, favorable al régimen privado. Con rendimientos decrecientes y crecientes existirá un stock de capital estacionario constante, si bien en el primer caso será globalmente estable y en el segundo, inestable. En cualquier caso la extracción de la solución general de las anteriores ecuaciones en diferencias revela que con rendimientos decrecientes el stock privado será superior al público, relación que se invierte con rendimientos crecientes. Esta aparente contradicción con la prelación de stocks en el régimen privado se explica porque la comparación de los equilibrios estacionarios no se realiza para el mismo período, puesto que las ecuaciones dinámicas en el espacio $\left(a_s^h, a_{s+1}^h\right)$ cortan la bisectriz para abscisas diferentes.

Con agentes heterogéneos respecto a la distribución inicial de capital humano, en un régimen público la aplicación de la distribución logarítmico-normal a la senda de acumulación de capital humano permite llegar a la siguiente relación:

$\sigma_{s+1}^2 = \varepsilon^2 \sigma_s^2$ (5.84)

Por tanto, la desigualdad se reducirá constantemente a lo largo del tiempo hasta hacerse -asintóticamente- nula, puesto que la elasticidad del capital humano en la función de aprendizaje es inferior a la unidad. Sin embargo, en un sistema educativo privado los resultados dependerán del tipo de rendimientos, ya que aplicando la misma operación:

$\sigma_{s+1}^2 = (\varepsilon + \eta)^2 \sigma_s^2$ (5.85)

El hecho de que el coeficiente que liga ambas varianzas sea mayor en este caso procede de la diferente financiación de E en cada régimen. En el público, la base impositiva sobre la que actúa el tipo constante y se financia la calidad escolar es la media del nivel de capital humano, esto es, un parámetro desde la perspectiva del hogar individual, pero en el privado es idéntica proporción de la renta laboral familiar. Por ello es lógico que en el régimen público la única influencia sobre la acumulación del capital humano en el período anterior se produce a través de su elasticidad directa en la función de acumulación. Bajo el régimen privado, sin embargo, la persistencia del capital humano en ausencia de crédito es mayor, al extender el capital humano de los padres su influencia hacia el futuro por una doble vía: sus rendimientos directos y su impacto indirecto a través de E, toda vez que esta variable es proporcional a la renta salarial de la fase adulta. En estas circunstancias, la desigualdad disminuirá con el tiempo si los rendimientos del capital humano -considerando ahora tanto la variable de calidad educativa como el propio stock- son decrecientes, aumentará si los rendimientos son crecientes y permanecerá constante si nos encontramos ante rendimientos constantes a escala. **Hay que notar que, aunque los rendimientos del capital humano sea decrecientes, la velocidad a la que disminuye la desigualdad en el régimen público es superior a la que lo hace en el privado**.

También bajo agentes heterogéneos pueden compararse los stocks de capital humano alcanzables en los dos regímenes. Es el caso de una economía con rendimientos decrecientes, dado que en los dos regímenes la desigualdad acaba desapareciendo con el tiempo, asintóticamente su comportamiento comparativo se equiparará al de agentes homogéneos, con un stock de capital humano superior en el sistema privado. Sin embargo, para el mismo grado de dispersión inicial de las rentas, si los rendimientos en el capital humano son suficientemente decrecientes al menos durante algunos períodos el nivel de capital humano (y con ello la renta per cápita) que proporciona el régimen público puede ser superior a corto plazo.

Complementando al trabajo anterior, la literatura sobre estratificación social introduce efectos externos de ambiente en el proceso de acumulación de capital humano, en la línea de Lucas pero restringidos a la comunidad más próxima en la que se desenvuelve el individuo; aquellos hacen que resulte ventajoso para las familias más pudientes la residencia en comunidades donde viven otros individuos de características similares, introduciendo un sesgo hacia la heterogeneidad en la distribución inicial del capital humano, haciendo bascular la idoneidad de regímenes educativos hacia el público en un número importante de situaciones. Trabajos relevantes dentro de esta rama son los de Borjas (1992, 1995), Benabou (1993,1994,1996) y Durlauf (1994,1996).

Por tomar el más representativo de todos ellos, **Benabou (1996)**, en un modelo de equilibrio general estocástico con generaciones sucesivas y familiar estratificadas en comunidades, matiza las conclusiones de Glomm y Ravikumar -modelo con el que presenta similitudes formales importantes- en cuanto al tipo de régimen educativo que genera una tasa de crecimiento superior a largo plazo. La discusión no se centra tanto en la elección entre un régimen público y otro privado sino, como se verá más adelante, en un régimen educativo con connotaciones redistributivas o en otro con estricta proporcionalidad sobre la renta de cada familia que, en última instancia, replica las características de un sistema privado. La incertidumbre procede de shoks estocásticos normalmente distribuidos (con esperanza unitaria) en la tecnología educativa que, representativos de la heterogeneidad entre agentes, se producen a consecuencia de las diferentes habilidades innatas de las nuevas generaciones (a diferencia de Glomm y Ravikumar, en que el componente aleatorio radicaba en la distribución del capital humano al comienzo de la vida de los individuos, pero la maximización de la utilidad se realizaba en condiciones de certidumbre una vez conocido el capital humano inicial). A lo largo del único período de vida de los agentes, estos consumen, trabajan, dedican tiempo a la educación de su único descendiente y pagan impuestos; de hecho la intervención del gobierno en el régimen público se sustancia en la aplicación de inputs educativos financiados mediante impuestos proporcionales sobre la renta, la cual adopta una distribución diferente dentro de la comunidad en la que vive cada familia en un período determinado. La provisión de inputs educativos se realiza, alternativamente, sobre la base de los impuestos recaudados en el interior de cada comunidad o a escala nacional. La función de acumulación de capital humano tiene la estructura habitual Cobb-Douglas y sobre el conjunto de los inputs actúa multiplicativamente, reforzando a la productividad multifactorial, el shock aleatorio. En cuanto al resto de los inputs, interviene de nuevo E (calidad educativa), como el Glomm y Ravikumar, así como tiempo destinado a la educación por los padres en términos de eficiencia, esto es, afectado por su stock de capital humano. Los rendimientos son constantes en el conjunto de los inputs y decrecientes inividualmente. Las preferencias, estructuradas dinásticamente en un horizonte infinito, depende solamente del consumo de cada cohorte y adoptan una especificiación logarítmico-aditiva. Los impuestos se eligen por votación y, como se verá más adelante, serán constantes en el tiempo, al igual que en Glomm y Ravikumar, e implican también la constancia del tiempo de trabajo.

La estructura del sector productor es competitiva y, la del mercado de trabajo, de competencia monopolística[197]. Cada empresa utiliza un continuo de inputs intermedios x o tareas en la producción del bien compuesto, conforme a la función:

$$Y_s = \int_0^\infty \left[\left(x_s^i \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (5.86)$$

Se supone que cada trabajador se especializa en la producción de un input intermedio y que dicha función de producción es igual a la fracción de su capital humano empleado en el trabajo de mercado. Además, la producción agregada en cada comunidad dependerá tanto del capital humano local como de la distribución de capital humano del conjunto de la economía, revelando esta especificación interacciones entre las habilidades de los miembros de la sociedad, que complementan a las capacidades individuales. Este supuesto, siendo G^i la distribución de capital humano de la comunidad y G la del conjunto de la fuerza de trabajo de toda la economía, permite reformular la producción local como:

$$Y_s = n^w \left(\bar{a}_s^h \right)^{\frac{1}{\sigma}} \int_0^\infty \left(a_s^h \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dG^i\left(a_s^h \right);$$

$$\bar{a}_s^h = \left[\int_0^\infty \left(a_s^h \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dG\left(a_s^h \right) \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (5.87)$$

Análogamente, la renta salarial de cada trabajador que habita la economía dependerá, por un lado, de su propio capital humano y, por otro, del stock agregado del conjunto de la economía. Teniendo en cuenta que la financiación del componente público de la educación se realiza a través de la recaudación de impuestos en el seno de la comunidad, y, por tanto, depende de la renta per cápita dentro de esta, el input educativo público la acumulación de capital humano en el interior de cada comunidad dependerá de tres elementos: el capital humano familiar, el nacional y el interior de cada comunidad (estos últi-

[197] Este supuesto no es fundamental en el resultado y podría ser sustituido por cualquier otro que generara una relación entre los inputs intermedios y el capital humano de los hogares.

mos a través del canal de la producción de la comunidad, que con beneficios nulos se canalizará íntegramente hacia las rentas salariales).

Bajo estos supuestos generales se comparan las tasas de crecimiento en una economía con segregación -esto es, en la que los individuos de niveles de renta similares tiendan a agruparse en comunidades homogéneas- o aleatoriamente heterogénea. En este último caso, la heterogeneidad plantea ventajas a los menos formados e inconvenientes a los más, por las diferencias resultantes en su remuneración respecto a una distribución alternativa homogénea. Cada uno de estos regímenes se asocia a su vez con una fórmula educativa diferente. El sistema integrado, con un modelo de financiación pública a escala nacional, que no establece condiciones discriminatorias entre comunidades y permite que se equipare el nivel esperado de renta per cápita en cada una de ellas. El sistema segregado se asocia con un modelo educativo descentralizado, con posibilidades distintas en función de comunidades “pobres” o “ricas”, que por lo demás tienden a agruparse entre sí en función de sus posibilidades de contribución a uno u otro tipo de servicios.

En cada uno de estos sistemas, las funciones de acumulación de capital humano, definidas conforme se explicó antes, desembocan en una expresión diferente. En la economía “mixta” integrada la renta per cápita esperada de cada comunidad será la misma; por ello, el stock futuro de capital humano dependerá del término específico de cada individuo, el nacional y uno a escala local, que pasará a ser un valor homogéneo, el stock de este activo a escala agregada y la distribución media de la renta nacional. Mientras, en la economia segregada la renta media de cada comunidad se corresponderá con el stock de capital humano del agente representativo de dicha comunidad, por lo que $a_{s+1}^{h,i}$ dependerá de un término específico (que agrupa los exponentes del stock individual y de la renta per cápita media de la comunidad, ahora diferente entre comunidades) y el stock agregado. **Comenzando por el corto plazo**, la diferencia entre la tasa de crecimiento alcanzable en el sistema integrado depende de dos factores. El primero de ellos es la suma de los exponentes de los componentes específicos (familiares y locales) en la función de acumulación. En este sentido, **la tasa de crecimiento del modelo integrado (o público puro), dado una estructura de ponderación de stocks de capital humano sociales, tendrá mayores posibilidades de generar un mayor crecimiento cuanto más alto sea en la función de aprendizaje los rendimientos de la externalidad de entorno frente a los de los componentes específicos**. En efecto, cuanto menores sean estos últimos (o más cóncava respecto al capital humano específico sea la función de acumulación), tanto más ganarán los individuos de las comunidades más pobres al pasar al entorno integrado y tanto menores en relación con las ganancias anteriores serán lás pérdidas de los individuos de las comunidades más ricas al contar con aportaciones locales del capital humano más bajas de las iniciales. Implícitamente Becker (1981), al considerar eficiente la estratificación en la ordenación familiar y del matrimonio se situaría en un escenario de escasa concavidad o linealidad en el capital humano específico, aunque el resultado opuesto también es posible. El segundo elemento es el grado de complementariedad de los inputs dentro de las comunidades: cuanto menor sea este, tanto más favorable la integración desde la perspectiva del crecimiento. Ambos elementos deben ser considerados conjuntamente: por ejemplo, rendimientos constantes en el capital humano específico forzarían a un grado de complementariedad negativo entre los inputs locales para que pudiera existir una ventaja de crecimiento a favor del sistema integrado.

Quizá el aspecto más importante de este resultado a corto plazo es que de algún modo engloba el de Glomm y Ravikumar para agentes heterogéneos y rendimientos decrecientes, en el que para un grado de rendimientos decrecientes como el que exige la proposición de Benabou (y una media aritmética de los capitales humanos sociales como procedimiento de agregación del capital de la economía) genera crecimientos del capital humano superiores en un modelo de educación pública -que sería el término equivalente a la economía integrada en Benabou-. La diferencia entre ambos modelos es que en el de Glomm y Ravikumar la distribución de la renta acaba por hacerse degenerada, al ser determinística la función de aprendizaje y cancelarse todas las desigualdades de renta asintóticamente bajo rendimientos decrecientes; en Benabou, al ser estocástica la tecnología de acumulación, esta convergencia total no llega a producirse.

En efecto, **dirigiendo ahora el foco hacia el largo plazo**, y denominando Φ a la diferencia en crecimiento a corto plazo del sistema integrado, ahora los rendimientos totales (tanto del stock específico como del nacional) pasan a ser la variable esencial para determinar la convergencia entre ambos sistemas. Suponiendo que las únicas diferencias entre individuos se debieran la distribución inicial de capital humano en el momento inicial entre comunidades y que la varianza del parámetro estocástico de habilidades fuera nulo, si los rendimientos en la acumulación fueran decrecientes tales diferencian acabarían anulándose asintóticamente, de modo que el gap entre el sistema integrado y el segregado desaparecería; no obstante, si fueran constantes convergerían a una medida positiva, que dependerá negativamente de la complementariedad entre los inputs locales. El matiz de este resultado respecto al de Glomm y Ravikumar es que los efectos externos dados por el stock nacional hacen que incluso con rendimientos constantes la diferencia se reduzca, mientras que en el trabajo de los primeros autores permanecía constante durante todo el horizonte. Cuando además de las diferencias en el capital humano inicial de las comunidades el parámetro estocástico de habilidades del individuo tiene una varianza positiva, esta se traslada a diferencias que interactuarán con el gap entre los dos sistemas cuando los rendimientos son constantes. Por el contrario, si los rendimientos son decrecientes la varianza de la capacidad innata afectará a los niveles de renta a largo plazo, pero el crecimiento de ambos sistemas volverá a converger asintóticamente, diluyéndose por completo la dispersión en capital humano[198].

La visión de Benabou (y la literatura sobre efectos de entorno asociada) y la de Glomm Ravikumar son en cierto modo complementarias, aunque la estructura de sus modelos presente diferencias. Un primer elemento en común de ambas ramas es la ausencia de mercados de capital para financiar los gastos educativos, lo que evita soluciones à la Becker y Tomes que alisen el perfil de la inversión en capital humano entre generaciones para paliar las desigualdades entre individuos; esta será una nota distintiva de la mayor parte de la literatura sobre la relación entre políticas y educativas, crecimiento y desigualdad.

Aparte de esta característica, para comparar los resultados es de utilidad clasificar las diferencias entre individuos entre aquellas de origen y las surgidas a lo largo de sus trayectorias de equilibrio. Cuando no hay ninguna diferencia, la educación privada es netamente superior. Cuando las únicas diferencias se plantean en los niveles de capital humano iniciales (o, alternativamente, en los niveles medios de las comunidades estratificadas) la evolución de la desigualdad dependerá de los rendimientos de la función de acumulación de capital humano: si son decrecientes (o suficientemente decrecientes, en Benabou), asintóticamente tenderán a desaparecer las desigualdades de partida, aunque al menos a corto plazo las tasas de crecimiento que proporciona la educación pública son mayores en ambos modelos. Cuando los rendimientos son constantes, si a corto plazo la

[198] **Davies y Zhang (2005)** analizan la evolución de la movilidad social en un modelo à la Benabou, con efectos externos de entorno en las diferentes comunidades y productividad individual estocástica en el aprendizaje. Así, definiendo esta como el inverso de la correlación entre el capital humano de padres e hijos dentro de una comunidad, concluyen que, al igual que la desigualdad, aquella converge a largo plazo hacia su valor estacionario, que es mayor en un régimen de educación pública. La razón es que el carácter uniforme del input educativo proporcionado a los niños debilita la ligazón con el capital humano de los padres. Fernández y Rogerson (1998) llevan a cabo una simulación en el estado estacionario de un modelo similar, obteniendo análogas conclusiones; es más, cuando la influencia del capital humano paterno se hace nula, la movilidad social alcanza su punto máximo. Obviamente este argumento es un arma de doble filo, ya que la calidad de la educación pública se hace esencial en el caso de las familias que parten de un stock de capital humano elevado, por cuanto que la influencia paterna se diluye.

educación pública proporciona más crecimiento, esta diferencia se mantendrá en mayor o menor medida a lo largo de todo el horizonte, aunque puede darse el caso de que sea la educación “estratificada” o privada la que se muestre más eficiente y proporcione una tasa de crecimiento superior, en la línea del *Treatise on Family* de Becker. Por lo tanto, mientras con rendimientos decrecientes la educación pública puede proporcionar con mayor probabilidad resultados a corto plazo, con un papel nulo a largo, con rendimientos constantes la prescripción es mucho más ambigua. Si además existen diferencias que surgen en momentos posteriores al inicio de la senda, como las debidas a los coeficientes estocásticos de productividad de Benabou, con rendimientos constantes estas pueden aumentar el gap entre el sistema público y el estratificado/privado. En el capítulo 6 se propone un marco de agentes heterogéneos en que estas diferencias en la productividad del aprendizaje son deterministicas y permanentes, generando divergencias crecientes con rendimientos constantes a escala en todos los inputs de la función de aprendizaje. **Este último tipo de escenarios tienden a constituir un fundamento más claro para la educación pública, en ausencia de mecanismos sociales descentralizados de corrección de las externalidades de entorno o de transferencias voluntarias de rentas de unos individuos a otros**. Aparte de este tipo de consideraciones, los costes de la misma deben ser también cuidadosamente analizados.

Fertilidad endógena. Dentro de la línea de modelos que evalúan los efectos de la provisión pública de educación, se encuentran algunos que introducen, como factor adicional de heterogeneidad entre agentes, además de una distribución desigual del capital humano inicial, tasas de fertilidad endógenas diferentes. La fertilidad diferencial en general tiende a acentuar los efectos beneficiosos de los regímenes educativos con financiación pública sobre la desigualdad de los individuos, ya que los hogares menos favorecidos tienden a sustituir inversión en capital humano de sus miembros por mayor fertilidad, lo que agrava el desequilibrio en la acumulación de este factor en términos per cápita. Esta clase de modelos entroncan también con las teorias sobre transición demográfica que se comentaron en la segunda parte del capítulo 2. **Dos son los esquemas teóricos más notables utilizados para la comparación de los regímenes privados públicos: los de De la Croix y Doepke (2004), que plantea a largo plazo un trade-off más crudo entre igualdad y crecimiento en el régimen público, y el Fang y Zhang (2013), con un balance más ambiguo entre ambos sistemas y en general más favorable hacia el régimen público.**

Dentro de este enfoque uno de los planteamientos con más éxito ha sido el de **De la Croix y Doepke (2004**), que consideran un mundo poblado por agentes altruistas que viven dos períodos, en el segundo de los cuales toman decisiones de consumo, número de descendientes y dotación de capital humano de cada uno de ellos. Las preferencias, que reflejan un grado de altruismo intermedio y alcanzan solamente a la siguiente generación, se estructuran del siguiente modo:

$U = \ln C_s^{s-1} + \psi \ln\left(N_s a_{s+1}^h\right)$ (5.88)

El tiempo se divide en dos posibles usos: cuidado de los niños, que comprende una proporción fija v del tiempo y tiempo de trabajo en la producción de mercado, de manera que la restricción presupuestaria por período adopta la forma:

$C_s^{s-1} + \left(a_s^h\right)_a x_s^h N_s \leq a_s^h \left(1 - vN_s\right)$ (5.89)

Implícitamente en esta restricción los salarios reales son unitarios, circunstancia que queda explicada, como se verá más adelante, por el hecho de tener una función de producción del bien final que depende linealmente y con coeficiente de proporcionalidad unitario del trabajo efectivo existente en la economía. La educación es proporcionada a los niños mediante profesores, que son alquilados por las familias y se retribuyen -como el resto de trabajadores- conforme a su capital humano, que coincide con el nivel medio del existente en la sociedad. Por lo tanto el input x debe interpretarse en este contexto como número de horas contratadas a los profesores. La tecnología de aprendizaje depende del material educativo proporcionado por los padres, su capital humano y el del profesorado. Los rendimientos a escala son constantes en el conjunto del capital, incluyendo tanto el privado como el procedente de la externalidad positiva, con lo que se evitan problemas de multiplicidad de sendas estacionarias. Con estas premisas la ecuación de acumulación adquiere la forma:

$a_{s+1}^h = B\left(\theta + x_s^h\right)^\gamma \left(a_s^h\right)^\varepsilon \left(a_s^h\right)_a^{1-\varepsilon};\ \theta > 0;\ 0 < \varepsilon, \gamma < 0$ (5.90)

La poblacición se divide en dos grupos, A y B, que se diferencian entre sí por su nivel de capital humano de partida (A tiene menos que B). No existe movilidad intra grupo. Cada uno de los grupos tiene un tamaño inicial, que evolucionará conforme a la fertilidad endógena de cada una de ellos. El capital “medio” que crea la externalidad en el sistema educativo es una media ponderada del stock de cada grupo en un momento dado. El trabajo efectivo en el conjunto de la economía también es una media ponderada del tiempo disponible por cada individuo después de descontar su asignación a la educación de sus niños y el tiempo exógeno dedicado a su cuidado.

En estas condiciones se comparan las asignaciones resultantes de dos regímenes: uno competitivo descentralizado, en el que las decisiones óptimas de los individuos determinan exclusivamente el movimiento del capital humano, y otro de educación pública. Para poder comparar los dos regímenes, se define para cada uno de los dos grupos el nivel relativo de capital humano respecto a la media de la economía (X).

En el de educación privada la fertilidad óptima es decreciente respecto al nivel de capital humano: en este sentido, las familias que tengan un mayor nivel de capital humano verán más productiva esta clase de inversión, por lo que invertirán más en la calidad que en la cantidad de sus descendientes. Este resultado puede justificarse también pensando que, a mayor capital humano, el coste de la crianza de los niños es superior, por lo que aumenta el coste de la fertilidad; en sentido contrario, un mayor nivel de capita humano implica una mayor productividad en la educación de los niños, lo que incentiva a acometer este tipo de inversión. Existen dos posibles soluciones de equilibrio general en el gasto educación para el grupo A, una interior y la otra esquina. Esta última constituye una trampa de crecimiento en la que la inversión en capital humano se hace cero, agotándose dentro él la relación de intercambio entre la adquisición del input educativo y el número de descendientes. No obstante, este tipo de equilibrio puede evitarse siempre que el capital relativo inicial entre los dos grupos sea superior a cierto umbral.

En el régimen público el gobierno, bajo presupuesto equilibrado, recauda un impuesto proporcional sobre las rentas del trabajo dirigido a financiar un nivel común de inversión educativa para todos los individuos, cualquiera que sea el grupo social al que pertenezcan. Esto implica que, en la restricción presupuestaria de los hogares, los empleos en el segundo período de vida se limitan al consumo y al pago de los impuestos. También implica que los padres dejan de afrontar un trade-off entre cantidad y calidad en el número de descendientes. Los parámetros fiscales quedan además endogeneizados, al interactuar con las restantes variables del modelo.Teniendo en cuenta que la elección de la fertilidad será la misma para todo individuo, el nivel educativo puede despejarse de la restricción presupuestaria del gobierno en función del tipo impositivo. Este, a su vez, se somete a votación al poder expresarse las preferencias en función del conjunto de parámetros del modelo y dicho tipo; la maximización de la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria permitirá por tanto obtener este tipo óptimo sobre la renta laboral. Todos los adultos elegirán el mismo tipo impositivo dadas las preferencias comunes especificadas, por lo que no habrá ningún conflicto de intereses en su fijación en función del capital humano de partida.

La comparación entre los principales resultados de uno y otro régimen puede derivarse a partir del estudio de la tasa de crecimiento del capital humano medio en sus respectivos estados estacionarios; para calcular la tasa de referencia en el régimen privado se supone que el stock inicial de capital humano es lo suficientemente elevado como para evitar una trampa de pobreza. **En el régimen privado**, el estado estacionario será localmente estable si se verifica una condición que constituye una cota superior a la elasticidad del capital humano privado en la tecnologia educativa; de cumplirse, el capital humano relativo será el mismo para cada grupo y a su vez igual a 1, lo que implica una desaparición de la desigualdad a lo largo de la senda estacionaria. Sin embargo, si no se cumple, la desigualdad aumentará, ya que la desigualdad en las dotaciones iniciales, unida a la elevada influencia del capital paterno en la transmisión de conocimientos, no logrará una convergencia entre rentas a largo plazo. **En este sentido el modelo genera unos resultados similares a los que mostraban Glomm y Ravikumar cuando los rendimientos del capital humano eran decrecientes y la única desigualidad entre agentes se circunscribía a sus niveles iniciales de capital humano (en lugar de añadir shocks aleatorios sobre la productividad, como en el trabajo de Benabou).** La razón de esta similitud es que, desde la perspectiva de los agentes privados, los rendimientos del capital humano son decrecientes, al tener el componente que aporta el profesorado carácter de efecto externo.

En el **régimen de educación pública** existe una senda de crecimiento estacionario globalmente estable que se caracteriza por la igualación del capital humano de los dos grupos de agentes. Por tanto, la desigualdad decrece inequívocamente a medida que transcurre el tiempo. **Sin embargo, la tasa de crecimiento estacionaria del régimen de educación pública es menor que en el privado**, **aunque la tasa de fertilidad es mayor en el primero**. La explicación pasa por el hecho de que, en el régimen público, los individuos no internalizan los efectos que el número de descendientes tendrán sobre el gasto público en educación por persona, de manera que la inversión per cápita acaba reduciéndose en comparación con una economía de financiación privada y con ella el crecimiento de las restantes variables. Fuera del estado estacionario, qué régimen proporciona una tasa mayor de crecimiento depende tanto del grado inicial de desigualdad en las dotaciones de capital humano como del tamaño relativo de los dos grupos: en general cuanto mayor sea el grado de desigualdad o mayor el tamaño relativo del grupo más desfavorecido de hogares, tanto más probable será que la financiación pública sea también superior en términos de crecimiento.

Fan y Zhang (2013) combinan fertilidad diferencial y movilidad social en un marco de agentes heterogéneos, con una visión modelizadora próxima a la de De la Croix y Doepke. Las preferencias son idénticas a las de estos últimos autores y los salarios reales por unidad de capital humano, fijos en el tiempo a pesar de no proceder de una tecnología de producción lineal**.** Con dos períodos de vida, las preferencias de nuevo dependen del consumo en la vejez, el número de hijos y su capital humano. El tiempo se distribuye en la madurez entre trabajo, crianza de los niños y horas consagradas a su educación. Hay dos clases de agentes, cualificados y no cualificados**.** La función de aprendizaje depende tanto del tiempo dedicado por los padres como del gasto educativo aportado por estos o el gobierno. Se supone también que existe una cota inferior de tiempo dedicado a la educación (o calidad) de los niños y que más allá de aquella los trabajadores no cualificados no dedicarán nunca ninguna fracción de tiempo adicional; si además se cumplen cierta condición paramétrica, los trabajadores cualificados dedicarán a la educación de sus hijos siempre más tiempo que los no cualificados. Finalmente y en cuanto a los supuestos tecnológicos del modelo, se supondrá en todo momento, siguiendo a Ehrlich y Lui (1991), que el coeficiente que multiplica en las preferencias el número de hijos es mayor que el que afecta a su formación. La movilidad social se sustancia en una probabilidad de los individuos no cualificados de pasar a la condición de cualificados, que a su vez será endógena y dependerá positivamente de la inversión en educación recibida por los hijos de los padres no cualificados. Tanto esta probabilidad como la de los hijos de los cualificados de seguir en el grupo de los cualificados influirá en la proporción de trabajadores cualificados sobre la fuerza laboral total existente en la economía, al formar parte de la tasa de retorno del activo.

El régimen de educación privada es uno en el que cada hogar maximiza descentralizadamente su utilidad sujeta a la restricción presupuestaria flujo dada por el reparto del tiempo entre sus usos. En este régimen, existe una única solución interior para el problema del trabajador cualificado, en la cual este tiene menos hijos pero dedica una fracción de tiempo superior a su formación. Este resultado es común a De la Croix y Doepke y se debe a la mayor productividad marginal del tiempo de los padres, si bien en este último la mayor inversión se materializaba en gasto educativo. La ratio de trabajadores cualificados respecto al total de la población activa, así como la renta media, aumentan en la transición hacia el estado estacionario, la tasa de fertilidad media se reduce y la desigualdad, medida como la varianza de la renta potencial[199] ponderada, sigue una forma de U invertida, con un primer tramo creciente a medida que aumenta la proporción de individuos cualificados y un segundo tramo decreciente conforme este se eleva por encima de 1/2. Este resultado contrasta con la mayor parte de la literatura, en la que la evolución de la desigualdad sigue un proceso monotóno. En efecto, mientras la desigualdad es siempre creciente respecto al diferencial entre los salarios de los cualificados y no los cualificados, su comportamiento respecto a la proporción de los cualificados será diferenciado por tramos de dicha ratio. En un primer tramo predominará un aumento de la desigualdad ya que, al incrementarse la renta potencial esperada, aquellos individuos con un salario más bajo verán ensancharse la distancia respecto a aquella media. Sin embargo, a partir del máximo de la curva comienza a predominar sobre este efecto otro de

[199] Por renta potencial se entiende la renta media ponderada en toda la economía cuando cada uno de los grupos de trabajadores dedica íntegramente la dotación de tiempo de su madurez al trabajo, dados los salarios reales asociados a cada categoría de cualificación.

signo contrario: el mayor peso de los individuos que pasan a tener un mayor salario, reduciendo por tanto su distancia con la media a medida que esta se desplaza superiormente. Todos aquellos modelos, como el de Glomm y Ravikumar, o el de De la Croix y Doepke, que no contemplan diferenciación salarial entre grupos de población, no son capaces de separar estos dos efectos.

En el régimen de educación pública, el estado aporta el input de mercado, financiado íntegramente mediante impuestos proporcionales sobre las rentas salariales. En este régimen existe también un único equilibrio interior, en el que **la fertilidad de todos los trabajadores es superior a la observada con la educación privada**. Este resultado se debe a dos razones. Primera, un efecto sustitución que penaliza las horas trabajadas frente a las no trabajadas (e invertidas en crianza y/o educación), al reducirse el coste de oportunidad después de impuestos de estas últimas; por tanto este efecto abarata la fertilidad, al reducir en sus costes en comparación con el tiempo de trabajo. Otra, un efecto desincentivo producto del hecho de que los trabajadores no podrán complementar la aportación pública con fondos propios, lo que impide llegar alcanzar los niveles de renta salarial de los descendientes que se hubieran conseguido en el régimen privado; este hecho tiende a hacer menos útil el tiempo destinado a la educación en comparación, fomentando en términos relativos la inversión en cantidad. Hay que recordar que el modelo de De la Croix y Doepke de 2004 también llegaba a esta conclusión y también el de Glomm y Ravikumar, aunque este último con fertilidad exógena.

Otro resultado importante es que el diferencial de fertilidad entre trabajadores cualificados y no cualificados se estrecha bajo educación pública[200]: en la medida en que las horas consagradas a la educación entre los no cualificados se consideran fijas y la fertilidad se abarata también para los cualificados, estos tenderán a incrementarla más respecto a los no cualificados en el régimen público. **En el corto plazo la renta media y la desigualdad en la distribución son mayores en el régimen privado. A largo plazo en el estado estacionario, sin embargo, este resultado no está garantizado**, ya que existe un cierto nivel crítico de gasto público en educación a partir del cual la renta potencial media será mayor en el régimen público. Este resultado se debe a la confluencia de tres efectos de distinto signo. El primero de ellos se relaciona con la mayor fertilidad de los trabajadores cualificados en el régimen público, que tiende a elevar la ratio de trabajadores cualificados sobre el total; este es una resultado específico de Fan y Zhang. El segundo se basa en el menor tiempo dedicado a la educación por los padres en el régimen

[200] Se repite no obstante el resultado de De la Croix y Doepke sobre la menor fertilidad y mayor gasto en educación de los cualificados, por análogas razones a las destacadas antes.

público, que sesga la renta media en favor del régimen privado. El tercero, creciente con el nivel de gasto público, está causado por la provisión de un mayor nivel educativo a los hijos de los no cualificados respecto al nivel que hubieran recibido en un sistema privado, lo cual aumenta sus probabilidades de movilidad social y, a través de un salario real mayor, de incrementar permenentemente su gasto en educación. Cuanto mayor sea el gasto público en educación (y por un tiempo más prolongado), en mayor medida tenderá a compensarse este segundo efecto por la combinación del primero y el tercero. El hecho de que el tercer efecto refuerce su importancia en el largo plazo es la razón de los resultados diferentes entre este horizonte y el corto plazo. Este efecto de transición es original y diferencia al resultado en el largo plazo de otros que pueden obtenerse con tamaños fijos de las proporciones de cada tipología de trabajadores.

De este modo, el enfoque de Fang y Zhang refuerza los argumentos a favor de la educación pública, al considerar un efecto adicional pro crecimiento que no contemplaban De la Croix y Doepke, el incremento de la proporción de trabajadores cualificados a largo plazo, tanto por la vía de promoción social como por la mayor natalidad relativa de los cualificados en un régimen de educación pública. Hay que resaltar, sin embargo, que ambos atributos del modelo descansan en supuestos discutibles: por un lado, en la hipótesis de salarios constantes para cada grupo de trabajadores, que de suprimirse implicaría un estrechamiento del abanico salarial a medida que aumenta la proporción de cualificados, con efectos indefinidos sobre los incentivos a la educación; por otro, el suelo exógeno en las horas de educación de los hogares no cualificados, que implica, en combinación con el abaratamiento general de la fertilidad, un estrechamiento del diferencial.

V.5. Factores determinantes de la eficacia de la intervención pública en educación.

A). **Factores inherentes al proceso de decisión social que determina la cuantía y distribución de los gastos en educación.** Una rama de la literatura, con un origen prácticamente contemporáneo al de los anteriores trabajos, profundizan en las consecuencias distributivas intrageneracionales de las estrategias óptimas del votante mediano que determinan diferentes modelos de financiación de la educación pública. Su foco, no siempre se dirige a la acumulación o transferencia de capital humano, sino que se centra en los incentivos del votante mediano o incluso en los mismos sistemas institucionales de votación y sus implicaciones. Aún así, merece la pena mencionarlos ya que ponen de manifiesto cómo la determinación de los gastos en educación puede sufrir distorsiones en su origen, las cuales erosionan su capacidad para dinamizar la movilidad intergeneracional.

Estas contribuciones se encuentran a medio camino entre el enfoque positivo de la Hacienda Pública y la Teoría del Capital humano.

Así, **Perotti (1993)** plantea un modelo de generaciones sucesivas en el que los agentes viven 2 períodos. En el primero de ellos los individuos, que se diferencian en función de su renta pre-impositiva de partida, toman una decisión binaria respecto a la inversión en educación; en caso de que esta se efectúe -sin consideración hacia su cuantía-, ejercerá un efecto externo en el período siguiente, aumentando la productividad de todos los agentes. La probabilidad de invertir será creciente en el nivel de renta disponible de partida. Por tanto, la continuidad de este proceso genera un proceso de "trickle-down", por el cual la inversión en educación se inicia en las clases económicas más altas y se va extendiendo a toda la sociedad a través de los comentados efectos externos; la economía alcanzará su estado estacionario cuando todas las clases realicen inversiones en educación, situación en la que ya no cabrán mayores aumentos en la productividad del trabajo. El proceso puede acelerarse mediante la actividad fiscal del gobierno: en efecto, al comienzo del primer período, los agentes votan un nivel impositivo proporcional sobre las rentas del trabajo que se canaliza -bajo equilibrio presupuestario- hacia transferencias redistributivas de renta. El votante mediano confrontará el impacto sobre su renta de los efectos externos derivados de una mayor inversión en educación por las clases más bajas con sus costes procedentes de la imposición. **Si los costes marginales superan a las ganancias marginales, se dejará de redistribuir y el proceso de crecimiento de la economía se detendrá. Otra conclusión esencial del modelo es que la distribución inicial de la renta -o las dotaciones de capital humano, en la medida en que las diferencias en la primera vinieran causadas por la heterogeneidad de las segundas- influirá en las posibilidades de crecimiento a largo plazo de la economía.**

A similares conclusiones llegan **Saint-Paul y Verdier (1993)** en un modelo de generaciones sucesivas que viven un solo período y preferencias altruistas en el capital humano de la siguiente generación; dada además la tecnología del bien final, que utiliza el capital humano como único input, la renta salarial se identifica con el stock de este activo. Adicionalmente, la acumulación de capital humano se ve afectada tanto por el capital de los padres (aplicado a lo largo de una fracción de tiempo exógena), así como por los gastos en educación financiados con los impuestos. Los autores proponen una estructura de votación del tipo impositivo que otorga el poder decisorio al votante mediano: esta se basa en la maximización de la utilidad de cada agente respecto al tipo impositivo, dada la transferencia educativa dependiente del stock de capital medio de la economía y la restricción de no negatividad del tipo impositivo. La concavidad de la función de utilidad garantiza que el tipo impositivo escogido por cada individuo será una función decreciente de la relación entre su capital humano y el capital humano medio y, por tanto, será mayor conforme más reducida sea la renta familiar.

El equilibrio político de la distribución de tipos resultante garantiza que será el tipo escogido por el votante mediano el que finalmente se imponga. Por otro lado, esta proposición implica que la familia con renta mediana será la misma entre generaciones y que, en consecuencia, el tipo general aplicado a todo individuo será el máximo entre 0 y el tipo óptimo que maximiza la utilidad del votante mediano. En este marco, el stock de capital humano de cada individuo presentará una convergencia progresiva a la media siempre que el tipo impositivo sea positivo; si es nulo, la distancia permanecerá constante entre generaciones y no existirá por tanto movilidad social (aunque sí intergeneracional, ya que el stock crece por el mero hecho de que el tiempo destinado a la transmisión de conocimientos de padres a hijos es positivo). **Sin embargo**, **nada garantiza a priori que el estado pueda financiar su política educativa, ni una magnitud determinada de las transferencias educativas, ya que cualquier resultado pasa por el resultado de las preferencias de votante mediano.**

Fernández y Rogerson (1995) elaboran un modelo que muestra cómo un sistema de votación sobre el tipo impositivo financiador de los gastos educativos, cuando hay segmentos de la población que pueden ser excluidos de estos, puede tener consecuencias regresivas sobre la distribución de la renta. El punto de partida lo proporciona la evidencia de que en un número significativo de países los gastos educativos se concentran sobre todo en educación terciaria, beneficiando primordialmente a las clases medias y altas, mientras que la financiación corre a cargo de todos los ciudadanos, por lo que existe un subsidio implícito de los individuos con menores rentas hacia los más pudientes. Para dar cabida a este argumento construyen un modelo en el que los agentes viven a lo largo de 2 períodos en el que, por no existir mercados de crédito -como es habitual en esta literatura-, los agentes son dependientes de su renta al comienzo de su vida, que reciben en forma de dotación exógena. En función del tamaño de la dotación, puede hablarse de tres grupos de ciudadanos: de rentas altas, medias y bajas. En el primer período de vida el agente toma una decisión binaria sobre si acceder a la educación; en caso positivo, pagará su coste constante pero percibirá unos ingresos superiores en el segundo período; en el negativo, deberá vivir con cargo a su dotación los dos períodos de vida. La condición límite por tanto para acudir al sistema educativo será que los ingresos del segundo período con educación menos el coste de adquirirla supere la dotación de partida.

El gobierno financia subsidios educativos con cargo a impuestos proporcionales sobre la renta de las dotaciones en el período inicial; por tanto la renta futura procedente de la inversión en educación está exenta de impuestos. Los gastos educativos se giran sobre la renta disponible después del pago de impuestos. Mientras estos recaen sobre todos los individuos, los subsidios presentan excluibilidad, a diferencia de otros modelos dentro de esta rama de la literatura, como el de Perotti anteriormente comentado. Los tipos impositivos se determinan endógenamente por un sistema de votación, pero antes de describirlo es fundamental conocer cómo se calcula el número de beneficiarios de las subvenciones y su cuantía; ambas variables dependen de la recaudación total y se optimizan simultáneamente. Se trata de un proceso iterativo en el que, para un tipo impositivo genérico, se verifica cuál sería la proporción máxima de individuos que, recibiendo la subvención, optarían por recibir educación. Si dicha proporción es unitaria, se itera al siguiente grupo, y así sucesivamente. La cobertura de la subvención alcanzará solamente a aquellos individuos que, al recibirla, pueden invertir en educación; por tanto, obtenido dicho número en función de la cuantía de la subvención y del tipo impositivo, la cuantía de la subvención se puede expresar como una función inversa de estas variables. Un supuesto clave en el modelo es que el proceso de reparto de las subvenciones se inicia por los individuos más ricos y se va descendiendo progresivamente en la escala de rentas, implícitamente por un criterio de eficiencia consistente en que la mayor fracción posible de individuos de la población se beneficien de la educación -frente a un criterio igualitario, que comenzaría el reparto por el grupo de rentas más bajas-.

Las votaciones se realizan entre tipos alternativos, teniendo en cuenta cuál de ellas reporta una mayor utilidad esperada a los individuos de cada clase. Estos últimos son el resultado de maximizar la utilidad esperada de cada grupo. Siendo las dotaciones iniciales, la cuantía de las subvenciones, la fracción de individuos beneficiados por la cuantía de la subvención dentro del grupo (no decreciente en el tipo impositivo), los gastos fijos en adquisición de la educación y las rentas de la misma, respectivamente, las variables $\omega, S, \theta, x^h, e$ en la siguiente ecuación, la utilidad esperada a maximizar tomará la forma:

$$EU_i(\tau) = (1-\tau)\omega_i + \theta(\tau)\left[S(\tau) - x^h + e\right] + \left(1-\theta(\tau)\right)\omega_i;\ i = 1,2,3 \quad (5.91)$$

Las alternativas a que se enfrentan los individuos de cada grupo son fijar tipos más bajos, en cuyo caso es posible que queden fuera de la subvención lo cual, dependiendo de su dotación, podría dejarles fuera del circuito educativo, o fijar uno alto, en cuyo caso puede ser seguro que tengan acceso a la subvención aunque el cuantía de esta será más baja al diluirse entre más individuos. A la vista de estas consideraciones, en el proceso de votación existen varias combinaciones posibles de resultados, dependiendo de la posición relativa de la renta media, las fracciones de cada grupo de individuos dentro del total de la población y el coste de adquisición de la educación. En general un grupo que vote el tipo impositivo querrá que este sea tanto más alto i) cuanto más directamente se vaya a beneficiar de las subvenciones ii) cuanto más reducidos sean los restantes grupos que se van a beneficiar de ellas, o más próximos se encuentren al primero en renta. Se demuestra que en equilibrio no puede excluirse un resultado de "expolio a las rentas bajas" ni en economías de rentas bajas ni altas, en el sentido de que estas pueden pagar impuestos pero no beneficiarse de subvención alguna. Sin embargo una redistribución fiscal de este tipo generará un mayor grado de ineficiencia cuanto mayor sea la renta media de la economía, por cuanto que un mayor número de individuos que antes hubieran podido acceder a la educación ya no podrán hacerlo tras la actuación del gobierno, debido al pago de impuestos sin ninguna contraprestación (o al revés, las subvenciones se canalizan hacia aquellos que en cualquier caso hubieran podido acceder)[201].

B) La superposición de la producción pública a las preferencias privadas. Cuando la intervención pública adopta la forma de provisión del servicio, su coexistencia con preferencias privadas eventualmente diferentes acerca de la cantidad y características de los servicios educativos a suministrar, incluso en un escenario en el que los servicios públicos y privados presenten la misma calidad, puede generar una importante insatisfacción entre los usuarios. Para solventar este problema se han desarrollado distintos esquemas, como los cupones educativos propuestos por Friedman (1962), suficientemente conocidos y en torno a los que nos limitaremos a examinar sus principales consecuencias. Por otro lado, cuando se busca la combinación de provisión pública -bien sea en forma de cupones o de escuela pública- y se proporciona a las familias un cierto margen de maniobra para optar entre uno y otro sistema, surge la cuestión del posible deterioro de la calidad del sistema público, tanto a causa de una reducción en su financiación como de una degradación del ambiente en el que tiene lugar la educación.

Desde un punto de vista de modelización, la diferenciación entre todas estas alternativas no siempre es sencilla, como se apreciará en el modelo sintético que se propone en el capítulo 6. En general la provisión pública se señaliza mediante la inclusión de dos inputs de mercado en la tecnología de acumulación, uno de origen público -aunque financiado con cargo a rentas privadas- y otro privado, en el caso en que se de la opción a las familias a complementar la provisión pública con sus propios esfuerzos. Desde el punto de la restricción presupuestaria de los agentes, la provisión pública no figura en ella directa-

[201] La literatura sobre esta cuestión es mucho más amplia, aunque valgan estos ejemplos generales suficientemente representativos. Cada forma específica de provisión pública puede tener sus propios problemas derivados de la interacción de votantes cuando la financiación es endógena, como se apreciará más adelante.

mente (sí indirectamente, a través del tipo impositivo) sea cual sea la forma que adopte la provisión. En el caso de la escuela pública, en que provisión se acompaña de producción, se trata de un gasto que realiza directamente el gobierno -instrumentado en un foro determinado- y cuyo resultado se manifiesta en la función de aprendizaje; cuando hay cupones, al estar estas condicionados inexorablemente a su gasto educativo, se incorporan al lado de los recursos como transferencia y simultáneamente forman parte de los empleos, por lo que se cancelan. El principal matiz que admiten en la modelización escuela pública y cupones es que los cupones suelen complementarse con gasto privado adicional -aunque no siempre-; además, aunque solamente en modelos con un cierto grado de desagregación, la cantidad de cupones proporcionada a distintos grupos de agentes puede variar, mientras que la educación pública se entiende proporcionada siempre en la misma cuantía a todo individuo.

Un buen punto de partida para la modelización de los efectos de la provisión pública y los factores que determinan su elección endógena puede encontrarse en **Boldrin (2005)**. El autor utiliza un marco OLG para comparar un sistema de provisión pública en exclusiva y un sistema que se complementa con aportaciones privadas. Los términos de la comparación son tanto las características de la asignación conseguida como los condicionantes de su financiación, teniendo en cuenta que son los propios agentes los que votan el tipo impositivo que financia en equilibrio período a período el gasto en provisión.

El modelo se basa en un marco general de preferencias que anida distintos grados de altruismo y parte de economías basadas tanto en capital físico como humano. Los mercados de crédito no están operativos para la financiación de la educación y el grado de altruismo es cero en el modelo básico y positivo en el ampliado; en el primer de los casos, esto hace imposible financiar los gastos educativos por los agentes más jóvenes en un modelo de 3 períodos como el visto anteriormente al estudiar la eficiencia dinámica de la asignación competitiva descentralizada. La función de producción del bien final es una Cobb-Douglas de rendimientos a escala conjuntos en capital físico y capital humano -siendo el trabajo inelástico en el segundo período de vida-, mientras que la tecnología de aprendizaje presenta rendimientos constantes en capital humano y decrecientes en la cantidad del input físico utilizado; cada generación se beneficia de la aplicación del capital humano de sus padres al proceso educativo en lo que podría considerarse un “efecto de entorno”. La solución al fallo de mercado originado por la falta de crédito mediante el que los jóvenes financien su gasto educativo pasa por aportaciones públicas, que se distribuyen a través de distintos mecanismos para uso exclusivo en adquisición de material educativo a los hijos en forma de cupones. La provisión pública de educación, como se anticipó algunos párrafos atrás, se inyecta en el lado de los recursos de la restricción presupuestaria de los hogares pero al mismo tiempo, al estar su utilización estrictamente limitada a un solo fin, la misma cuantía figuraría en el lado de los empleos, por lo que se cancelarían y solo aparentemente no figurarían en tal restricción. En la versión más simple del modelo, la provisión pública sustituye enteramente cualquier otra financiación privada.

La función de utilidad a maximizar por un agente nacido en s-1 dependerá estrictamente del consumo a realizar en s y s+1, de manera logarítmico-aditiva. Las restricciones presupuestarias de los períodos s y s+1 son las siguientes, siendo τ el tipo impositivo sobre la renta de cada uno de ellos, que financia íntegramente el input sobre el que descansa la formación de los jóvenes:

$$C_s + K_{s+1} = (1-\tau_s)w_s \quad (5.92)$$

$$C_{s+1} = (1-\tau_{s+1})rr^k_{s,s+1} \quad (5.93)$$

Este primer bloque del modelo permite resolver la senda de endógenas para una secuencia de valores de los tipos impositivos. Para cerrar el modelo es necesario endogeneizar la tasa impositiva sobre las rentas. Se supondrá que esta es determinada óptimamente por los agentes que se encuentran en su edad madura, conforme a la función objetivo:

$$\max_{\tau_s} U(\tau_s, \tau_{s+1})$$

$$s.a: \tau_{s+1} \in (0,1) \quad (5.94)$$

Esto es, se toma un valor dado cualquiera del tipo impositivo del período siguiente, sujeto al cual se realiza la optimización.[202]. En otras palabras, sustituyendo las correspondientes restricciones presupuestarias se maximiza:

$$u\left((1-\tau_s)w_s - K_{s+1}\right) + \beta u\left((1-\tau_{s+1})rr^k_{s,s+1}(\tau_s)\right) \text{ (5.95)}$$

El problema dará lugar a una secuencia de tipos óptimos a lo largo de un horizonte infinito, dado el tipo del período siguiente. En estado estacionario se tendrá un tipo común a todos los períodos. Dada la naturaleza del problema, es claro que solo tendrá sentido que los adultos en su segundo período de vida participen en esta votación, ya que los mayores siempre tendrían un tipo óptimo a cero (no obtienen ganancia alguna de la inversión en capital humano, puesto que la aplicación del tipo solo se traduce en la detracción

[202] Para dotar de racionalidad completa el proceso de selección, el tipo impositivo de s+1 no podría ser cualquiera, sino aquel que resolviera análogo problema planteado el período siguiente, y así sucesivamente. Los autores eligen un sistema de “racionalidad limitada” para simplificar analíticamente el resultado, aunque otros trabajos abordan en mayor profundidad este problema. A estos efectos, véase, Boldrin y Rustichini (2000) y Forni (2005).

de consumo en la etapa final de su vida). Sin embargo, los adultos están sujetos a un trade-off que hace posible el planteamiento del problema: por un lado el tipo impositivo implica menos consumo en el período central de su vida, pero al mismo tiempo la inversión en capital humano permite elevar la futura tasa de retorno de la inversión en capital físico vía productividad marginal cruzada positiva, lo que genera más renta y consumo en la vejez[203]. Respecto a los jóvenes, si entraran en la votación su elección sería siempre un tipo impositivo igual a 1, ya que no experimentan ningún tipo de coste marginal asociado.

Resolviendo este problema se podrá construir una senda óptima en equilibrio general tanto para el capital físico como para el humano. La existencia de niveles bajos de productividad del capital físico o bien una renta laboral inicial baja pueden provocar una trampa de bajo crecimiento, al hacer óptimo un tipo impositivo nulo si la pérdida de utilidad marginal debido al menor consumo excede los beneficios marginales materializados en la mayor tasa de retorno del capital físico. Esta circunstancia **se refleja en la tipología de estados estacionarios, que pueden ser dos distintos dependiendo del valor inicial de la renta**: uno con un crecimiento nulo del capital humano, si bien este es positivo, y otro interior con un crecimiento constante del capital humano, localmente estable o inestable en función del valor de determinadas combinaciones paramétricas.

El modelo puede ampliarse considerando altruismo intergeneracional. En esta variante la función de utilidad de los adultos dependerá no solamente de sus consumos, sino del capital humano legado a su descendencia durante el segundo período de su vida. **En coherencia con este hecho, se permite a los padres realizar sus propias aportaciones privadas a la educación de sus hijos, complementando a las efectuadas por el gobierno financiadas con impuestos**. La restricción flujo del período de madurez añadirá, en el lado de los empleos, este tipo de transferencias al consumo y el ahorro. De este modo la totalidad de inputs de mercado a incorporar en la función de aprendizaje se compondrán ahora de fondos privados más las aportaciones públicas financiadas con impuestos.

---

[203] Este hecho no es equivalente en absoluto a afirmar que la tasa de retorno del capital humano dependa de la productividad marginal cruzada de ambos factores. La dependencia de la tasa de retorno del tipo impositivo surge porque, en el momento en que los individuos adultos votan el tipo, estos conocen el resultado de la senda completa de endógena contingentes a los tipos impositivos. Entre esta información se encuentra la ecuación que relaciona la tasa de retorno con la productividad marginal del capital físico, que a su vez depende positivamente de la posición en capital humano.

En equilibrio general, la solución óptima internalizará ahora las transferencias del gobierno, de modo que dichas transferencias públicas penalizan las privadas a través de dos canales: primero, al detraer renta disponible y, segundo, al incrementar alternativamente el stock de capital humano de los hijos, si bien corregidas por un coeficiente m situado entre 0 y 1, representativo de costes administrativos en la gestión de los ingresos y las transferencias a los hogares que contribuye a mermar la cuantía efectiva de los mismos desde el inicio del proceso hasta la percepción por los interesados. **En la solución óptima de las transferencias privadas se observa, por tanto, un grado de sustituibilidad con las transferencias públicas,** de modo que cuando el tipo impositivo supera un cierto umbral, el nivel óptimo de transferencias privadas se anula. Además sigue siendo viable una solución de acumulación nula del capital humano, a causa, como en el modelo básico, de un bajo nivel de renta de partida o de una productividad del proceso educativo reducida. El problema de optimización sigue resolviéndose en dos etapas, de manera que en la segunda se maximiza la utilidad sujeta a una restricción de no negatividad de los gastos privados en educación. La solución para el tipo impositivo es doble: cuando la suma de m y α no exceda la unidad, el tipo impositivo óptimo será nulo, mientras que si la suma de los anteriores parámetros supera la unidad entonces el tipo óptimo se formulará como una combinación de los mismos. El resultado es lógico: a menor eficiencia en la gestión de los fondos públicos o mayor participación del capital humano en la renta, menores incentivos de los progenitores a reforzar sus legados privados con fondos públicos. **Es posible demostrar, además, que incluso cuando los legados privados son nulos (por verificarse las condiciones de la trampa de crecimiento), la utilidad registrada es mayor con niveles positivos de imposición y transferencias públicas siempre que la ineficiencia pública y el factor de descuento sean valores relativamente moderados[204].**

La sustitución entre aportaciones públicas y privadas es especialmente acusada cuanto mayor es el grado de desarrollo de la sociedad y, en consecuencia, más elevado es el capital humano de la generación anterior; este resultado se deriva indirectamente de la caracterización de la trampa de crecimiento en el modelo de Boldrin. **Azarnert (2010)** estudia la evolución de las contribuciones privadas en un modelo similar al de Boldrin, solo que con fertilidad endógena y externalidades en el nivel medio de capital de la sociedad, que coexisten con estratificación local en la financiación del gasto educativo. Mientras en estadios de subdesarrollo la contribución pública es crítica para que pueda efectuarse una inversión positiva en educación (nivel crítico de Boldrin), a medida que se re-

[204] Otros trabajos sobre endogeneidad del tipo impositivo que financia los cupones educativos, aunque sin consideración a la acumulación de capital humano, pueden encontrarse en Epple (1996), Hoyt y Lee (1998) o Bearse et al. (2013).

fuerza el nivel de cualificación de los padres se acentúa, para un nivel dado de altruismo en las preferencias, el trade-off con las aportaciones públicas, ya que el simple contacto con los hijos es suficiente para que estos adquieran un nivel de capital humano de una magnitud considerable. Por esta razón, las aportaciones públicas en estas fases tienden a financiar aumentos de la fertilidad, pero pueden llegar a ser incluso contraproducentes sobre el gasto total educativo en términos netos. A la vista de este patrón, Azarnert concluye que la orientación más productiva de la inversión educativa pública es la mejora de la tecnología educativa, más que el gasto supuestamente dirigido a la inclusión de estratos desfavorecidos de la sociedad en el proceso educativo (la externalidad social tendería a compensar las limitaciones teóricas de la financiación del gasto educativo sobre la base de los ingresos de la comunidad).

Descritas estas características básicas del sistema de provisión pública, la convivencia entre la misma y el gasto privado en educación se enfrenta a varios problemas. El primero de ellos es l**a indivisibilidad del sistema educativo**, que suele ir asociada al sistema de escuela pública, al ser en la realidad difícil compatibilizar un sistema público con uno privado de calidad cuanto mayor sea la fracción del tiempo de los niños que absorbe el primero. Por tanto, el conflicto se presenta cuando la única alternativa que se ofrece a las familias es una elección polar entre la participación en un sistema de provisión pública, tipo escuela pública que no deja apenas lugar a un complemento privado, o el costeamiento de un sistema privado puro. El propio Boldrin (2005) especula cuáles serían las consecuencias de plantear una elección de este tipo a los agentes, empleando el mismo marco analítico que acaba de describirse. **Para ello se introduce heterogeneidad en los agentes en el modelo**, de modo que en cada generación existe un continuo de individuos, cada uno de los cuales presenta valores diferentes en su capital humano de partida; no obstante las preferencias serán comunes a todos los individuos. La indivisibilidad fundamental que implica la elección entre regímenes educativos excluyentes lleva consigo que solo los inputs procedentes de uno u otro origen se aplicarán a la función de aprendizaje. Dicho de otra forma, existirá solamente una cierta proporción j de individuos que desean financiar el material educativo con fondos públicos a privados; esta proporción será la única que acuda a las escuelas públicas y, por tanto, el gasto público en educación se dirigirá solamente a esta franja de la población. Es más, en la medida en que el capital humano de los descendientes es un bien normal, la magnitud de la financiación privada estará positivamente correlacionada con la dotación de capital humano de los individuos, de suerte que, a mayor renta laboral, tanto más probable será que los hogares opten por el sistema de financiación privada[205]. Esta consideración permitirá ordenar a los hogares por su nivel de renta, de manera que el punto de corte entre aquellos que se benefician de la educación pública y los que lo hacen de la privada vendrá dado por $j \in [0,1]$: en efecto, serán los individuos con una dotación situada en el intervalo [0,j] los que recurran al sistema público.

En esta variante del problema el valor de j se determinará conjuntamente con el tipo impositivo en la segunda etapa en una secuencia de dos pasos: i) En el primero, para un j genérico, se identifica el mínimo tipo impositivo óptimo votado por los adultos (que corresponderá al de los más ricos); ii) En el segundo, se elige un j tal que cumpla ciertas restricciones de consistencia sobre la separación de grupos de individuos según su renta[206]. En general existirá un conjunto de posibles valores de j. Se desprende además del modelo que en procesos de crecimiento de la renta que lleven aparejados reducciones de la desigualdad, existirá una correlación positiva entre renta per cápita y nivel de financiación pública, al determinar esta un votante mediano que está más próximo a los segmentos más ricos de la población y disminuir la distancia entre estos y los más pobres. Este resultado del modelo entronca con el argumento de Pelzman (1973), que afirma que cuando los subsidios educativos se traducen en transferencias en especie (esto es, provisión pública de la educación), la demanda educativa total será inferior que en un sistema en el que se la complementariedad entre esfuerzos públicos y privados es más viable -el instrumento típico en este segundo caso serían los cupones, ya que no son rivales en tiempo respecto al asociado al esfuerzo privado-. Esto sucede porque, bajo un régimen puro de educación pública, para aquellas familias que consideren inadecuado el nivel de provisión pública y deseen complementarlo con esfuerzos privados esto será muy dificil y costoso y llevará consigo renunciar, en buena medida, a la financiación pública y optar por una financiación completamente basada en medios propios. Para esta parte de la población, que estará más cercana al votante mediano, el valor de los impuestos pagados para fi-

[205] Esta proposición es consistente con los resultados expuestos anteriormente en el régimen mixto con aportaciones simultáneas público-privadas, en el sentido de que niveles bajos de renta podían conducir con mayor probabilidad a una trampa de pobreza.

[206] En concreto, deberá cumplirse que a) para los hogares más pobres situados entre 0 y j, la solución optima evaluada a los tipos impositivos elegidos sea tal que los legados óptimos privados sea nula; b) para los hogares más ricos, ubicados entre j y 1, la solución óptima pase por una legado óptimo privado positivo y superior en cuantía a la financiación pública per cápita. La verificación de estas condiciones entrañará, en ambos casos, la comparación entre la utilidad marginal del consumo y la tasa de retorno marginal de los legados públicos y privados, respectivamente.

nanciar el sistema educativo estará cercano a cero, por lo que votarán tipos impositivos inferiores a los que apoyarían si se les dejara complementar libremente el esfuerzo financiero público con el suyo propio.

Sobre esta conclusión de Boldrin, en general compartida por la literatura sobre endogeneidad del gasto público en educación, pueden hacerse algunos matices. **Gradstein y Justman (1996)** llegan a una conclusión similar, dentro de un régimen mixto hipotético -que no necesariamente pasa por la aplicación de cupones-, en el que pueden compatibilizarse los gastos públicos en educación con los privados. El nuevo ángulo que ilumina su contribución es que, dependiendo de las ponderaciones del consumo y la variable de altruismo en las preferencias de los padres, el votante decisivo podría no ser el mediano, ya que si el coeficiente del consumo es elevado en relación al del capital humano o la renta de la siguiente generación los votantes de rentas bajas pueden coaligarse con los de rentas altas para que disminuya el tipo impositivo. En este sentido, una eventual caída del gasto educativo público per cápita podría no ser sólo consecuencia de una distribución desigual del capital humano de partida, sino también de una falta de solidaridad intergeneracional interclase. La condición suficiente para que fuera el votante mediano el que decidiera el tipo impositivo sería que las subfunciones de utilidad que valoran consumo y el componente altruista fueran iguales.

Bearse, Glomm y Patterson (2005) utilizan unas preferencias cuyo elemento altruista depende del gasto educativo total, suma de público y privado, para cuya consideración conjunta se utiliza un agregador CES, en el que dos parámetros son relevantes: el que determina la linealidad de la combinación de gastos, así como el que refeja su productividad relativa; cuando la agregación es lineal pueden derivarse soluciones cerradas, pero cuando no lo es hay que recurrir a ejercicios de simulación. Con un agregador lineal y sustituibilidad perfecta entre tipos de gasto desde el punto de vista de la productividad, se reproduce el resultado de Boldrin, en el sentido de que a partir de cierto umbral de renta el votante mediano decide votar por un tipo impositivo nulo -en este modelo solo pagan impuestos aquellos que se benefician del régimen público, aunque esta es una diferencia con Boldrin accesoria-. Sin embargo, con agregadores no lineales, el tipo impositivo de equilibrio es decreciente respecto a la productividad relativa del gasto público. **Este resultado apunta a que la financiación per cápita en el sistema público podría resultar algo superior a la prevista por modelos como el de Boldrin, aunque tanto más cuanto mayor fuera la ineficiencia del sector.**

Otros modelos subrayan la posibilidad de que, en condiciones fiscales favorables y bajo ciertos supuestos, la salida creciente de individuos del sistema público a medida que crece la renta disponible en las capas medias de la sociedad podría no ser perjudicial para aquel. Es el caso de **De la Croix y Doepke (2009),** que introducen, en un modelo similar al de Boldrin con agentes heterogéneos, tipos impositivos y fertilidad endógenos con preferencias altruistas y homotéticas. El sistema público se financia con impuestos, siendo los gastos en educación de los padres deducibles. Pese a que la salida voluntaria del régimen público desemboca en un mayor gasto educativo deducible, la menor fertilidad que acompaña el régimen privado -de acuerdo con el resultado del trabajo de los mismos autores de 2004-, unida a la homoteticidad de las preferencias, evita la pérdida de ingresos netos a tipo impositivo constante. Si el equilibrio determina el umbral de renta a partir del cual se opta por el régimen privado, la independencia entre base impositiva y régimen elegido garantiza la unicidad de tal umbral, frente a la multiplicidad de valores encontrada por Boldrin. Además la calibración y simulación del modelo revela que el paso de una proporción creciente de individuos al régimen privado es compatible con un mayor gasto por estudiante en el público, a pesar de que tal salida se traduce en una disminución del tipo impositivo de equilibrio: la clave es la perdida de estudiantes en el régimen público más rápida que la disminución de la financiación pública disponible.

En definitiva, el sistema de producción pública, aunque sustentado por la mayor parte de autores desde la perspectiva de la reducción de la desigualdad, ve minado sus potenciales efectos positivos a consecuencia de las indivisibilidades que genera cuando su financiación es determinada en un marco de agentes heterogéneos en cuanto a sus niveles de capital humano de partida y tanto más cuanto mayor es la desigualdad original en la distribución de la renta -al llevar al agente mediano a una zona de preferencias por el gasto privado- o más se benefician las rentas medias de una mejora en sus ingresos. Distintos matices pueden considerarse, como el grado de altruismo de las preferencias, que puede llevar a que ni siquiera un régimen educativo público de alcance sea el ideal para las clases bajas; en sentido contrario, un tratamiento fiscal favorable de los gastos educativos privados, unido a fertilidad endógena, o bien una baja eficiencia del gasto educativo público, pueden contribuir a sostener el gasto por alumno en este sector incluso cuando el gasto privado es atractivo. Pero ninguno de estos aspectos desvirtúa en esencia el argumento de que, cuando los agentes son heterogéneos y el gasto educativo endógeno, la elección entre una alternativa privada y un sistema puramente público, bajo un conjunto de condiciones relativamente realistas hará perder atractivo al segundo y, en gran medida, financiación.

Una posible vía para aumentar el atractivo del sistema público es liberarlo en mayor medida de tales indivisibilidades, dotándolo al mismo tiempo de elementos

que permitan plasmar en mayor medida las preferencias privadas, como los cupones educativos, complementados preferentemente por gasto privado determinado de forma autónoma. Sin embargo, un régimen mixto basado en cupones y con gasto endógeno puede derivar, en un entorno de agentes homogéneos, en un estado estacionario sin acumulación de capital humano si la renta de partida es excesivamente baja, al reproducirse algunos condicionantes de los regímenes sin intervención pública.

Otros trabajos han puesto de relieve aspectos diferentes de la comparación entre regímenes educativos públicos y mixtos, con resultados que dependen del marco en el que se plantea el problema de los agentes y las características de las opciones existentes. Uno de los más importantes es el de **Cardak (2001, 2005)**. **Este autor enriquece las posibilidades perfiladas por Boldrin para agentes heterogéneos mediante una elección más matizada entre regímenes educativos para los progenitores. Para ello despliega un modelo en que la totalidad de gasto dirigido a la educación pública se considera exógeno y no existe, en consecuencia, ninguna votación de los individuos sobre el nivel impositivo deseado, aspecto que también lo diferencia de Boldrin.** Los sujetos viven durante dos períodos y en el segundo maximizan su función de utilidad tipo CES dependiente de la inversión en educación de los niños -que se materializa input de mercado- y su consumo en la madurez. El tamaño de la población es constante y la función educativa, dependiente del capital humano y el input de mercado, con rendimientos constantes respecto a ambos pero cóncava en ambos argumentos. En el momento inicial la distribución del capital humano entre individuos se supone aleatoria, aunque a partir de la primera generación queda endogeneizada de acuerdo con las decisiones de inversión en capital humano de los padres. La educación pública se financia con impuestos proporcionales sobre la renta laboral -que es la única que se considera, al no haber capital físico-, de modo que si una familia opta por la educación pública, toda la renta después de impuestos de los adultos se canalizará hacia consumo. Para aquellos que decidan proporcionar a los niños educación privada hay disponible un sistema de cupones, cuya cuantía total se calcula a partir de un tipo proporcional de subvención sobre la renta media. En este caso, la renta laboral después de impuestos se verá reforzada con el cupón y los empleos de la renta se descompondrán entre el consumo y el gasto en educación total que realizará la familia, el cual a su vez comprende la cuantía de los cupones más los fondos adicionales que se deseen destinar a tal fin. **De este modo se amplía la gama de elección de los adultos, al considerar una elección entre un sistema público puro y uno mixto con cupones (mientras, cuando se introduce la provisión pública en el enfoque de Boldrin, la renuncia a este régimen implicaba una financiación puramente privada);** también aumenta, como se vera a continuacion, el atractivo del sistema no público para determinados segmentos de la población. Desde el punto de vista de las finanzas públicas, la recaudación impositiva cubrirá tanto la provisión de educación pública como el pago de los cupones en el sistema mixto. El equilibrio general se define como aquella secuencia de decisiones de consumo e inversión en la educación de los hijos sujeta a una senda de tipos impositivos y de subvenciones -que a su vez definen la cuantía de los cupones educativos- y sujeta a todas las restricciones enumeradas.

El objetivo principal del análisis es determinar si el paso de una situación inicial sin cupones a otra con cupones (o equivalentemente, de un tipo de subvención a la educación privada nulo a otro positivo) puede fomentar el crecimiento y reducir la desigualdad en la renta. Instrumental a estas consideraciones es la existencia en dicho equilibrio general de un umbral de renta tal que, por debajo del mismo, los hogares se decantan por la educación pública y, por encima, por la mixta; la razón de fondo es análoga a la comentada en Boldrin, al ser el gasto educativo recibido por los niños un bien normal en renta. Tal restricción refleja una condición necesaria de elección del régimen mixto, cual es que el gasto óptimo en educación de los padres sea superior al volumen que garantizan los cupones, al no poder financiar estos consumo privado por diseño.

En cuanto a los **efectos sobre el crecimiento**, la introducción de los cupones genera dos impactos de signo contrario. En general los cupones incentivarán a aquellos individuos de rentas “medias” acceder al sistema privado. En efecto, en ausencia de cupones la materialización del gasto educativo hubiera exigido a estas familias un fuerte sacrificio en consumo, mientras que con cupones solamente la diferencia entre el gasto óptimo y la cuantía del cupón se materializará en sacrificio de consumo. La salida de un segmento de la población del sistema público implica un mayor gasto público en educación per cápita para los individuos de menores rentas y, a la vez, una mayor detracción al presupuesto de provisión educativa directa del gobierno, al canalizarse los ingresos hacia dos usos diferentes. Por tanto, cuanto menor sea el incremento de las subvenciones sobre la renta que llevan implícitos los cupones y/o menor la proporción que decide pasar al sistema privado, tanto mayores serán las probabilidades de que la educación pública per cápita de los más pobres aumente y de ahí que se sienten las bases de un mayor crecimiento en el futuro. Sin embargo, si la educación per cápita de las rentas bajas disminuye, los efectos sobre el crecimiento a largo plazo serían ambiguos y el impacto neto debe dilucidarse en función del tamaño de los parámetros del modelo a través de ejercicios de simulación.

Si se atiende a la desigualdad en la distribución de la renta, la introducción de cupones aconseja hacer dos consideraciones: la convergencia entre rentas de familias que permanecen dentro del sistema de educación pública no varía, pero sí lo hace entre las familias que optan por la educación privada. En concreto, al permitir el sistema de cupones un acceso de un mayor número de individuos a este último, mejora la convergencia dentro del grupo de rentas altas. Tomando la totalidad de los individuos, sin embargo, con cupones habrá un mayor número de ellos que pasan a converger hacia una renta más elevada, lo que lleva consigo una mayor diferenciación entre grupos de renta. De nuevo el efecto neto debe cuantificarse vía trabajos de simulación en función de distintas combinaciones paramétricas.

Kaganovich y Zilcha (1999) desarrollan un modelo de características similares al de Cardak, si bien **la percepción de vouchers no obliga a abandonar el sistema público general;** es más, **el sistema es mixto, con un componente de provisión pública, otro de cupones y otro privado**. El gobierno realiza dos tipos de actividades en el campo de la educación: provisión directa de inversión (puede pensarse, a partir del input de mercado) y transferencia de cupones a los hogares para complementar su gasto privado. Denominando v a los cupones, la función de aprendizaje toma la forma[207]:

$$a_{s+1}^{h} = \left(a_{s}^{h}\right)^{\varepsilon} \left(v_{s} + x_{s}^{h,pr}\right)^{\gamma} \left(x_{s}^{h,p}\right)^{\eta};\ \varepsilon+\gamma+\eta > 1 \quad (5.96)$$

A la vez, el gobierno posee su propia restricción presupuestaria, que le impide financiar gastos educativos con deuda y que liga la totalidad de la recaudación con los dos usos alternativos:

$$x_{s}^{h,p} + v = \psi\tau a_{s}^{h} \quad (5.97)$$

Siendo ψ un parámetro comprendido entre 0 y 1 que puede entenderse como eficiencia en la administración de los ingresos o bien porcentaje de estos que son asignados a fines educativos. Finalmente, las preferencias de los individuos, que viven dos períodos y eligen en el primero de ellos la inversión en educación en sus hijos así como su ahorro, siguen una estructura Cobb-Douglas en los consumos de los dos períodos y en el capital humano que legan a sus hijos. **Mientras en Cardak el gasto público educativo era exógeno, en este trabajo es endógeno y se determina por el gobierno mediante la maximización de la función de producción de capital humano sujeta a su restricción presupuestaria flujo, dado el gasto educativo de los hogares y el tipo impositivo sobre las rentas laborales.**

Comparando el crecimiento de la economía en estado estacionario con y sin cupones educativos, se concluye que la provisión de cupones puede fomentar el crecimiento: i) Si el factor de altruismo en la función de utilidad de los padres es extremadamente bajo, de

[207] A efectos de calibrado del modelo, la tecnología educativa se reduce a Cobb-Douglas de rendimientos constantes sin intervención del capital humano paterno.

modo que el gasto privado total experimente un aumento importante gracias a los cupones. ii) Si el factor de altruismo es alto y el parámetro de eficiencia en el gasto educativo también lo es, ya que en este caso el gasto en cupones no desplazará el gasto público ni a través de la restricción presupuestaria del gobierno ni desde el ángulo de la demanda de inversión de los hogares, al ser reducido el efecto expulsión del gasto privado. Comparando estos factores con los subrayados por Cardak, el altruismo intergeneracional jugaba también un papel latente, al ser un factor importante detrás de la proporción potencial de la población que, tras la introducción del cupón, podía migrar a un sistema mixto. El tamaño del cupón era una variable fundamental en Cardak, mientras que aquí juega un papel secundario, teniendo mayor relevancia la medida en que los cupones pueden desplazar al resto del gasto privado, cuyo determinante principal es el grado de altruismo, así como el grado de eficiencia de la gestión de la recaudación y el propio tipo impositivo.

Otro enfoque que se analizará dentro de la modelización de cupones es el de **Preston (2003)**, en un marco de **preferencias heterogéneas entre agentes**. Los hijos nacen en el segundo y último período de vida de los adultos, cuyas preferencias, logarítmicas y separables, dependen del consumo y el ocio durante dicho período, así como del capital humano de sus descendientes inmediatos. La produccion de capital humano se lleva a cabo mediante una función que combina el capital humano de los padres y del material educativo proporcionado por estos o el gobierno, estando cada uno de estos inputs sujeto a rendimientos decrecientes considerados individualmente. La tecnología del bien final es tal que la retribución real al trabajo coincide con el stock de capital humano. La distribución inicial de capital humano entre los padres sigue una estructura estocástica logarítmico-normal. La heterogeneidad en los agentes procede del coeficiente que en sus preferencias representa el grado de altruismo y multiplica el capital humano de sus hijos, estando el mismo comprendido entre 0 y 1 y siguiendo los agentes una distribución uniforme a lo largo de este intervalo.

Existe un régimen educativo público, uno con cupones y otro privado. **En el régimen privado**, en el que existe multitud de escuelas cuyas características no se modelizan, el salario percibido durante el tiempo trabajado se distribuye entre el consumo y el gasto en educación de los niños. La maximización de las preferencias sujetas a esta restricción presupuestaria proporciona valores óptimos para el ocio, el consumo y el gasto educativo, contingentes al valor que el parámetro estocástico alcance en cada hogar. Se verifica en general, como resulta coherente, que padres con un altruismo mayor prefieren un gasto educativo superior para sus hijos.

En el régimen público, los gastos en material proceden exclusivamente del gobierno y no pueden ser complementados por los gastos privados. La financiación de estos se lleva a cabo mediante un tipo impositivo proporcional sobre las rentas del trabajo. Los individuos maximizan su función de utilidad en el ocio y el tipo impositivo; como solamente los gastos públicos en educación son factibles en este régimen, todos los individuos desean un tipo positivo, que por lo demás será creciente respecto al peso del altruismo en las preferencias. Para elegir el tipo que prevalecerá, cada familia propone el suyo y después este se somete a votación, de manera que se implanta el tipo tal que no existe un porcentaje de la población superior al 50% que resulte más beneficiada por otro. La configuración de las preferencias **lleva a la determinación del tipo por el votante mediano**.

Finalmente, **el sistema de cupones** implica la transferencia de los mismos a las familias para que estas los administren en las escuelas que deseen, al tiempo que puedan complementarlos con el gasto privado que estimen oportuno. La financiación de los cupones de nuevo se produce por medio de impuestos proporcionales sobre la renta. Las variables a optimizar en este caso son el consumo, el ocio y el gasto educativo privado autónomo (es decir, aquel por encima de los cupones). **El ocio óptimo en este régimen será menor que en el sistema público (en el que existen menores incentivos a trabajar para sufragar la educación de los niños) y mayor que en el privado**. El tamaño del gasto educativo suplementario de nuevo será creciente en el grado de altruismo y el capital humano paterno. **El tipo impositivo, que también se somete a votación, arroja un valor inferior al del sistema público** y el votante decisivo deja de ser el mediano, siendo el parámetro de altruismo del primero inferior al de este último.

Los tres regímenes pueden ser comparados por sus resultados en cuanto a crecimiento, renta media y desigualdad en la distribución del capital humano. **En cuanto a la renta media,** (aproximada por el tiempo de trabajo medio y tomando la distribución inicial de capital humano en la primera generación) **esta se maximiza en el régimen privado**, al ser este el que desincentiva en menor medida el tiempo de ocio. En cuanto a la **desigualdad en la distribución**, en el sistema privado no hay convergencia; dependiendo de los rendimientos conjuntos de la función de aprendizaje, la desigualdad en la distribución puede estabilizarse (decrecientes) -obedeciendo la diferencia con Glomm y Ravikumar (1992) a la heterogeneidad de preferencias- o ir continuamente en aumento (crecientes). En el sistema público los stocks convergen. En el de cupones, la situación es intermedia y depende tanto de los parámetros de distribución del altruismo como de los rendimientos conjuntos de la tecnología educativa. Para entender este resultado, hay que tener en cuenta que la voluntad de complementar con gasto propio el contenido del cupón dependerá con este tipo de preferencias del parámetro que afecta al altruismo; dependiendo en la medida en que este se encuentre por encima de cierto umbral se complementará o no. En la medida en que la heterogeneidad de preferencias asegura que siempre habrá estratificación, estará acotada o no dependiendo del tipo de rendimientos. Con rendimientos decrecientes del capital humano la acumulación de cualquier familia está acotada en el tiempo, por lo que la desigualdad tendrá un límite superior. Con rendimientos constantes, para aquellos que superen cierto nivel de altruismo el crecimiento constante de su stock será suficiente para acrecentar continuamente la brecha con aquellos que deciden no complementar; por debajo de este umbral, sin embargo, la diferencia de inversión con las familias que no complementan será demasiado exigua como para evitar que la desigualdad no quede acotada con el tiempo, dado el carácter redistributivo de los cupones. Con rendimientos crecientes, se producirá siempre un aumento de la desigualdad excepto para aquellos individuos que complementan el gasto del cupón pero se sitúan en una gama relativamente baja de altruismo.

En cuanto al **crecimiento generado**, primero es necesario hacer alguna consideración sobre el nivel mínimo de educación que llevan consigo un sistema público y uno de cupones. Como es habitual, cuál de los dos proporciona un nivel mínimo no está claro, ya que si bien el tipo impositivo es más bajo, los agentes tienden a trabajar más en el sistema de cupones, por lo que el efecto sobre la financiación del elemento público del sistema es incierto. Partiendo de este hecho, tampoco puede llegarse a una conclusión inequívoca sobre el crecimiento del stock medio de capital humano, ya que depende tanto del nivel mínimo de educación como del tipo de rendimientos del aprendizaje. Si los rendimientos son decrecientes, el capital humano de los individuos con menor nivel de partida crecerá más que el de aquellos mejor posicionados, para el mismo nivel de educación. Por lo tanto, aquel de los dos sistemas que brinde un menor nivel educativo perjudicará proporcionalmente más al crecimiento de los conocimientos de los trabajadores menos cualificados. Por el contrario, si los rendimientos son crecientes esta dinámica no se observará.

El papel de las preferencias heterogéneas en el modelo el de ampliar el número de escenarios en el que la financiación con cupones incrementa la desigualdad. Cuando estas se tornan homogéneas, sin embargo, solamente si los rendimientos de la función de aprendizaje son crecientes se producirá este resultado. En efecto, con rendimientos decrecientes al no haber diferenciación de comportamientos entre individuos en cuanto a la proporción de sus rentas con que se complementa el cupón y actuar así más efizcamente el componente redistributivo de este último, la divergencia en niveles educativos tiende a disminuir con el tiempo. Por otro lado, no puede afirmarse con seguridad que con preferencias heterogéneas la menor desigualdad en la distribución del capital humano se produzca a coste de menor crecimiento, ya que este hecho, como hemos visto, dependerá del diferencial de la demanda de ocio entre ambos sistemas: cuanto menos desfavorable sea dicha diferencia en el régimen público, tantas menores probabilidades de que este conduzca a un menor crecimiento.

Una gama de modelos ha introducido también consideraciones sobre efectos de entorno (los llamados "peer effects") a la hora de evaluar las consecuencias de la introducción de los cupones educativos, siguiendo la línea de Benabou (1996) y los estudios previos, en un marco estático, de Epple y Romano (1998b) y Nechyba (1996, 1999, 2000, 2003[208]). Son Epple y Romano (1998b y su extensión de 2008) los que fundamentan microeconómicamente estos modelos, describiendo la tecnología del sistema educativo privado y derivando sus condiciones óptimas de fijación de precios. El marco general es uno en el que la calidad de las escuelas depende tanto del gasto por alumno y de la capacidad media de los mismos. Las escuelas se reservan el derecho de admisión y pueden determinar la composición óptima de su alumnado. La habilidad del alumno se determina tanto a partir de su capacidad innata, como de la calidad de los servicios escolares -en los modelos estáticos no suele usarse el concepto de capital humano como tal-. Las preferencias del individuo dependen de su habilidad ex post y del bien de consumo, repartiendo su renta entre la adquisición del primero y el pago de los servicios escolares. De este modo, la admisión se producirá cuando el precio de reserva de cada alumno (esto es, la mayor utilidad alcanzable por el alumno en equilibrio en escuelas alternativas a una concreta i) es mayor o igual al coste marginal efectivo de dicho alumno en la escuela i, compuesto por sus costes variables marginales (relativos tanto al número de alumnos vigilados como al gasto por alumno) más los efectos externos que un alumno nuevo porta sobre la calidad media, multiplicados por el valor sombra de la calidad marginal. **En equilibrio con libre entrada se replicará una asignación eficiente, en el sentido de que los precios de reserva se igualan a los costes marginales efectivos generados por cada alumno**. Esto implica que los alumnos de mayor valía suelen lograr precios relativamente favorables y que se produce un subsidio cruzado desde alumnos de menor capacidad a los de mayor, al estar dispuestos los primeros a pagar un precio superior por disfrutar de los peer effects facilitados por la presencia de los segundos.

Pasando a un marco intertemporal que incluye acumulación de capital humano con peer effects y cupones, un trabajo representativo con OLG es el de **Caucutt (2002,2004),**

---

[208] Los trabajos de Nechyba se refieren a los condicionantes de una política de cupones en una economía con estratificación espacial, á la Benabou. Dado que este enfoque no incluye la modelización explícita del capital humano se omite en este capítulo, al quedar cubiertos los aspectos fundamentales por las restantes contribuciones analizadas.

que se basa en un marco muy similar al descrito de Epple, solo que con incertidumbre. Este último modelo considera a los padres divididos en 4 categorías, de acuerdo con las posibles combinaciones de 2 niveles en que se observan 2 variables distintas: **capital humano** alto o bajo, no directamente observable y **habilidad innata** para el aprendizaje, escasa o elevada, que se transmite de padres a hijos y es observable. En general la acumulación de capital humano que fomenta la asistencia a la escuela tiende a ser superior cuando la habilidad innata del individuo es más alta. Las preferencias de los adultos, suponiendo 2 períodos de vida, dependen de su consumo en la madurez y el capital humano atesorado por sus hijos. Los padres, que no pueden solicitar ningún crédito para financiar la educación de su descendencia, carecen de control completo sobre el capital humano de sus hijos, solamente parcialmente sobre sus determinantes, en dos sentidos: i) Existe una gama completa de escuelas, pudiendo determinar solamente los padres la probabilidad de que sus hijos asistan a cada una de ellas -al reservarse las escuelas la facultad de seleccionar a sus alumnos-. En este sentido el resultado del problema de optimización es una lotería, tal que en una segunda fase este juego de probabilidades permita explotar las posibilidades de negociación entre grupos de adultos que veremos a continuación; ii) El capital humano final que estos acumulan dependerá tanto de su habilidad innata, como del entorno escolar y del gasto educativo que lleva a cabo la escuela. Además será necesario el pago de un precio por recibir los servicios de la escuela, de modo que la restricción presupuestaria flujo la suma de sus empleos (consumo y el gasto esperado escolar) a su renta laboral, que se iguala a su capital humano. Esto es, el problema de optimización para un padre de tipología j responde al siguiente perfil:

$$U = \ln\left(C_s^{s-1,j}\right) + \xi \sum_{i=0}^{I} \pi_{is}^{j} \ln\left(a_{s+1}^{h,i}\right); \sum_{i=0}^{I} \pi_{is}^{j} = 1 \quad (5.98)$$

$$C_s^{s-1,j} + \sum_{i=0}^{I} \pi_{is}^{j} p_{is}^{j} \leq a_s^h \quad (5.99)$$

Los precios quedan afectados por el superíndice j, indicando que las escuelas pueden libremente discriminar precios y cargar márgenes diferentes a cada categoría de niño según su habilidad innata, que puede verificar a partir de indicios externos. En este caso la cantidad de servicios demandada a cada una de las eventuales escuelas es fijo (se supone normalizado a 1), frente a otros modelos analizados antes en los que se subsume precio y cantidad de servicios en la variable gasto en educación privada (o con cargo a cupones) de los padres. La función de producción de capital humano, siendo ω la habilidad innata de los niños, depende multiplicativamente de 3 inputs: dicha habilidad, la habilidad media de los niños que se acogen a la escuela y su gasto medio por alumno x:

$$a_{s+1}^{h,i} = B(\omega_s)^{\eta}\left[\sum_{j=1}^{2} N_{js}^{i}\omega_s\right]^{\varepsilon}\left(x_s^{hi}\right)^{\gamma} \quad (5.100)$$

El capital humano de los padres no juega, pues, ningún papel activo en la formación de los niños, tan solo su dotación genética. Por otro lado, a pesar de estar fijado el número de tipos de escuelas, el número de escuelas dentro de cada variedad es endógeno y en el momento en que los beneficios (como diferencia entre facturación por su total de alumnos y los gastos educativos) se hagan negativos, la escuela sale del mercado. Junto al problema descentralizado que se ha descrito antes también puede formularse el del planificador, con una suma ponderada de las utilidades de cada tipo de padre como función objetivo sujeta a la restricción de recursos, dada por la igualdad entre la suma del consumo medio privado y el consumo total de recursos de las escuelas, por un lado, y la totalidad de la producción llevada a cabo en dicha economía, por otro. El equilibrio general en este sistema puramente privado se caracteriza por la elección de los padres de su consumo y la lotería de escuelas para los niños; mientras, las escuelas maximizan su beneficio en el nivel de educación por alumno que proporcionan.

Una característica del régimen privado es que, cuando en una escuela conviven alumnos de diferentes habilidades, los de menor habilidad están efectuando un subsidio a los de mayor habilidad: aunque en principio los primeros preferirían pagar menos, realizan un intercambio implícito con los segundos, de manera que elevan el nivel medio de la escuela a cambio de recibir una influencia más beneficiosa a través de la tecnología educativa. Además **en una misma escuela no podrán convivir alumnos de distinta extracción económica pero con la misma habilidad, ya que ambos preferirían un nivel de gasto educativo diferente**. Así, ricos y pobres hábiles, por ejemplo, no coincidirán en el mismo centro y lo mismo sucedería con los no diestros. La mezcla entre pobres e incapaces y ricos capaces tampoco será una asignación de equilibrio, ya que implicaría que los primeros deberían subsidiar a los ricos y además aceptar entrar en un centro con un precio más elevado del que estarían dispuestos a pagar, al aspirar a un nivel educativo más bajo. Sin embargo la mezcla entre ricos incapaces y pobres capaces sí sería una combinación de equilibrio, ya que los primeros estarían en condiciones de subsidiar a los segundos, al tiempo que los ricos se benefician de un entorno más adecuado para el aprendizaje de sus hijos.

Definido este marco, se comparan los resultados en términos de bienestar y desigualdad entre un régimen mixto y un mixto con cupones. El primero consiste en que existe una escuela pública como una opción más dentro de la cartera de escuelas, financiada con cargo a impuestos que recaen sobre todos los agentes y que no entraña la necesidad de pago de matrícula. En este régimen, los ricos tenderán a agruparse en escuelas privadas, impidiendo la movilidad social. **Los resultados en términos de bienestar de esta asignación se comparan con otra en la que interviene la escuela pública (como una opción más para la formación de la cartera de cada familia), con cupones para todos aquellos que deseen abandonar el sistema público y pasar a uno privado**. De esta manera, la introducción de los cupones vuelve a producir el doble efecto que venimos encontrando en anteriores modelos, de mayores recursos por alumno que queda en la pública (en la medida en que la cuantía del cupón sea inferior al gasto por alumno en la escuela pública, dado un volumen de impuestos) y reducción de los fondos totales para la pública.

Para cuantificar los resultados con mayor precisión, el modelo se calibra para Estados Unidos y se procede a distintas simulaciones combinando diferentes distribuciones iniciales de renta, tamaño de cupones o disponibilidad de financiación. El resultado es que, a medida que aumenta el tamaño de los cupones, se pasa de una pérdida neta de bienestar a una ganancia neta; **desde el punto de vista de la desigualdad, sin embargo, existe siempre un aumento, aunque se atenúa de un modo no lineal a medida que se eleva el tamaño de los cupones**[209]; **en cualquier caso tiende a producirse una pérdida de calidad en la escuela pública**, al ir migrando al sistema privado un número creciente de estudiantes cualificados, de forma que, incluso manteniendo el gasto por estudiante en esta última, la calidad se deteriora a consecuencia del peer effect negativo. Es interesante estudiar, sin embargo, las variaciones de bienestar por tipologías familiares. Las claramente perdedoras son las pobres y con hijos de escasa cualificación, ya que bajo un régimen público puro se beneficiaban de un peer effect gratis en la escuela pública, al convivir con estudiantes cualificados sin pagar un precio diferencial. Sin embargo, a medida que aumenta el tamaño del cupón la fuga de alumnos cualificados -primero ricos, luego pobres- es permanente y la asignación resultante, que replica en mayor medida a la del mercado competitivo, establece gradualmente un precio para dicho efecto externo. También perderán los ricos con hijos poco capaces, por razones similares, ya que en el régimen mixto deberán pagar mediante un subsidio cruzado para poder emparejarse con ni-

[209] Aunque los cupones se fijaran al nivel del gasto medio por estudiante en la escuela pública y esta desapareciera por completo, la configuración de la oferta no sería la misma que en un régimen privado sin cupones. La introducción de estos propicia una entrada de competidores al sector de la escuela privada y, a medida que crece su tamaño, determinadas escuelas marginales, con una calidad inferior a la de la empresa pública -bottom-feeders, en terminología de Epple (2008)- pueden ir recogiendo a los hijos de las familias mas desfavorecidas a cambio de un precio muy bajo, reflejo tanto de niveles muy bajos de educación por alumno como del aglutinamiento de estudiantes con escasa cualificación.

ños pobres y capaces; no obstante, a medida que el tamaño de los cupones se eleva los impuestos que pagan se mantienen constantes pero reciben una mayor cantidad en cupones, por lo que sus pérdidas se atenúan. **Los principales ganadores son, por una parte, los ricos con niños capacitados,** ya que desde el primer momento los cupones les permiten agruparse entre sí constituyendo escuelas de élite sin necesidad de pagar subsidios cruzados[210], **pero también, y este un resultado esencial, los pobres con hijos capacitados,** ya que el mercado pondrá un precio a su peer effect y a medida que crecen los cupones podrán efectuar emparejamientos más eficientes con ricos no capacitados.

Finalmente, cuando los cupones se distribuyen selectivamente solo a las rentas bajas, la distribución no mejora, pero los resultados en bienestar son inferiores. La principal ventaja de los cupones selectivos es que no merman en la misma medida el gasto por estudiante en la escuela pública, aspecto del cual se beneficia el único segmento que gana con esta política en comparación con una de cupones generalizados: los pobres no cualificados. Si estos últimos deciden quedarse en la escuela pública, tendrán más recursos que el último sistema y si se van, podrán tener acceso a un peer effect más favorable. Los ricos capaces pierden, ya que aunque tendrán acceso a la empresa privada -aun sin cupones- dejarán de ingresar el importe del cupón. Los ricos con baja capacitación perderán sensiblemente, ya que pierden la posibilidad de emparejarse eficientemente y los pobres capacitados también pierden, ya que, si salen de la escuela pública, dejarán de poder emparejarse con los ricos no capacitados y disfrutar de un subsidio cruzado y si se quedan, convivirán con una proporción superior de no cualificados, producto del mayor atractivo de la escuela pública para los pobres no cualificados bajo esta política.

Epple y Romano (2008) demuestran en un marco similar al de Caucutt que una política de distribución selectiva de los cupones a los individuos menos cualificados no genera una corrección sustancial de los problemas de desigualdad de los cupones universales, sino tan solo una recomposición de sus rentas disponibles a posteriori. En el mismo trabajo, **Epple demuestra que la estructura del cupón que consigue evitar estos problemas de cream-skimming sería una que se articulase sobre una base individualizada, tal que se asignase a cada individuo un importe igual al coste efectivo marginal que generaría en la escuela si estas albergasen una distribución uniforme de alumnado y gastasen todo el cupón en gasto por alumno**; adicionalmente, todas las

[210] De hecho, si el régimen público permite antes de la introducción de los cupones la libre elección entre escuela pública y privada, en cualquier caso los ricos capaces optarán por esta última. Con cupones, además podrán beneficiarse de subsidios cruzados.

empresas y estudiantes derían ser obligados a participar y, las primeras, a aceptar el cupón como precio de sus servicios. Bajo este esquema, llevado a un nivel que sustituyera por completo a la escuela pública y si las escuelas privadas compitieran entre sí: i) todas ellas acabarían consumiendo íntegramente el cupón en una mejora de la calidad, una vez descontada la “prima” que implican los alumnos de peor cualificación, siendo además el nivel proporcionado del cupón eficiente desde la perspectiva de formación de precios y ii) todos los estudiantes serían igualmente deseables, por lo que no se generaría estratificación alguna, al internalizarse completamente los peer effects. Sin embargo, un esquema de esta clase forzaría a que el gobierno dispusiera de una información completa sobre la tipología de cada individuo y que el mercado no presentara otros costes de transacción derivados de la movilidad familiar entre distritos, no existiera una estratificación previa por niveles de renta en barrios, etc.

Por otro lado este análisis es esencialmente estático y no contempla problemas de riesgo moral en la aplicación de esfuerzo por los estudiantes a la hora de aprovechar los servicios de la escuela e incorporarlos a su tecnología de aprendizaje; cuando estas consideraciones se incorporan al análisis, sin embargo, a pesar de minimizarse el problema de la desigualdad los incentivos al aprovechamiento escolar pueden empeorar en un marco en el que sistemáticamente los estudiantes con una capacidad inferior reciben un cupón superior, al generar un mayor coste efectivo marginal a la escuela[211]. La obligación

---

[211] En un contexto más general, **Orazem y Tesfatsion (1997)** demuestran en un marco de OLG que, cuanto más igualitaria ex post resulte una estructura de transferencias públicas, tanto más se reduce la tasa de retorno del capital humano para los jóvenes, ya que estos últimos, para un esfuerzo dado, podrán afectar su renta marginal solo en la medida que puedan alterar la renta media; por tanto el efecto negativo se refuerza a medida que se incrementa el número de familias subvencionadas. La acumulación de capital humano depende tanto de la inversión realizada por los padres como por el propio esfuerzo desarrollado por los hijos, el cual a su vez depende de la tasa de retorno esperada. Las transferencias generan, pues, un efecto renta positivo gracias al incremento de las inversiones de los padres -que son proporcionales a su renta disponible, creciente respecto al tamaño de la transferencias- y, al mismo tiempo, un efecto desincentivo por su actuación sobre la tasa de retorno. Dependiendo del número de familas beneficiarias de las subvenciones, el segundo pudiera alcanzar un tamaño suficiente como para llegar a predominar sobre el primero, con el consiguiente impacto contractivo sobre el crecimiento de la economía a largo plazo. El argumento no es directa y completamente extrapolable a la regla óptima de diseño del cupón de Epple, aunque es evidente que esta regla debilita la relación entre el esfuerzo aplicado por el estudiante y la tasa de retorno obtenida, salvo que la propia entrega del cupón se condicione a una verificación del esfuerzo previo del candidato.

de participación a todos los estudiantes y escuelas es también de difícil aplicabilidad[212]. **La solución por tanto es discutible en cuanto se analiza en un marco dinámico y existe un problema de observabilidad del esfuerzo.**

Más allá de la cuestión de la estructura óptima de los cupones, el problema de la no observabilidad del esfuerzo es crucial a la hora de analizar las ventajas comparativas de la política de cupones. En el análisis estándar de la teoría de capital humano se supone que el comportamiento del individuo en la producción del activo es plenamente eficiente, situándose sobre su frontera de producción dada una cantidad de inputs. Sin embargo, cuando existe información imperfecta sobre el verdadero stock de los agentes (y, por tanto, estos son heterogéneos) en el mercado de trabajo, este no tiene por qué ser el caso. Así, en un contexto de información perfecta, Friedman (1962) consideraba que, cuando las escuelas no pueden discriminar en la admisión del alumnado, la libre competencia permite que sobrevivan las más productivas, tendencia que refuerzan los cupones al hacer más dinámica la competencia en el sector privado por la captación de alumnos. Sin embargo, en un entorno como el propuesto por Caucutt en el que los padres se enfrentan solamente a loterías y las escuelas se reservan la admisión, los cupones pueden exacerbar los problemas de riesgo moral sobre el esfuerzo cuando existe información imperfecta en el mercado de trabajo. Esta dimensión, que no es cubierta por los trabajos de Caucutt, es abordada por algunos trabajos como el de MacLeod y Urquiola (2012), quienes demuestran que en este último contexto el prestigio de las escuelas es una fuente de información clave para las empresas, aunque este factor puede relajar el esfuerzo de los estudiantes para acumular capital humano eficientemente. Desde este prisma y fuera en sentido estricto del análisis de estos dos autores, los cupones, al acentuar la competencia entre las escuelas por construir una reputación, llevan a estas a ser más selectivas en cuanto a la calidad media de su alumnado -medida esta por sus habilidades innatas-, aspecto que Caucutt no refleja. Esto implica que los cupones pueden reforzar este problema de incentivos adversos para aquellos alumnos que asisten a las escuelas de mayor prestigio, especialmente si se modeliza este problema como un juego de dos fases, en la línea

[212] En referencia a este problema concreto, Epple y Romano (2002, 2008) proponen algunos mecanismos alternativos, como un importe del cupón lineal, con un elemento fijo y otro que reflejara el coste marginal eficiente individual. No obstante existe una relación de intercambio clara entre la dimensión del incentivo y los costes fiscales del instrumento, ya que probablemente habría escuelas de élite que difícilmente estarían dispuestas a aceptar salvo con un componente constante elevado. Dicho elemento fijo además puede pasar a ser función de la capacidad del estudiante cuando existen efectos externos ligados a la acumulación de capital humano diferentes para cada grupo, aunque en este caso esta configuración se debería a razones de eficiencia y no de desigualdad; véase Eden (1994).

de MacLeod y Urquiola. Sin embargo, si el juego se repite y la relajación del esfuerzo tiene una magnitud suficiente como para detectarse a posteriori por las empresas, el argumento se debilita, ya que la posible pérdida de reputación obligaría a las escuelas a estrechar el control sobre el esfuerzo de los alumnos para aumentar la correlación entre su verdadero nivel de capital humano y aquel que ellas certifican ante los demandantes del mercado de trabajo.

Una extensión de la modelización de Epple-Caucutt que afecta directamente a las posibilidades de acumulación de capital humano es la endogeneización de la productividad de las diferentes escuelas que componen la lotería, en la medida en que esta pueda ser sensible a la competencia más intensa que fomenta un régimen de cupones. En particular, la literatura ha abordado, especialmente desde un punto de vista empírico, el impacto que estos pueden tener sobre los incentivos que determinan la calidad de la empresa pública, si bien el grueso de la literatura[213] lo ha hecho desde un punto de vista estático y la integración dentro de modelos dinámicos de capital humano es todavía un reto pendiente. No obstante, las conclusiones a este respecto son ambiguas. A modo de ejemplo, **McMillan (2005)** propone un modelo en el que la escuela pública maximiza sus beneficios respecto a la variable esfuerzo (no confundir con gasto por alumno), que puede asociarse con eficiencia o productividad. De este modo, los beneficios por alumno son iguales a las transferencias del gobierno, constantes, menos los costes derivados de la aplicación del esfuerzo; el beneficio total se obtiene multiplicando dicho margen unitario por el número total de alumnos, dependiente a su vez positivamente del esfuerzo en la medida en que la calidad escolar es un bien normal y constituye una variable decisiva en la elección de una escuela pública o privada, toda vez que la primera es gratis. La población se estructura en porcentajes fijos de familias de rentas bajas y altas. Dado que las familias más pudientes están dispuestas a pagar más por la calidad, el esfuerzo mínimo que se exigirá a la escuela pública será más elevado en el caso de las rentas altas que en el de las bajas. Cuando se introducen los cupones, la calidad de la escuela pública, ante el incremento de la calidad endógena de las privadas, alcanzará un equilibrio en el umbral de calidad que exigen las rentas altas siempre que la maximización de su beneficio le conduzca a atender al 100% de la población. **Sin embargo, si en equilibrio solo atiende a las rentas bajas (supuesto que sirva a un cierto segmento de la población), la introducción de los cupones puede ser contraproducente, al inducir a la escuela pública a reducir su nivel de calidad hasta el umbral exigido por los más pobres -**piénsese, por ejemplo, en una dimensión del cupón tal que provoque un incremento sustancial de la calidad

[213] Véase Hoxby (2003), McMillan (2005) o Ferreyra (2007, 2012) como ejemplos más representativos entre los trabajos teóricos, y entre los empíricos más recientes.

en el segmento de escuelas privadas, tal que la fijación de la calidad de la escuela pública en el umbral de las familias ricas le forzara a incurrir en pérdidas-.

Las implicaciones en bienestar del sistema de cupones quedan, por lo tanto, mauy matizadas cuando se introduce el peer effect, al depender positivamente la equiparación en la formación de capital humano de la heterogeneidad de los emparejamientos entre tipologías de habilidad en las escuelas -dentro de aquellas económicamente factibles-. Así pues, frente a otros modelos en los que un tamaño importante del cupón se traducía en fugas masivas del sistema público y un deterioro en la calidad del mismo, aquí estos efectos pueden verse compensados por un enriquecimiento de la combinatoria para los pobres, siempre que los cupones tengan un tamaño suficiente como para que estos efectos predominen sobre las pérdidas de bienestar para los individuos pobres y con menos capacidad.

C) La interacción entre distintos instrumentos del presupuesto publico. Los instrumentos de promoción educativa, y en particular la provisión pública, está interrelacionada con otros parámetros fiscales (subvenciones, impuestos) destinados a la promoción de ciertas variables que se determinan en equilibrio general conjuntamente con la inversión en capital humano, propio o de la siguiente generación. En ocasiones esta operativa simultánea puede privar de eficacia a los segundos, por lo que su diseño idealmente debería simultáneo. De esta tensión entre nivel de financiación y distorsiones ya se ha dejado constancia al hablar del problema de la imposición óptima, pero en este apartado se hará una incursión más bien en las conexiones existentes entre los distintos capítulos de gasto. A continuación se proporcionan dos ejemplos que ilustran esta problemática, uno de ellos hace referencia a la provisión pública y otro a impuestos y subvenciones, pero podría ser fácilmente adaptable a un caso con provisión.

El primero de ellos concierne, en un marco de fertilidad exógena, a la interacción existente entre los regímenes de pensiones PAYG y las inversiones en capital humano. **Glomm y Kaganovich (2003)** se centran en estudiar los efectos sobre la desigualdad de la alteraciones en los parámetros básicos de financiación de este tipo de programas, destacando la interacción entre ambos. Para ello desarrollan un modelo con agentes de 2 períodos de vida y ubicados dentro de dinastías. Las preferencias, logarítmico-aditivas y con un grado de altruismo limitado, se definen en el consumo en la juventud, la vejez y el stock de capital humano heredado por los descendientes más inmediatos. La heterogeneidad de los agentes surge de sus preferencias, ya que aunque las utilidades marginales de los dos primeros argumentos de las preferencias son comunes a todos los miembros de una cohorte, la tercera difiere como reflejo de variados grados de altruismo, lo que justifica asignaciones diferentes en función de la tipología de individuo y también dotaciones distintas al comienzo de la vida. Durante la juventud los agentes nacen con una determinada dotación heredada de capital humano que les posibilita obtener rentas del trabajo, dividiendo su tiempo entre el cuidado/educación de su descendencia (n_s^h) y el trabajo de mercado. Los empleos consistirán en el consumo, el ahorro con el que financiar el ahorro de su vejez (en la que este es complementado por las pensiones) y la inversión en la educación de sus hijos; la tecnología de esta última dependerá del capital humano de partida, así como inputs de mercado proporcionados por los padres y aportaciones públicas, en una estructura similar a la utilizada por Glomm y Ravikumar (1992) o Boldrin (2005a). Esta función tomaría la forma:

$$a_{s+1}^{hi} = B\left(a_s^{hi} n_s^{hi}\right)^{\varepsilon}\left(E_s + bx_s^{hi}\right)^{\gamma};\ 0<\gamma\leq 1;\ 0<\varepsilon\leq 1 \quad (5.101)$$

Véase que cuando $b=0$ tendríamos en esencia la misma estructura que en Glomm y Ravikumar; asímismo $n_s^h = 1$ en Boldrin (2005a), con la peculiaridad de que en este último artículo el tiempo se referiría al invertido por los jóvenes, mientras que Glomm y Kaganovich consideran el tiempo de educación dedicado por la generación de los padres, que al ser sustitutivo del tiempo laboral no puede igualarse a 1. Todas las variables son diferentes según la tipología de agente, excepto la contribución de la financiación pública, de la que todos los individuos se benefician por igual. El gobierno gestiona dos impuestos diferentes, de forma que ambos consisten en un tipo proporcional que grava las rentas del trabajo en el primer período de vida; con uno de ellos financia pensiones a los mayores sobre una base “pay as you go” y con el otro su aportación material al sistema educativo.

La interacción entre los dos instrumentos puede observarse tanto cuando b=0 como cuando es positivo, caso en el que existirá sustituibilidad entre gastos educativos en provisión públicos y privados. Supongamos que se eleva el tipo impositivo que financia la provisión pública, manteniendo constantes las cotizaciones a la SS. El resultado será una disminución de la renta después de impuestos, con la consiguiente contracción del ahorro (dadas las preferencias logarítmicas) y la inversión en capital físico, por lo que el tipo de interés de equilibrio se incrementa. Al mismo tiempo, disminuye la producción y por tanto la base sobre la que se recaudan las transferencias a los mayores. El input privado en la tecnología de acumulación es proporcional al stock de capital humano y tiene un término constante que depende positivamente de dichas pensiones y negativamente de l renta de que se dispone en la vejez. Sin embargo, los efectos comentados se cancelan perfectamente, por lo que el tiempo dedicado a la educación de los niños no se resiente. Si, por el contrario, se deseade preservar el equilibrio presupuestario y el aumento del tipo para financiar la educación fuese acompañado de un descenso de las cotizaciones a la seguridad social, el efecto neto sería de descenso de la financiación en la vejez, por lo que disminuiría la aportación privada a la educación de los niños, aumentando la desigualdad[214]. El análisis se refuerza cuando existe un grado de sustituibilidad positivo con los gastos educativos privados, en cuyo caso un aumento de la financiación para provisión pública llevaría consigo. Cuando $b > 0$ y el aumento el tipo que financia la educación pública, el gasto privado sufre una retracción parcial, pero aun así el gasto total aumenta en términos netos. El aumento de este término eleva la tasa de retorno de la inversión en tiempo[215] para educar a los niños, por lo que este gasto privado se expande y se reduce la desigualdad. A pesar de que el incremento del tipo impositivo genera una disminución de los recursos, ceteris paribus, a disfrutar en la vejez, el efecto neto es de un incremento del input tiempo dedicado a los niños. Cuando esta política se acompaña de un movimiento de signo contrario en el tipo de cotizaciones a SS, sin embargo, si el tipo que financia la educación es relativamente alto en comparación con el que permite cubrir las pensiones, el daño proporcional a la financiación en el tercer período de vida es mayor y el análisis numérico del modelo revela que el input educativo a los niños en términos de tiempo desciende, aumentando la desigualdad. **En resumen, los efectos cruzados entre los movimientos de ambos tipos deben estudiarse con cuidado dependiendo de factores como el tamaño inicial conjunto de la imposición, sus valores relativos o el grado de sustituibilidad entre aportaciones privadas y públicas.**

Cuando la fertilidad es endógena, los instrumentos al servicio de la promoción de la educación y de la natalidad también interactúan, al ser capital humano e hijos activos con un grado de sustituibilidad dentro de la cartera de las familias. Un ejemplo de esta interdependencia puede verse en el trabajo de **Cremer, Gahvari y Pestiau (2011),** quienes elaboran un modelo que combina fertilidad endógena con un modelo de pensiones tipo pay-as-you go. Su objetivo es mostrar cómo puede elaborarse la intervención pública óptima cuando se conjugan dos tipos de efectos externos: uno que afecta a la fertilidad subóptima en el contexto del sistema de pensiones y otro a la cantidad de educación. Esta

---

[214] Véase que no se hacen juicios sobre la cantidad total de inversión en educación generada, contabilizando tanto la pública como la privada, sino sobre el impacto que sobre la desigualdad tendría un trade-off entre la parte pública, generalizada a todos los niños por igual, y la privada, que dado el carácter heterogéneo del coeficiente de altruismo en las preferencias, acentuaría la desigualdad en la distribución del capital humano.

[215] Cuando b=0 la tasa de retorno no depende directamente X, ya que este puede expresarse en funcion del capital humano de los padres, lo que no sucede cuando los gastos privados entran en juego, al estar sujeta la suma de estas dos variables a rendimientos decrecientes.

contribución constituye un trabajo en la línea de otros más simples realizados por Peters (1995) y Meier y Wrede (2008), que van desplegando sucesivamente las posibilidades de un marco analítico de estas características, haciendo primero estocástica la relación entre la educación y el futuro laboral de los niños y posteriormente también la fertilidad de los padres.

En este contexto, los individuos viven 2 períodos. En el primero consumen, deciden el tamaño de su descendencia y la inversión en la educación de esta. En el segundo, que se corresponde con su jubilación, viven retirados y solamente consumen el producto de su trabajo anterior. La población es heterogénea, dividiéndose entre individuos de alto y bajo nivel educativo. La relación entre la inversión en educación y la tipología de individuos (que se supone será común a toda la descendencia de cada agente) es estocástica, de suerte que en la tipología resultante inciden 3 variables diferentes: la inversión en educación que efectúan los padres -existiendo una función de probabilidad creciente en esta de obtener un individuo con alto nivel-, la herencia genética y un componente aleatorio. En el primer período de vida el individuo recibe una renta, que será más alta si tiene un perfil de alto nivel; este podrá distribuirse entre el consumo de ambos períodos, los gastos de cuidado de los niños -iguales y constantes para todos- y la inversión en educación, que será variable por tipo de individuo; el residuo de la renta no gastada se invertirá para incrementar las posibilidades de consumo en la vejez. Además los jóvenes pagarán un cierto impuesto sobre una base “pay as you go”, que contribuirá a financiar los gastos en consumo de los mayores. La adquisición de educación no se endogeneiza, por suceder “fuera del modelo”[216]. Finalmente, las preferencias son aditivas en el consumo en cada una de las fases de la vida y el número de niños. La calidad en los niños entra en las preferencias a través del coeficiente vinculado a la fertilidad, que será mayor cuando estos son de alto nivel educativo. Por último, se supondrá que estas preferencias son específicas de cada uno de los 2 grupos de individuos en que se configura la sociedad.

En esta economía las externalidades relativas a las variables de educación y fertilidad se encuentran entrelazadas. Por un lado y en lo concerniente a las primeras, una mayor inversión en educación genera efectos que no se encuentran recogidos en la corriente de beneficios privados, como un aumento de la utilidad vía diferencial de coeficientes asociados al número de hijos y vía mayores rentas, así como una mayor proporción de individuos cualificados en el futuro, gracias a la mayor probabilidad de estos de transmitir satisfactoriamente los conocimientos a su descendencia; en última instancía, las mayores

[216] Se trata de un modelo pensado originalmente para 4 períodos y concentrado finalmente en 2 por motivos de simplicidad analítica, por lo que las variables endógenas se ha procurado reducir al máximo el número de variables endógenas.

rentas que genera una proporción de individuos cualificados propiciará una mejora en la sostenibilidad del sistema de pensiones y mayores posibilidades de financiar consumo en la vejez. Una propiedad crítica de las externalidades relacionadas con la inversión en educación es que su signo neto es siempre positivo en este modelo. También la elección del número de hijos está afectada por efectos externos ya que, para una proporción dada de agentes educados, afecta también el crecimiento de la población por la diferencia entre la tipología esperada de la descendencia entre unos y otros -es una externalidad análoga a la que se vio antes para la decisión sobre inversión en educación-. El signo neto de las externalidades en la tasa de fertilidad es indefinido: será inequívocamente positivo si un aumento en la fertilidad conduce a un incremento de la proporción de individuos más capacitados. Además los signos de la derivada parcial de la proporción de cualificados respecto a la fertilidad de cada grupo es opuesto; por lo tanto, en un caso la externalidad tendrá un signo positivo y en el otro, negativo.

La existencia de externalidades en las condiciones de primer orden implica que la solución descentralizada no será socialmente óptima y por tanto una alternativa radica en la introducción de instrumentos correctores que induzcan la provisión óptima de educación y fertilidad. Varias consideraciones serán necesarias, sin embargo. Primero, tanto en la solución del planificador como en la descentralizada se pone de manifiesto que el grupo que tenga una fertilidad más elevada, invertirá proporcionalmente menos en educación y viceversa. Este es un resultado que venimos encontrando recurrentemente en todos los modelos con fertilidad endógena, ya que el nivel de educación forma parte del precio relativo de la fertilidad en términos del bien de consumo. Sin embargo, el resultado es ambiguo en el sentido de que a priori no está determinado qué grupo es el que tiene mayor fertilidad y cuál mayor inversión en educación[217].

Por otra parte se distinguen dos clases de subvenciones: sobre la inversión en educación o sobre el número de hijos. Ambos tienen efectos positivos sobre la fertilidad, pero entre ellos hay un matiz diferencial importante: mientras los primeros reducen el coste de la inversión en educación sobre los costes totales, los segundos son neutrales entre ambos tipos de costes - los gastos en educación dentro de la restricción presupuestaria de los adultos se encuentran multiplicados por el número de hijos-. Teniendo en cuenta este factor, las subvenciones a la educación serán siempre positivas en la medida en que incrementarán la proporción de individuos educados y crearán una externalidad positiva,

[217] Esta ambigüedad desaparece cuando el coeficiente de la natalidad en la función de utilidad es igual para todos los tipos de niños. En este caso la inversión en educación será igual para ambos grupos de agentes y sin embargo la fertilidad será superior para los educados, al disponer de más renta.

independientemente de si se transfieren a individuos con altas o bajas habilidades. Sin embargo, las subvenciones a la natalidad generan un efecto sustitución neutro entre ambos objetivos -cantidad y calidad de la descendencia-, por lo que su impacto final sobre la proporción de individuos formados es ambiguo. Si la subvención se dirige al grupo que hace que aumente la proporción de individuos educados, será positiva; si no, generará efectos externos negativos sobre el conjunto de la sociedad. De aquí que, para un grupo, las subvenciones a la natalidad serán positivas y, para el otro, negativas (esto es, se introducirá un impuesto). Puesto que los subsidios a la educación deben ser siempre positivos, la suma de subvenciones a la natalidad y a la educación para al menos uno de los grupos deberá ser estrictamente positiva.

BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO V

Aghion, Philippe, Peter Howitt, and Violante, Giovanni A. (2002), 'General Purpose Technology and Wage Inequality', Journal of Economic Growth, 7 (4), 315-45.

Andolfatto, David and Martin Gervais (2006), 'Human capital investment and debt constraints', Review of Economic Dynamics, 9 (1), 52-67.

Azarnert, Leonid V. (2010), 'Free Education, Fertility and Human Capital Accumulation', J Popul Econ, 23 (2), 449-68.

Banerjee, Abhijit V. and Andrew F. Newman (1991), 'Risk-Bearing and the Theory of Income Distribution', The Review of Economic Studies, 58 (2), 211-35.

——— (1993), 'Occupational Choice and the Process of Development', Journal of Political Economy, 101 (2), 274-98.

Barham, Vicky, et al. (1995), 'Education and the Poverty Trap', European Economic Review, 39 (7), 1257-75.

Bearse, Peter, et al. (2013), 'Why Do Education Vouchers Fail at the Ballot Box?', European Journal of Political Economy, 32 26-37.

Bearse, Peter, Gerhard Glomm, and Debra Moore Patterson (2005), 'Endogenous Public Expenditures on Education', Journal of Public Economic Theory, 7 (4), 561-77.

Becker, Gary S. (1972), 'Schooling and Inequality from Generation to Generation: Comment', Journal of Political Economy, 80 (3), S252-55.

——— (1967), 'Human Capital and the Personal Distribution of Income: An Analytical Approach',

Becker, Gary S. and Barry R. Chiswick (1966), 'Education and the Distribution of Earnings', The American Economic Review, 56 (1/2), 358-69.

Bellettini, Giorgio and Carlotta Berti Ceroni (1999), 'Is Social Security Really Bad for Growth?', Review of Economic Dynamics, 2 (4), 796-819.

Benabou, Roland (1996), 'Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomic Implications of Community Structure and School Finance', The American Economic Review, 86 (3), 584-609.

——— (1996), 'Equity and Efficiency in Human Capital Investment: The Local Connection', The Review of Economic Studies, 63 (2), 237-64.

Berkowitz, Daniel and Mark Hoekstra (2011), 'Does high school quality matter? Evidence from admissions data', Economics of Education Review, 30 (2), 280-88.

Besley, T. (1995), 'Savings, Credit and Insurance (en Handbook of Development Economics vol. 3A)', 2123-207.

Bevan, D. L. (1979), 'Inheritance and the Distribution of Wealth', Economica New Series, 46 (184), 381-402.

Bils, Mark and Peter J. Klenow (2000), 'Does Schooling Cause Growth?', The American Economic Review, 90 (5), 1160-83.

Boldrin, Michele (2005), 'Public education and capital accumulation', Research in Economics, 59 (2), 85-109.

Boldrin, Michele and Ana Montes (2005), 'The Intergenerational State Education and Pensions', The Review of Economic Studies, 72 (3), 651-64.

Boldrin, Michele and Aldo Rustichini (2000), 'Political Equilibria with Social Security', Review of Economic Dynamics, 3 (1), 41-78.

Borjas, George J. (1992), 'Ethnic Capital and Intergenerational Mobility', The Quarterly Journal of Economics, 107 (1), 123-50.

——— (1995), 'Ethnicity, Neighborhoods, and Human Capital Externalities', The American Economic Review, 85 (3), 365-90.

Bowles, Samuel (1972), 'Schooling and Inequality from Generation to Generation', Journal of Political Economy, 80 (3), S219-51.

Caballé, Jordi (1995), 'Endogenous Growth, Human Capital, and Bequests in a Life-Cycle Model', Oxford Economic Papers New Series, 47 (1), 156-81.

Cameron, Stephen V. and Christopher Taber (2004), 'Estimation of Educational Borrowing Constraints Using Returns to Schooling', Journal of Political Economy, 112 (1), 132-82.

Card, David and Alan B. Krueger (1992), 'Does School Quality Matter? Returns to Education and the Characteristics of Public Schools in the United States', Journal of Political Economy, 100 (1), 1-40.

Cardak, Buly A. (2005), 'Education Vouchers, Growth and Income Inequality', Macroeconomic Dynamics, 9 (01), 98-121.

——— (2004), 'Education Choice, Neoclassical Growth, and Class Structure', Oxford Economic Papers, 56 (4), 643-66.

Carneiro, Pedro and James J. Heckman (2002), 'The Evidence on Credit Constraints in Post-Secondary Schooling*', The Economic Journal, 112 (482), 705-34.

Caselli, Francesco (1999), 'Technological Revolutions', The American Economic Review, 89 (1), 78-102.

Cass, David (1972), 'Distinguishing inefficient competitive growth paths: A note on capital overaccumulation and rapidly diminishing future value of consumption in a fairly general model of capitalistic production', Journal of Economic Theory, 4 (2), 224-40.

Castellá-Climent, Amparo and Rafael Doménech (2008), 'Human Capital Inequality, Life Expectancy and Economic Growth', The Economic Journal, 118 (528), 653-77.

Castelló-Climent, Amparo (2011), 'Channels through which Human Capital Inequality Influences Growth', International Economics Institute Working Papers, 1101

Caucutt, Elizabeth (2002), 'Educational Vouchers When There Are Peer Group Effects-Size Matters', International Economic Review, 43 (1), 195-222.

——— (2004), 'Evolution of the Income Distribution and Education Vouchers', Macroeconomic Dynamics, 8 (02), 226-49.

Caucutt, Elizabeth and Lance Lochner (2012), 'Early and Late Human Capital Investments, Borrowing Constarints and the Family', CBIC Working Papers, 20125

Caucutt, Elizabeth (2001), 'Peer group effects in applied general equilibrium', Econ Theory, 17 (1), 25-51.

Chakraborty, Shankha and Mausumi Das (2005), 'Mortality, Human Capital and Persistent Inequality', J Econ Growth, 10 (2), 159-92.

Chusseau, Nathalie, Joël Hellier, and Bassem Ben-Halima (2012), 'Education, Intergenerational Mobility and Inequality', HAL Working Papers, 00993472

Cooley, Thomas F., Jeremy Greenwood, and Mehmet Yorukoglu (1997), 'The replacement problem', Journal of Monetary Economics, 40 (3), 457-99.

Cremer, Helmuth, Firouz Gahvari, and Pierre Pestieau (2011), 'Fertility, human capital accumulation, and the pension system', Journal of Public Economics, 95 (11,Äì12), 1272-79.

Cremer, Helmuth, Denis Kessler, and Pierre Pestieau (1992), 'Intergenerational transfers within the family', European Economic Review, 36 (1), 1-16.

Cremer, Helmuth and Pierre Pestiau (2006), 'Intergenerational Transfer of Human Capital and Optimal Education Policy', Journal of Public Economic Theory, 8 (4), 529-45.

Davies, James B., Jie Zhang, and Jinli Zeng (2005), 'Intergenerational Mobility under Private vs. Public Education*', Scandinavian Journal of Economics, 107 (3), 399-417.

De la Croix, David and Matthias Doepke (2009), 'To Segregate or to Integrate: Education Politics and Democracy', The Review of Economic Studies, 76 (2), 597-628.

——— (2004), 'Public versus Private Education when Differential Fertility Matters', Journal of Development Economics, 73 (2), 607-29.

Del Rey, Elena and Miguel Ángel López García (2012), 'On Welfare Criteria and Optimality in an Endogenous Growth Model', Journal of Public Economic Theory, 14 (6), 927-43.

Del Rey, Elena and Miguel Angel Lopez-Garcia (2013), 'Optimal Education and Pensions in an Endogenous Growth Model', Journal of Economic Theory, 148 (4), 1737-50.

Docquier, Frederic and Philippe Michel (1999), 'Education Subsidies, Social Security and Growth: The Implications of a Demographic Shock', The Scandinavian Journal of Economics, 101 (3), 425-40.

Docquier, Frederic and Oliver Paddison (2003), 'Social security benefit rules, growth and inequality', Journal of Macroeconomics, 25 (1), 47-71.

Docquier, Frederic Michel, Oliver Paddison, and Pierre Pestieau (2007), 'Optimal accumulation in an endogenous growth setting with human capital', Journal of Economic Theory, 134 (1), 361-78.

Durlauf, Steven N. (1996), 'A Theory of Persistent Income Inequality', Journal of Economic Growth, 1 (1), 75-93.

——— (1994), 'Spillovers, Stratification, and Inequality', European Economic Review, 38 (3), 836-45.

Eckstein, Zvi and Itzhak Zilcha (1994), 'The effects of compulsory schooling on growth, income distribution and welfare', Journal of Public Economics, 54 (3), 339-59.

Eden, Benjamin (1994), 'How to Subsidize Education: An Analysis of Public Vouchers', Unpublished manuscript,

Ehrlich, Isaac and Jinyoung Kim (2007), 'The Evolution of Income and Fertility Inequalities over the Course of Economic Development: A Human Capital Perspective', Journal of Human Capital, 1 (1), 137-74.

Epple, Dennis and Richard Romano (2008), 'Educational Vouchers and Cream Skimming', International Economic Review, 49 (4), 1395-435.

——— (2011), 'Economic Modeling and Analysis of Educational Vouchers', Annual Review of Economics Annu. Rev. Econ., 4 (1), 159-83.

Epple, Dennis and Richard E. Romano (1998), 'Competition between Private and Public Schools, Vouchers, and Peer-Group Effects', The American Economic Review, 88 (1), 33-62.

——— (1996), 'Public Provision of Private Goods', Journal of Political Economy, 104 (1), 57-84.

——— (1996), 'Ends Against the Middle: Determining Public Service Provision When There Are Private Alternatives', Journal of Public Economics, 62 (3), 297-325.

Fan, C.Simon and Jie Zhang (2013), 'Differential fertility and intergenerational mobility under private versus public education', J Popul Econ, 26 (3), 907-41.

Fernandez, Raquel and Richard Rogerson (1998), 'Public Education and Income Distribution: A Dynamic Quantitative Evaluation of Education-Finance Reform', The American Economic Review, 88 (4), 813-33.

Fernández, Raquel and Richard Rogerson (2003), 'Equity and Resources: An Analysis of Education Finance Systems', Journal of Political Economy, 111 (4), 858-97.

Fernandez, Raquel and Richard Rogerson (1995), 'On the Political Economy of Education Subsidies', The Review of Economic Studies, 62 (2), 249-62.

Ferreyra, Maria Marta (2007), 'Estimating the Effects of Private School Vouchers in Multi-district Economies', The American Economic Review, 97 (3), 789-817.

Ferreyra, Maria Marta and Pierre Jinghong Liang (2012), 'Information Asymmetry and Equilibrium Monitoring in Education', Journal of Public Economics, 96 (1,Äì2), 237-54.

Fioroni, Tamara (2010), 'Child mortality and fertility: public vs private education', Journal of Population Economics, 23 (1), 73-97.

Forni, Lorenzo (2005), 'Social security as Markov equilibrium in OLG models', Review of Economic Dynamics, 8 (1), 178-94.

Friedman, Milton (1962), 'The Role of Government in Education', Capitalism and Freedom, 85-107.

Galor, Oded and Omer Moav (2004), 'From Physical to Human Capital Accumulation: Inequality and the Process of Development', The Review of Economic Studies, 71 (4), 1001-26.

——— (2000), 'Ability-Biased Technological Transition, Wage Inequality, and Economic Growth', The Quarterly Journal of Economics, 115 (2), 469-97.

Galor, Oded and Daniel Tsiddon (1997), 'Technological Progress, Mobility, and Economic Growth', The American Economic Review, 87 (3), 363-82.

Galor, Oded and David N. Weil (2000), 'Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and beyond', The American Economic Review, 90 (4), 806-28.

Galor, Oded and Joseph Zeira (1993), 'Income Distribution and Macroeconomics', The Review of Economic Studies, 60 (1), 35-52.

Ghatak, Maitreesh and Jiang Nien-Huei, Neville (2002), 'A Simple Model of Inequality, Occupational Choice, and Development', Journal of Development Economics, 69 (1), 205-26.

Glomm, Gerhard and Michael Kaganovich (2003), 'Distributional Effects of Public Education in an Economy with Public Pensions', International Economic Review, 44 (3), 917-37.

Glomm, Gerhard and B. Ravikumar (1992), 'Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality', Journal of Political Economy, 100 (4), 818-34.

——— (1998), 'Opting-out of publicly provided services: A Majority Voting Result', Social Choice and Welfare, 15 (2), 187-99.

Goodman, Joshua (2010), 'Skills, Schools and Credit Constraints: Evidence from Massachussets', Education Finance and Policy, 5 36-53.

Gouveia, Miguel (1997), 'Majority rule and the public provision of a private good', Public Choice, 93 (3-4), 221-44.
Gradstein, Mark and Moshe Justman (1996), 'The political economy of mixed public and private schooling: A dynamic analysis', Int Tax Public Finan, 3 (3), 297-310.
Greiner, Alfred (2008), 'Human capital formation, public debt and economic growth', Journal of Macroeconomics, 30 (1), 415-27.
Han, Song and Casey B. Mulligan (2001), 'Human Capital, Heterogeneity and Estimated Degrees of Intergenerational Mobility', The Economic Journal, 111 (470), 207-43.
Hanoch, Giora (1967), 'An Economic Analysis of Earnings and Schooling', Journal of Human Resources, 2 (Summer 1967), 310-29.
Hansen, W. Lee; Weisbrod, Burton. A; Scanlon, W. J. (1970), 'Schooling and Earnings of Low Achievers', American Economic Review, 60 (June 1070), 409-18.
Hanushek, Eric A. (1986), 'The Economics of Schooling: Production and Efficiency in Public Schools', Journal of Economic Literature, 24 (3), 1141-77.
Hassler, John and Jos√© V. Rodr√≠guez Mora (2000), 'Intelligence, Social Mobility, and Growth', The American Economic Review, 90 (4), 888-908.
Hauser, Rober M. (1969), 'Schooling and the Stratification Process', American Journal of Sociology, 74 (May 1969), 587-611.
Hoxby, Caroline M. (2003), 'The Economics of School Choice', NBER Books,
Hoyt, William H. and Kangoh Lee (1998), 'Educational vouchers, welfare effects, and voting', Journal of Public Economics, 69 (2), 211-28.
Iyigun, Murat F. (1999), 'Public Education and Intergenerational Economic Mobility', International Economic Review, 40 (3), 697-710.
Jacobs, B. (2002), 'Optimal Taxation of Human Capital and Borrowing Constraints', Tinbergen Institute Discussion Papers, 02-0044/2
Jacobs, B. and A.L. Bovenberg (2011), 'Optimal Taxation of Human Capital and the Earnings Function', Journal of Public Economic Theory, 13 (6), 957-71.
Jacobs, B. and A.Lans Bovenberg (2010), 'Human capital and optimal positive taxation of capital income', Int Tax Public Finance, 17 (5), 451-78.
Jacobs, B., D. Schindler, and H. Yang (2012), 'Optimal Taxation of Risky Human Capital', The Scandinavian Journal of Economics, 114 (3), 908-31.
Jacobs, B. and H. Yang (2010), 'Second-Best Income Taxation with Borrowing Constraints',
Kaganovich, Michael and Itzhak Zilcha (1999), 'Education, social security, and growth', Journal of Public Economics, 71 (2), 289-309.
Lapan, Harvey E. and Walter Enders (1990), 'Endogenous fertility, Ricardian equivalence, and debt management policy', Journal of Public Economics, 41 (2), 227-48.

Ljungqvist, Lars (1993), 'Economic Underdevelopment: The Case of a Missing Market for Human Capital', Journal of Development Economics, 40 (2), 219-39.

Lloyd-Ellis, Huw (1999), 'Endogenous Technological Change and Wage Inequality', The American Economic Review, 89 (1), 47-77.

Lochner, Lance and Alexander Monge-Naranjo (2002), 'Human Capital Formation with Endogenous Credit Constraints', NBER Working Papers, 8815

Lochner, Lance J. and Alexander Monge-Naranjo (2011), 'The Nature of Credit Constraints and Human Capital', The American Economic Review, 101 (6), 2487-529.

MacLeod, W. Bentley and Miguel Urquiola (2012), 'Anti-lemons: School Reputation, Relative Diversity and Educational Quality', IZA Discussion Paper Series, 6805

Maldonado, Darío (2008), 'Education Policies and Optimal Taxation', Int Tax Public Finance, 15 (2), 131-43.

Maoz, Y. D. and Omer Moav (1999), 'Intergenerational Mobility and the Process of Development', The Economic Journal, 109 (458), 677-97.

McMillan, Robert (2004), 'Competition, incentives, and public school productivity', Journal of Public Economics, 88 (9,Äì10), 1871-92.

——— (2005), 'Erratum to "Competition, Incentives, and Public School Productivity"', Journal of Public Economics, 89 (5,Äì6), 1133-54.

Meier, Volcker and Mathias Wrede (2010), 'Pensions, Fertility, and Education', Journal of Pension Economics and Finance, 9 (01), 75-93.

Moav, and, Omer and Zvika Neeman (2012), 'Saving Rates and Poverty: The Role of Conspicuous Consumption and Human Capital*', The Economic Journal, 122 (563), 933-56.

Moav, Omer (2005), 'Cheap Children and the Persistence of Poverty', The Economic Journal, 115 (500), 88-110.

——— (2002), 'Income Distribution and Macroeconomics: the Persistence of Inequality in a Convex Technology Framework', Economics Letters, 75 (2), 187-92.

Mookherjee, Dilip and Stefan Napel (2007), 'Intergenerational mobility and macroeconomic history dependence', Journal of Economic Theory, 137 (1), 49-78.

Mookherjee, Dilip and Debraj Ray (2003), 'Persistent Inequality', The Review of Economic Studies, 70 (2), 369-93.

Neal, Derek (2002), 'How Vouchers Could Change the Market for Education', The Journal of Economic Perspectives, 16 (4), 25-44.

Nechyba, Thomas J. (1999), 'School Finance Induced Migration and Stratification Patterns: The Impact of Private School Vouchers', Journal of Public Economic Theory, 1 (1), 5-50.

——— (2000), 'Mobility, Targeting, and Private-School Vouchers', The American Economic Review, 90 (1), 130-46.

——— (2003), ‘Introducing School Choice into Multidistrict Public School Systems’, NBER Chapters, 10088

Nerlove, Marc, Assaf Razin, and Efraim Sadka (1988), ‘A Bequest-constrained Economy: Welfare Analysis’, Journal of Public Economics, 37 (2), 203-20.

Orazem, Peter and Leigh Tesfatsion (1997), ‘Macrodynamic Implications of Income-Transfer Policies for Human Capital Investment and School Effort’, Journal of Economic Growth, 2 (3), 305-29.

Owen, Ann L. and David N. Weil (1998), ‘Intergenerational earnings mobility, inequality and growth’, Journal of Monetary Economics, 41 (1), 71-104.

Peltzman, Sam (1973), ‘The Effect of Government Subsidies-in-Kind on Private Expenditures: The Case of Higher Education’, Journal of Political Economy, 81 (1), 1-27.

Perotti, Roberto (1993), ‘Political Equilibrium, Income Distribution, and Growth’, The Review of Economic Studies, 60 (4), 755-76.

Preston, Robb (2003), ‘Public Education or Vouchers? The Importance of Heterogeneous Preferences’, Economic Record, 79 (SpecialIssue), S74-84.

Rangazas, Peter (1995), ‘Vouchers and voting: An initial estimate based on the median voter model’, Public Choice, 82 (3-4), 261-79.

Rangel, Antonio (2000), ‘Forward and Backward Intergenerational Goods: A Theory of Intergenerational Exchange’, NBER Working Papers, 7518

Ray, Debraj and Peter A. Streufert (1993), ‘Dynamic Equilibria With Unemployment Due to Undernourishment’, Economic Theory, 3 (1), 61-85.

Riphahn, ReginaT. and Florian Schieferdecker (2012), ‘The transition to tertiary education and parental background over time’, J Popul Econ, 25 (2), 635-75.

Rosenzweig, Mark R. and Kenneth I. Wolpin (1994), ‘Are There Increasing Returns to the Intergenerational Production of Human Capital? Maternal Schooling and Child Intellectual Achievement’, The Journal of Human Resources, 29 (2), 670-93.

Saint-Paul, Gilles and Thierry Verdier (1993), ‘Education, democracy and growth’, Journal of Development Economics, 42 (2), 399-407.

Sequeira, Tiago, Marcelo Santos, and Alexandra Ferreira Lopes (2014), ‘Income Inequality, TFP and Human Capital’, MPRA Papers, 55471

Soares, Jorge (2006), ‘Borrowing Constraints, Parent Altruism and Human Capital Accumulation’, University of Delaware, Department of Economics. Unpublished.,

Stiglitz, Joseph E. (1981), ‘Equality, taxation and inheritance’, NBER Working Papers, N. 202 (september 1981),

Stinebrickner, Ralph and Todd Stinebrickner (2008), ‘The Effect of Credit Constraints on the College Drop-Out Decision: A Direct Approach Using a New Panel Study’, The American Economic Review, 98 (5), 2163-84.

Tamura, Robert (1994), 'Fertility, Human Capital and the Wealth of Families', Economic Theory, 4 (4), 593-603.

——— (1991), 'Income Convergence in an Endogeneous Growth Model', Journal of Political Economy, 99 (3), 522-40.

——— (2001), 'Teachers, Growth, and Convergence', Journal of Political Economy, 109 (5), 1021-59.

Torvik, Ragnar (1993), 'Talent, Growth and Income Distribution', The Scandinavian Journal of Economics, 95 (4), 581-96.

Weil, Philippe (1987), 'Love thy children: Reflections on the Barro debt neutrality theorem', Journal of Monetary Economics, 19 (3), 377-91.

Weinberg, Bruce A. (2001), 'An Incentive Model of the Effect of Parental Income on Children', Journal of Political Economy, 109 (2), 266-80.

Wildasin, David E. (1990), 'Non-Neutrality of Debt with Endogenous Fertility', Oxford Economic Papers New Series, 42 (2), 414-28.

Yang, H. (2010), 'Endogenous Borrowing Constraints, Human Capital Investment and Optimal Taxation', Konstanz Working Papers, 2010-4

Zhang, Jie (1996), 'Optimal Public Investments in Education and Endogenous Growth', The Scandinavian Journal of Economics, 98 (3), 387-404.

——— (2003), 'Optimal debt, endogenous fertility, and human capital externalities in a model with altruistic bequests', Journal of Public Economics, 87 (7,Äì8), 1825-35.

——— (1997), 'Government Debt, Human Capital, and Endogenous Growth', Southern Economic Journal, 64 (1), 281-92.

Zhang, Jie and Junsen Zhang (2005), 'The Effect of Life Expectancy on Fertility, Saving, Schooling and Economic Growth: Theory and Evidence', The Scandinavian Journal of Economics, 107 (1), 45-66.

Zhang, Liang and ScottL. Thomas (2005), 'Investments in Human Capital: Sources of Variation in the Return to College Quality', in Smart, JohnC. (ed.), 20 (Higher Education: Handbook of Theory and Research, Springer Netherlands), 241-306.

VI. Habilidades heterogéneas y políticas educativas en un mundo de Lucas.

El propósito de este capítulo es explorar un marco analíticamente tratable para la comparación de resultados de las diferentes políticas educativas (incluyendo la inacción pública) en un mundo sin convergencia como el descrito por Lucas en *The Mechanics of Economic Development* (1988) debido a los rendimientos constantes del capital humano en su tecnología de acumulación, en el que además las diferencias entre agentes pueden exacerbarse por la heterogeneidad de sus habilidades o, en términos de la modelización canónica del capítulo 4, por sus productividades de aprendizaje. La evaluación comparativa se ha procurado hacer lo más amplia posible, abarcando tanto instrumentos que comportan provisión pública de educación como aquellos que implican una mera redistribución de rentas y la herramienta básica es la comparación de la asignación de los agentes privados con la del planificador benevolente, que actúa como un *deus ex-machina* y nada tiene que ver con el gobierno, el cual actúa como un agente más que persigue sus propios objetivos. El estudio se realiza para distintas especificaciones de la tecnología de acumulación (principalmente con y sin peer effects, que como se verá suponen un cierto contrapeso a los rendimientos constantes del capital humano) y del grado de altruismo de los patriarcas familiares, que lleva a diferenciar resultados en un modelo de tipo dinástico o de generaciones solapadas (OLG).

VI.1. Modelo de agentes representativos y altruismo perfecto. Los individuos viven durante un período de vida, en el que consumen, trabajan y al final del cual tienen un descendiente -el número es exógeno en todo momento-. La formación tiene por único objeto la formación de un legado para la siguiente generación, dado que sobre la base de este capital humano i) los descendientes de todo hogar formarán sus rentas salariales y ii) se producirá un efecto externo en el aprendizaje sobre el capital social medio, como veremos. Todos los individuos, independientemente de su cualficación -este es un aspecto sobre el que se volverá a continuación-, tendrán un altruismo perfecto, de modo que se preocuparán por su propia utilidad y la de su descendiente; este hecho confiere de facto una dimensión infinita a su horizonte de planificación. Dado que todos los pagos de la acumulación de capital humano revierten sobre las generaciones siguientes, es este altruismo el único elemento del modelo que puede explicar la existencia de inversiones brutas positivas en este activo.

Existen dos grupos de individuos en la sociedad, completamente idénticos dentro de cada categoría, que se distinguen solamente por su predisposición al aprendizaje y más concretamente por la productividad multifactorial de su función de inversión bruta en capital humano. Se distingue cada uno de estos grupos por los superíndices q,u, siguiendo con la notación usada anteriormente, de suerte que $B^q > B^u$. Por lo demás no existirá ninguna otra diferencia relevante entre estos dos grupos de individuos, siendo su capital humano y tiempo de trabajo perfectamente sustituibles en la producción de mercado, si bien admitiremos la posibilidad de que el capital humano sea distinto al comienzo de cada dinastía, con $a_0^{hq} > a_0^{hu}$. Esta característica “biológica” se transmitirá de padres a hijos en cada hogar, por lo que la proporción entre unos y otros trabajadores será constante, con independencia del capital humano que puedan llegar a acumular. Conforme a este supuesto, la proporción de cualificados, m, vendrá dada por $m = \dfrac{N^q}{N^q + N^u}$. Se considera además una población de tamaño constante, hasta el momento en que introduzcamos OLG y fertilidad endógena.

Comenzando por el sistema de educación privada, supondremos que existe un proveedor de servicios educativos que podemos asociar con un sistema escolar. Este proporciona un input clave en forma de servicios de manera que, en combinación con el tiempo y el propio capital humano acumulado previamente, permite mejorar las habilidades; pueden asociarse los servicios de este intermediario con educación secundaria o terciaria, dependiendo del estadio de la vida del individuo en que este tome sus decisiones. En cualquier caso, se supondrá que desde el primer momento de su vida el individuo puede ofrecer su trabajo en el mercado de trabajo, lo que le llevará a incurrir en un coste de oportunidad por acudir a dicho proveedor de servicios educativos, que por lo demás impondrá un precio p^e por período por unidad de servicios contratada. Supondremos también que el tiempo que debe invertirse en la escuela es exógeno, de modo que:

$n_s^w = 1 - \overline{n}_s^h$ (6.1)

Antes de entrar en la descripción de las tecnologías, realizaremos una distinción importante entre capital humano social y capital humano medio ponderado. El primero consistirá en la mera agregación del acumulado en un período por los dos grupos de hogares, suponiendo que uno y otro son perfectamente intercambiables. De esta forma:

$a_s^h = N^u a_s^{hu} + N^q a_s^{hq}$ (6.2)

Mientras, el capital medio será una media ponderada del capital humano social:

$\left(a_s^h\right)_a = a_s^h / N = m a_s^{hq} + \left(1-m\right) a_s^{hu}$ (6.3)

Como propiedad relevante, puede destacarse que la tasa de crecimiento del capital total y la del capital medio será la misma, tal como puede comprobarse inmediatamente.

Hecha esta descripción general, la función de aprendizaje revestirá la siguiente identificación:

$$a_{s+1}^{hj} = a_s^{hj}\left[1 + \frac{\left(a_s^h\right)_a}{a_s^{hj}} B^j \overline{n}^h \left(E_s^{pr,j}\right)^{\gamma}\right] \text{ si } E_s^{pr,j} > 0;\ j = u,q;\ \psi_s = \frac{\left(a_s^h\right)_a}{a_s^{hj}}$$

$$a_{s+1}^{hj} = a_s^{hj} \text{ si } E_s^{pr,j} = 0;\ j = u,q \quad (6.4)$$

Este peer effect será una característica clave de la primera versión del modelo, en el sentido de que suaviza las diferencias iniciales existentes entre los niveles de stock de capital humano y las productividades; como veremos, posibilitará en última instancia la consecución de equilibrios estacionarios. Para los hogares u, se traduce en una influencia positiva de su entorno, al ser capital medio superior al propio, mientras que este efecto tiene un carácter moderador de la acumulación para las familias más cualificadas. No obstante, se supondrá que la "prima" que el peer effect aporta a los hogares más desfavorecidos no es lo suficientemente importante en el período inicial como para compensar su desventaja en la capacidad de aprendizaje, de modo que se cumplirá:

$$B^u \psi_0^u < B^q \psi_0^q \quad (6.5)$$

Como se aprecia en esta tecnología, los servicios educativos adquiridos se dispensan de forma que interactúan con el tiempo de aprendizaje aplicado por el hogar representativo (dichos servicios se denotan por el superíndice pr, para diferenciarlos de los suministrados por el gobierno dentro del régimen de educación pública, que recibirán el superíndice p). El tiempo de aprendizaje no tiene por qué coincidir estrictamente con el tiempo transcurrido en la escuela, incluso aunque toda la labor educativa tenga lugar en un foro físico; se partirá sin embargo del supuesto de que el número de horas invertidas en aprendizaje fuera de la escuela para superar sus programas educativos es común para todas las generaciones. La diversidad innata de la productividad del aprendizaje influiría más bien en la capacidad para transformar unos conocimientos en habilidades permanentes o, si se quiere, en dotar a los servicios educativos de una vertiente práctica. Esta tecnología reflejaría mediante este rasgo la dicotomía entre exámenes de evaluación basados en conocimientos téoricos y la capacidad de asimilación posterior de los mismos, que difiere como vemos entre individuos.

Podemos suponer que la economía alberga un número elevado de escuelas idénticas entre sí, cuyo comportamiento puede sintetizarse a través de una escuela representativa. A esta no se le permite realizar discriminación alguna en función del tipo de alumno, incluso aunque la tipología de aquel fuera detectable mediante una serie de pruebas previas a su ingreso. En consecuencia, aceptará todas aquellas solicitudes que reciba y, en la medida en que se supone que los dos grupos de población se encuentran uniformemente distribuidos por todo el territorio que comprende la economía nacional, tampoco se aprecia estratificación social en el agrupamiento de individuos por escuelas a consecuencia de su concentración geográfica. Una forma de justificar este resultado, a pesar de la existencia de peer effects, es que estos no sean suficientemente potentes como para compensar otros costes de transacción que pueda llevar consigo la movilidad geográfica para agruparse con otros individuos de una capacidad parecida, evitando así una configuración del modelo à la Benabou. Dicha escuela representativa utilizará como input para la provisión de los servicios que presta el bien compuesto (x^e), que se transforman en servicios educativos a través de una tecnología lineal que depende directamente del volumen de input aplicado e inversamente del nivel del capital humano medio social. Con ello se denota un mayor coste necesario para adaptarse a las necesidades de los alumnos a medida que el entorno social favorece una mayor sofisticación de estos. Esto sin perjuicio de que a cada agente, individualmente considerado, el grado de desarrollo de dicho entorno le facilite progresar más rápidamente en la adquisición de nuevas habilidades, dado un vector de inputs utilizados.

$$E_s^{pr}\left(a_s^h\right)=\frac{x_s^e}{\left(a_s^h\right)_a} \quad (6.6)$$

Tras este planteamiento late el supuesto de que es perfectamente posible combinar en una misma escuela el adiestramiento de individuos con distinto nivel de capital humano, sin que la heterogeneidad de agentes de lugar a segregación alguna. La ausencia de segregación es también la razón por la que el capital humano relevante en la función de producción de servicios educativos es el social. Por lo demás, supondremos que todos los costes asociados a la tecnología escolar son variables. Además, las escuelas fijan el precio de sus servicios de una forma totalmente egoísta y sin comprometerse a determinados objetivos en términos de aprendizaje de los alumnos, por lo que no se supondrá una mayor intensidad en la prestación de los servicios a aquellos individuos con una productividad menor en su tecnología educativa; la única diferencia, como hemos visto, se establece en atención a las capacidades de partida de un individuo al suscribir el contrato de prestación de servicios. El beneficio de estas unidades productivas podrá reflejarse, hechos estos supuestos, por medio de la siguiente función objetivo:

$$B_s^e = p_s^e E_s^{pr} - x_s^e = E_s^{pr}\left(p_s^e - \left(a_s^h\right)_a\right) \quad (6.7)$$

El equilibrio a largo plazo en el sector educativo corresponderá, dada esta tecnología, con aquella situación en la que el precio relativo de los servicios educativos se iguala al capital humano medio ponderado de la sociedad. Esto es, cada unidad de servicios se intercambiará por un número de unidades del numerario igual a dicho stock. Para los individuos más cualificados esto se traducirán en la entrega de un número de unidades inferior a su capital humano y, para aquellos con mayores dificultades en el aprendizaje, implicará un precio efectivo mayor que su verdadero stock. Este hecho no debe confundirse con la existencia de dos precios de equilibrio: en realidad puede entenderse que un servicio educativo es un producto diferente dependiendo del grado de cualificación del solicitante; el precio de equilibrio, único, fija una relación de 1 a 1 entre unidades del numerario y de capital humano social, que en realidad es una proxy del grado de sofisticación del servicio requerido. Desde la perspectiva del vaciado del mercado de estos servicios, la oferta tendría una elasticidad infinita y el nivel de servicios intercambiados sería determinado por exclusivamente por la demanda. En la medida en que las escuelas carecen de costes fijos no podría endogeneizarse la dimensión óptima de estas ni tampoco el número de las que operan en el mercado a largo plazo sujetas a la restricción de beneficios nulos.

La aplicación de estos servicios educativos tendrá además un carácter sine qua non en la producción privada de habilidades, de manera que cuando se decide adquirir una cantidad nula de los mismos, la inversión bruta se anulará; en tal caso el tiempo de hogar representativo se asignará íntegramente al trabajo. No se considerarán, como es habitual, equilibrios con asignación nula al tiempo trabajado. Supondremos que el capital humano utilizado en la producción de conocimiento es internalizado en su integridad en los procesos de decisión del individuo, por lo que los efectos externos se confinarán al sector del bien final.

El capital humano que interviene en la tecnología de aprendizaje tiene una tasa de depreciación nula y se va transmitiendo de padres a hijos. Como se aprecia en la ecuación descriptiva de su acumulación, el papel de este capital humano es el de un efecto externo y por tanto los individuos no internalizarán en sus procesos privados de optimización el efecto de la acumulación sobre la tasa de crecimiento. Además el capital humano es el social "medio", dado que la ecuación de acumulación se define en términos per cápita. Ningún hogar de cualquiera de los grupos considera que sus acciones tengan impacto sobre la tasa social de acumulación de capital humano, por lo que estos tomarán expectativas exógenas respecto a este en la elaboración de sus decisiones óptimas; tan sólo el planificador social benevolente endogeneizará apropiadamente esta variable.

La función de producción del bien compuesto se realizará, para simplificar el análisis, solamente a partir de trabajo efectivo. La ya comentada sustituibilidad entre tiempo de trabajo y eficiencia del mismo entre individuos de una y otra extracción se manifiesta en la existencia de rendimientos constantes privados en la totalidad del trabajo efectivo, entendiendo por tal el producto del capital humano agregado y el tiempo de trabajo (que será idéntico para ambos). Así: $L_s = a_s^h \overline{n}_s^w = \left[N^q a_s^{hq} + N^u a_s^{hu} \right] \overline{n}_s^w$. En la medida en que los hogares son heterogéneos se partirá del supuesto de que el móvil de la actuación pública es doble: la eficiencia, al haber efectos externos en el capital humano medio presente en el aprendizaje y la reducción de la desigualdad en el crecimiento de la renta, puesto que bajo los supuestos realizados los incentivos de inversión en este activo serían inferiores para aquellos cuya tasa de retorno sea inferior[218]. Dicha tecnología, de acuerdo con este supuesto, puede escribirse en términos agregados o per cápita, denotando la letra mayúscula los primeros y la minúscula los segundos:

$$Y_s = A\bar{n}_s^w \left[N^u a_s^{hu} + N^q a_s^{hq} \right] = AL_s \quad (6.8)$$

$$y_s = A\bar{n}_s^w \left[m a_s^{hq} + (1-m) a_s^{hu} \right] = Al_s \quad (6.9)$$

De aquí se deduce que el salario real por unidad de capital humano será la productividad marginal del trabajo efectivo, esto es:

$$e_s = A \quad (6.10)$$

El hecho de que este salario unitario sea igual para todo trabajador no significa que no exista disparidad de rentas ya que los ritmos de acumulación de habilidades serán, en general, diferentes para cada uno de los dos grupos.

El gobierno realiza una actividad para fomentar la acumulación de habilidades por los individuos: subsidios al precio de la educación desembolsado por los menos diestros, a fin de facilitar su acceso. Esta acción atiende simultáneamente objetivos de eficiencia y equidad, ya que como vimos los menos cualificados pagan un precio proporcionalmente superior al de los más cualificados por cada unidad de su capital humano. La puesta en práctica de estas políticas procede de un mandato constitucional, pero su cumplimiento procurará compatibilizarse al máximo, como veremos, con la consecución su propia función objetivo, que en principio no coincide con la de un planificador benevolente.

---

[218] En el capítulo 4 se estableció que, con rendimientos constantes a escala del capital humano en la función de aprendizaje y cuando la tasa de retorno consta de sus tres sumandos habituales, la parcial de la tasa de retorno respecto al parámetro de productividad B es indefinido, por serlo la parcial de las ganancias de capital. No obstante, la preocupación pública acerca de la disparidad de rentas queda justificada sobre todo en el estado estacionario, en el que la parcial de la tasa de retorno del tiempo respecto a B es inequívocamente positiva. Como se verá a continuación, sin embargo, la tasa de retorno respecto a los servicios escolares tendrá siempre una derivada parcial positiva respecto a B, tanto en equilibrio general ordinario como en estado estacionario. En cualquier caso para aligerar la estructura del análisis se circunscribirá el estudio del impacto de la actuación pública al estado estacionario.

La financiación de esta actuación procede del establecimiento de un tipo proporcional sobre las rentas laborales de todo individuo, no importa qué grado de cualificación muestre. Al objeto de compensar el impacto de este impositivo, se contempla también una transferencia de renta pura oara las familias menos cualificadas, cuyo monto total se calcula como un tipo fijo establecido sobre el nivel de capital humano social, pero desvinculado de cualquiera de las variables endógenas de aquellas familias a las que favorece. Esta última transferencia puede entenderse como una deducción de sus impuestos sobre la renta laboral. Por tanto la política fiscal presenta un rasgo diferencial esencial entre las familias según su grado de cualificación: mientras los más diestros solo se enfrentan a flujos negativos procedentes de los impuestos, los menos diestros ven alterada su restricción presupuestaria tanto por flujos negativos (impuestos sobre la renta) como positivos (transferencias de suma fija y subvenciones a las tasas académicas.

Supondremos que el gobierno es un agente más en la economía con su propia función objetivo en términos de consumo público, variable que podemos suponer correlacionada positivamente con la remuneración de los miembros del gobierno o con su grado de visibilidad en la sociedad y su prestigio. Esta función objetivo constituye el equivalente la función de utilidad y posee las mismas propiedades: ordinalidad, crecimiento monótono, concavidad y las condiciones de Inada en los límites en cero e infinito de la primera derivada, esto es:

$$V = \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s v(g_s);\ 0 < \delta < 1 \text{ (6.11)}$$

Por otro lado, el gobierno está sujeto constitucionalmente a una regla de estabilidad presupuestaria, que le obliga a preservar el equilibrio presupuestario período a período sin posibilidad de emitir deuda. Este condicionamiento implica que, al haber variables en la restricción presupuestaria de gobierno dependientes de endógenas del sistema, como mínimo uno de los parámetros fiscales deberá ser también endógeno para impedir la aparición de déficits: este será el tipo impositivo sobre las rentas del trabajo. Estos supuestos permiten escribir la restricción flujo del hogar representativo de cada grupo y la del gobierno en los siguientes términos, en los que se aprecia que se fecha el tipo impositivo con el subíndice correspondiente a cada período al ser en principio variable (salvo que las endógenas de las restricción del gobierno se encuentren en una senda estacionaria, caso en el cual cabrá hablar de tipo impositivo constante a lo largo de dicha senda):

$$C_s^q + p_s^h E_s^{pr,q} \leq (1-\tau_s) e_s a_s^{hq} (1-\overline{n}_s^h) \quad (6.12)$$

$$C_s^u + p_s^h (1-\theta^p) E_s^{pr,u} \leq (1-\tau_s) e_s a_s^{hu} (1-\overline{n}_s^h) \quad (6.13)$$

$$\tau e_s (1-\overline{n}_s^h) \left[N^q a_s^{hq} + N^u a_s^{hu} \right] \geq N^u \theta^e p_s^h E_s^{pr,u} + G_s;\ p_s^h = \left(a_s^h\right)_a \quad (6.14)$$

O en términos per cápita, dividiendo los dos miembros de la restricción del gobierno por N:

$$\tau e_s (1-\overline{n}_s^h) \left(a_s^h\right)_a \geq (1-m) \theta^e \left(a_s^h\right)_a E_s^{pr,u} + \frac{G_s}{N} \quad (6.15)$$

El problema de optimización del gobierno consiste en la fijación de la senda de consumo público en el momento inicial, antes de que los agentes hayan tomado ninguna decisión, y dicho nivel se mantendrá constante a lo largo de todo el horizonte, sin que el gobierno intente extraer ninguna ventaja estratégica derivada de una ruptura de su compromiso inicial; la crítica de Lucas, en consecuencia, no es aplicable a esta sencilla regla fiscal. Desde el punto de vista de los agentes individuales, esta regla equivale a la exogeneidad del consumo público por unidad de eficiencia a lo largo de toda su senda de planificación; además, la heterogeneidad entre los mismos implica que tomarán este dato como un elemento exógeno de su problema, sin que ninguno de ellos internalice las posibilidades de modificar esta variable y, con ella, indirectamente el tipo impositivo. Antes de resolver el problema del gobierno, conviene delimitar el conjunto de información a que este tiene acceso. Se supondrá, en primer lugar, que el gobierno conoce las ecuaciones que configuran el comportamiento óptimo de los dos hogares representativos. En cuanto a los efectos externos el gobierno los conoce tan bien como el planificador benevolente al afectar a sus ingresos fiscales, aunque las funciones objetivo de ambos son completamente diferentes. Por lo demás, el gobierno optimizará respecto al nivel de gasto público en unidades de eficiencia del trabajo y un parámetro genérico del lado de gasto que denominaremos θ , pudiendo ser este el tipo de las subvenciones u otro que pueda introducirse en el marco de una política alternativa; también el valor de este parámetro se mantendrá constante desde s=0 y no se perseguirá proporcionar ninguna sorpresa a los agentes. En el problema se diferencia un nivel de gasto público diferente por período para anidar aquellas sendas no estacionarias, aunque si se desease restringir la actuación a un estado estacionario podría determinarse un único valor de los parámetros relevantes a lo largo de toda la senda. Finalmente y ya en el terreno estricto de la notación se denotará $\hat{\theta}$ el gasto a consecuencia de la activación del parámetro θ , que dependerá de las variables de escolarización, el capital social medio y la fracción de receptores.

Las cpo de gobierno serán las siguientes:

$$\Omega = \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s \left\{ v(g) + \lambda_s^g \left[\tau_s - \frac{1}{\left(a_s^h\right)_a A\overline{n}^w} \hat{\theta}_s \left[\theta_s, E_s^{pr,u}, E_s^{pr,q}, \left(a_s^h\right)_a, m, (1-m) \right] - \frac{g}{A\overline{n}^w} \right] \right\};$$

$$g = \frac{G_s}{N\left(a_s^h\right)_a} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = \left[v'(g) - \frac{\lambda_0^g}{A\overline{n}^w} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \delta^s \left[v'(g) - \lambda_s^g \left[\left(\frac{1}{A\overline{n}^w \left(a_s^h\right)_a} \frac{\partial \hat{\theta}_s}{\partial \left(a_s^h\right)_a} - \frac{\hat{\theta}_s}{A\overline{n}^w \left(a_s^h\right)_a^2} \right) \frac{\partial \left(a_s^h\right)_a}{\partial \tau_{s-1}} \frac{d\tau_{s-1}}{dg} \right] \right] \leq 0 \ (6$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} = \delta^s \left[-\lambda_s^g \left[\frac{d\hat{\theta}_s}{d\theta_s} \frac{1}{A\overline{n}^w \left(a_s^h\right)_a} \right] \right] +$$

$$+\delta^{s+1} \left\{ -\lambda_{s+1}^g \left[\left(\frac{1}{\left(a_{s+1}^h\right)_a A\overline{n}^w} \frac{\partial \hat{\theta}_{s+1}}{\partial \left(a_{s+1}^h\right)_a} - \frac{\hat{\theta}_{s+1}}{A\overline{n}^w \left(a_{s+1}^h\right)_a^2} \right) \frac{\partial \left(a_{s+1}^h\right)_a}{\partial \theta_s} \right] \right\} \leq 0 \ (6.18)$$

En el caso del consumo público por unidad de eficiencia, la utilidad marginal derivada de su modificación más los beneficios en términos de una mayor recaudación en el período se igualarán a los costes marginales, compuestos por el mayor gasto presente así como por el eventual mayor gasto futuro a consecuencia de la modificación del stock de capital humano medio. La cpo del parámetro θ es análoga, solo que el parámetro puede diferenciarse entre períodos y además entre los beneficios marginales no figura la utilidad marginal. Por otro lado, dentro de las derivadas que sintetizan el impacto del tipo impositivo y los restantes parámetros sobre la acumulación se encuentran incluidos los correspondientes efectos externos y los resultados del problema descentralizado de los agentes privados. Estas cpo traslucen, por tanto, que dadas unas preferencias el gobierno, su tendencia a elegir políticas educativas que maximicen la acumulación de capital humano y, en definitiva, el crecimiento, es ambigua. Por un lado, una mayor acumulación futura reduce el peso de los gastos en educación dentro del presupuesto y proporciona mayor espacio para la ampliación de la senda de consumo público. Por otro, en la medida en que esta acumulación incida en el gasto futuro -expandiéndolo, presumiblemente, dado el sistema de fijación de precios del secto educativo- el efecto es el contrario. Cuál de los dos efectos predomine dependerá tanto de juego de ambas elasticidades sobre los gastos totales.

Un aspecto notable de este resultado es que en las cpo del gobierno están implícitos los efectos de las diferentes medidas fiscales sobre el tipo impositivo, pero el tipo no figura en la tasa de retorno social del planificador benevolente, como veremos. La razón es que un tipo impositivo más o menos elevado determina las posibilidades de redistribución de fondos entre los agentes privados y el gobierno, pero no en el conjunto de la economía. Por tanto, mientras aquellas políticas educativas que implican fuertes incrementos de la imposición son poco eficientes para el gobierno, por resultar restrictivas del consumo público en un momento más o menos cercano, para el planificador solamente serán convenientes o no en la medida en que permitan alcanzar objetivos de eficiencia y aproximar las tasas de retorno privadas a las óptimas sociales, siendo indiferente que permitan una tasa de crecimiento mayor si no pasan el filtro de la eficiencia.

Hecho esta digresión para el gobierno, parasaremos ahora a calcular la tasa de retorno privada del capital humano. Previamente, revisaremos las cpo relativas a la cantidad de servicios educativos adquiridos y la posición en capital humano. Definida la función lagrangiana y los multiplicadores en la forma habitual, estas serían las siguientes para unos rendimientos genéricamente constantes o decrecientes en el input educativo:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial E_s^{pr,u}} = -\lambda_s^u p_s^e\left(1-\theta^p\right)+\mu_s^u B^u\left(a_s^h\right)_a \gamma\left(\overline{n}_s^h E_s^{pr,u}\right)^{\gamma-1}\overline{n}_s^h \leq 0 \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial E_s^{pr,q}} = -\lambda_s^q p_s^e+\mu_s^q B^q\left(a_s^h\right)_a \gamma\left(\overline{n}_s^h E_s^{pr,q}\right)^{\gamma-1}\overline{n}_s^h \leq 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_{s+1}^{hu}} = -\mu_s^u+\beta\left[\lambda_{s+1}^u\left(1-\tau_{s+1}\right)e_{s+1}\left(1-\overline{n}_{s+1}^h\right)+\mu_{s+1}^u\right] \leq 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_{s+1}^{hq}} - \mu_s^q+\beta\left[\lambda_{s+1}^q\left(1-\tau_{s+1}\right)e_{s+1}\left(1-\overline{n}_{s+1}^h\right)+\mu_{s+1}^q\right] \quad (6.22)$$

$$\beta^T \mu_T^j a_{T+1}^{hj} = 0 \quad (6.23)$$

$$j = q,u$$

Antes de examinar las consecuencias de la intervención pública es necesario atender a las características del modelo en competencia perfecta descentralizada sin intervención alguna del sector público; esto es, los cuatro parámetros fiscales en los que se concreta el gasto público y su financiación se igualan a cero. Derivaremos en primer lugar los rasgos básicos del equilibrio general, comenzando por un caso en el que no existen los bonos. Por una parte, sabemos que la condición de no arbitraje nos conducirá a la siguiente inecuación entre la relación marginal de sustitución intertemporal del consumo y la tasa de retorno del capital humano, dando lugar a una ecuación diferente para cada grupo de agentes. Partiremos de una función de utilidad logarítmica e idéntica para ambos agentes, tal que el ahorro será igual a una constante de la renta disponible:

$$U^j = \sum_{s=0}^{\infty}\beta^s u\left(C_s^j\right);\ 0<\beta<1;\ j=q,u \quad (6.24)$$

El siguiente aspecto a considerar, antes de describir el equilibrio general, es la tasa de crecimiento del capital humano medio de la economía. Esta tasa puede escribirse como una media ponderada de las tasas de crecimiento del capital humano de cada grupo, del siguiente modo:

$$\frac{a_{s+1}^{h}}{a_{s}^{h}}=\frac{ma_{s}^{hq}\Gamma_{s}^{q}+\left(1-m\right)a_{s}^{hu}\Gamma_{s}^{u}}{a_{s}^{h}}=m\frac{a_{s}^{hq}}{ma_{s}^{hq}+\left(1-m\right)a_{s}^{hu}}\Gamma_{s}^{q}+\left(1-m\right)\frac{a_{s}^{hu}}{ma_{s}^{hq}+\left(1-m\right)a_{s}^{hu}}\Gamma_{s}^{u} \quad (6.25)$$

Dividiendo los pesos las tasas de crecimiento individuales por el stock de los numeradores de aquellos, puede concluirse: i) Si las tasas de crecimiento de ambos stocks de capital humano se igualan, los pesos se harán constantes, ya que también lo será a lo largo del tiempo el cociente a_{s}^{hu}/a_{s}^{hq} . Si además ambos stocks fueran iguales desde el comienzo del horizonte de planificación, los pesos coincidirían con las participaciones de cada grupo sobre el total de la población, m y 1-m respectivamente. ii) Si las tasas de crecimiento de u y q se igualan pero no lo hacen sus los niveles de partida, los pesos -como es natural- seguirán sumando 1, pero no coindirán con m y (1-m); en cualquier caso el crecimiento del capital humano medio igualará la única tasa de crecimiento privada. iii) La igualdad inicial de los stocks no es una condición suficiente ni necesaria para que los pesos sean constantes.

Adicionalmente, utilizaremos, en la línea de Lucas y Romer, la hipótesis de que, a pesar de que la tasa de crecimiento común del capital humano en equilibrio general es exógena, los agentes convergen a un equilibrio de punto fijo, en el cual son capaces de esperar una tasa de crecimiento del sistema igual a la real, si bien toman esta como no reactiva ante sus acciones individuales -aquí radica la naturaleza del efecto externo, fomentado en este caso por la heterogeneidad de los agentes-. Las alternativas (expectativas exógenas, en una línea keynesiana, o racionalidad limitada por la insuficiencia de información o su coste de adquisición) generarían errores sistemáticos de los agentes al mantener la expectativa de una tasa de crecimiento errónea e impedirían el vaciado, conduciendo además a equilibrios múltiples en función del valor adoptado por esta estimación de crecimiento.

Comenzaremos pues a estudiar la dinámica global del modelo sin intervención pública. Aunque hasta ahora en los desarrollos matemáticos se ha hecho uso de rendimientos a escala de E genéricos ($\gamma \leq 1$), aunque el texto principal se centrará en los rendimientos constantes a escala, con $\gamma = 1$, si bien en el Anexo derivaremos las conclusiones correspondientes para el caso en el que los rendimientos en este factor son decrecientes. Por otra parte, el estudio comenzará con la caracterización de los estados estacionarios del modelo, entendiendo por tales aquellos en los que las tasas de acumulación de capital humano son constantes, para lo cual en este modelo con peer effects deberá ser el producto ψE el que se mantenga constante y no solamente el segundo término. Como se verá más adelante, hay dos vías diferentes de conseguir la constancia del producto de estas dos variables: bien el mantenimiento a lo largo de toda la senda estacionaria del mismo valor para cada una de ellas, bien su variación permanente perfectamente compensada. Cada clase de solución tendrá implicaciones distintas y será compatible con supuestos diferentes. Por otro lado, la constancia en el crecimiento del capital humano se transmitirá también a los niveles de consumo privado, que en el estado estacionario se expandirá a la misma tasa que dicho activo para cada uno de los grupos. A resultas de este hecho, la solución estacionaria consistente en la constancia de la ratio que refleja los peer effects, que será posible simultáneamente para los dos hogares representativos solamente si existe una alineación completa para ambos en su tasa de acumulación, será de particular interés al garantizar la igualdad en el crecimiento del consumo para ambos, circunstancia que, como se verá más adelante, constituye una condición de optimalidad social de la solución.

La caracterización de los estados estacionarios anticipada en el párrafo anterior puede apreciarse mejor prestando atención a la versión dinamizada de las restricciones presupuestaria de los agentes. Para construirla, basta tomar la restricción para cualquiera de los hogares representativos en el período s+1 y expresarla en función de las tasas de crecimiento de sus variables, utilizando el superíndice circunflejo para referirnos al peso de una variable en el período s sobre el capital humano de cada hogar representativo en dicho período, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\hat{c}_{js}\left[1-\frac{\Gamma_{cj}}{\Gamma_{aj}}\right]+\hat{a}_s E_s^j\left[1-\frac{\Gamma_a}{\Gamma_{aj}}\Gamma_{E^j}\right]=0 \quad (6.26)$$

Donde, una vez más, Γ denota la tasa de crecimiento bruta de la variable correspondiente. Como se comentaba más arriba, puede tenerse una doble tipología de estados estacionarios. Primera, que la tasa de acumulación de los dos hogares representativos se igualara (en cuyo caso el peer effect devendría constante) y E también lo fuera. En tal caso, el segundo corchete se anularía completamente y esto forzaría a que el primero lo hiciera también, dando lugar a un equilibrio estacionario en el que el consumo de ambos agentes creciera a la misma tasa que sus respectivos stocks de capital humano. Esta clase de equilibrio sigue una senda estacionaria que sería consistente con la igualdad entre la relación marginal de sustitución y la tasa de retorno del único activo, ya que una tasa de crecimiento del consumo constante sería compatible con una tasa de retorno del capital humano también constante. En definitiva, la ecuación de no arbitraje quedaría reducida a la siguiente expresión a lo largo de esta senda estacionaria, si existiera (más adelante se estudiará en qué circunstancias el modelo puede situarse en un equilibrio como este):

$$\frac{\left[1+B^{j}\left(\overline{n}^{h}\right)^{\gamma}\left(E^{pr,j}\right)^{\gamma}\right]}{\beta}-1=A\left(1-\overline{n}^{h}\right)B^{j}\left(\overline{n}^{h}\right)^{\gamma}\gamma\left(E^{pr,j}\right)^{\gamma-1};j=q,u \quad (6.27)$$

Véase que, a lo largo de una senda estacionaria como la descrita, el hecho de que las tasas de acumulación de equiparasen no resolvería los problemas de desigualdad entre individuos si su capital humano original fuera distinto, ya que la diferencia en los niveles iniciales (más otra que hubiera podido generarse en la transición al estado estacionario) persistiría.

El problema de una senda estacionaria como la anterior es que, como se verá a contnuación, no es alcanzable con la tecnología educativa descrita cuando los parámetros B difieren entre grupos. Por ello nos referiremos alternativamente a un segundo tipo de senda estacionaria con un grado adicional de libertad, en la que es el valor de los servicios educativos en términos del bien de consumo es constante pero no se impone dicha constancia a cada uno de sus componentes individuales. A través de la restricción presupuestaria dinamizada puede verse que esta condición forzaría igualmente a que en todo período el consumo creciera a una tasa igual a la de acumulación de capital humano respectiva. **Esta segunda senda compatibilizaría un crecimiento constante del capital humano de cada grupo con diferentes tasas de acumulación de cada uno de ellos.**

Todas aquellas sendas distintas de las dos anteriores en las que se cumplieran las condiciones de equilibrio general no serían estacionarias. Por reducción al absurdo, supongamos que E es constante para cualquiera de los dos grupos sin que los hogares acumulen a la misma tasa. Entonces, el segundo corchete de la ecuación sería variable, ya que la relación entre el crecimiento del stock medio de capital humano y del capital de cualquiera de los dos grupos cambia período a período a consecuencia de la alteración de las ponderaciones de las dos tasas de acumulación. En consecuencia, también el primer corchete sería variable, lo que conduciría a una relación marginal de sustitución en continuo cambio; trasladado este hecho a la condición de no arbitraje, haría imposible que E se mantuviera constante. Además, no cabe la posibilidad de que para un grupo E se mantenga constante y para el otro no, ya que el crecimiento del capital humano medio solo se estabilizará si para los dos grupos la tasa de acumulación es constante e igual.

Véase que estas dos configuraciones encajan de manera diferente con el vaciado del mercado del bien final. Reescribiendo esta condición en forma de tasas de crecimiento y utilizando la tilde para denominar al peso de cada variable sobre el stock de capital humano medio en el período s, tendremos:

$$m\tilde{c}_{qs}\left[1-\frac{\Gamma_{cq}}{\Gamma_a}\right]+(1-m)\tilde{c}_{us}\left[1-\frac{\Gamma_{cu}}{\Gamma_a}\right]+mE_s^q\left[1-\Gamma_{Eq}\right]+(1-m)E_s^u\left[1-\Gamma_{Eu}\right]=0 \quad (6.28)$$

Si $\Gamma_{Eq}=\Gamma_{Eu}=1$ los dos primeros corchetes se anulan, por ser iguales entre sí las tasas de acumulación de capital humano. Tanto en el segundo tipo de senda estacionaria como en las restantes sendas de equilibrio general puede producirse una compensación entre los signos de los diferentes corchetes. Véase, no obstante, que es imposible que los consumos de los dos grupos crezcan por encima de su tasa de acumulación de capital humano y que simultáneamente se expandan a una tasa neta positiva los niveles de escolarización: si este último hecho se produce, al menos uno de los consumos crecerá por debajo de su tasa de acumulación. En concreto deberá hacerlo la de los no cualificados, ya que de lo contrario debería reducir sus niveles de escolarización (esto es, optar por una tasa bruta menor que 1).

Establecidas las posibles caracterizaciones del equilibrio general, veamos primero cuál de las sendas estacionarias sería factible con rendimientos constantes a escala en E, comenzando por la consistente en una proporción constante entre el consumo y la renta de cada período. **El primer resultado relevante a estos efectos es que no existen sendas de equilibrio general en las que el consumo crezca a tasas diferentes de las del capital humano**; veámoslo por reducción al absurdo. **En primer lugar, resulta útil distinguir aquella sendas con tasas de acumulación positiva de aquellas con estancamiento**. La inversión nula en capital humano será un equilibrio si la relación marginal de sustitución, evaluada en un ahorro nulo, es superior a la tasa de retorno, esto es[219]:

$$\frac{1}{\beta}>A\left(1-\bar{n}^h\right)B^j\bar{n}^h-1 \quad (6.29)$$

Puesto que esta relación se verificaría en todos los períodos, nos encontraríamos ante una senda estacionaria de estancamiento, que no puede excluirse. En cualquier caso, es obvio que en este equilibrio esquina consumo y capital humano igualarían sus tasas de crecimiento a 1. Es más, dado que la relación de stocks iniciales de capital humao es diferente de 0, sería la inversión en educación la que se anularía para alcanzar este equilibrio.

---

[219] Si la acumulación es nula, el consumo se iguala a la renta constante, por lo que su crecimiento coincide con el del capital humano, esto es, 1 en tasa bruta.

Supongamos ahora que la desigualdad anterior no se cumple y es óptimo realizar inversiones positivas en capital humano. **En tal caso, la tasa de crecimiento del consumo debe ser constante a lo largo del tiempo**:

$$\Gamma_{cj} = \beta\left[A\left(1-\bar{n}^h\right)B^j\bar{n}^h + 1\right] \quad (6.30)$$

Si $\Gamma_{cj} > \Gamma_{aj}$, entonces el valor de los servicios educativos debe decrecer constantemente. Es más, la dinámica se acentúa a lo largo de la senda, de suerte que el crecimiento del capital humano se va atenuando y por tanto la reducción del ahorro es cada vez mayor, hasta llegar a cero (es su mínimo, al ser el activo real el único disponible). Pero este punto de la senda ya no sería de equilibrio, por la hipótesis de partida. Luego esta trayectoria queda excluida. En la situación opuesta, cuando $\Gamma_{cj} < \Gamma_{aj}$ el valor de los servicios de escolarización aumentará sin cesar, alejando cada vez el crecimiento de la renta del registrado por el consumo; esta trayectoria conduce sin embargo a quebrar la condición de transversalidad, luego tampoco será compatible con el equilibrio general.

Este resultado tiene varias implicaciones importantes. **Primera, el valor de los servicios escolares en términos del capital humano del grupo será constante**, o equivalentemente, las tasas de acumulación serán constantes en cada grupo a lo largo de la toda la senda. Este resultado es una consecuencia directa del hecho de que el ahorro debe ser una fracción constante de la renta de cada período. Segunda, **es posible calcular una solución cerrada el valor de los servicios educativos** que se mantiene constante para cada grupo sin más que despejar de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\beta}\left[1+\psi_s^j B^j\bar{n}^h E_s^{pr,j}\right] = 1 + A\left(1-\bar{n}^h\right)B^j\bar{n}^h \Rightarrow \psi_s^j E_s^{pr,j} = \beta A\left(1-\bar{n}^h\right) + \frac{(\beta-1)}{B^j\bar{n}^h} \quad (6.31)$$

Teniendo en cuenta que el último sumando tiene signo negativo, habrá que imponer la condición paramétrica de no negatividad para el valor de los servicios. Véase que la anterior igualdad implica que el valor de los servicios educativos adquiridos en cada período es una fracción constante de la renta laboral contemporánea, solución coherente con la constancia de la propensión media al consumo que se identificó más arriba. Teniendo en cuenta que la tasa de ahorro se gira sobre el total de la renta disponible ésta, que será también constante, puede reconstruirse directamente a partir de la ecuación anterior como:

$$s^j = \frac{1}{A\left(1-\bar{n}^h\right)}\left(\psi_s^j E_s^{pr,j}\right) \quad (6.32)$$

Puesto que el valor de los servicios demandados por el hogar cualificado es mayor que el de los no cualificados y además el parámetro de productividad de estos últimos es inferior, **la tasa de acumulación debe ser inferior para los no cualificados**. En efecto, el umbral que determina la igualdad[220] de las tasas de acumulación es el siguiente:

$$\frac{\psi_s^q E_s^{pr,q}}{\psi_s^u E_s^{pr,u}} = \frac{B^u}{B^q} \text{ (6.33)}$$

Sin embargo, la ratio intergrupo del valor de los servicios escolares demandados en equilibrio general es la siguiente:

$$\frac{\psi_s^q E_s^{pr,q}}{\psi_s^u E_s^{pr,u}} = \frac{B^u}{B^q}\frac{\left[B^q \beta A\left(1-\overline{n}^h\right)\overline{n}^h + (\beta-1)\right]}{\left[B^u \beta A\left(1-\overline{n}^h\right)\overline{n}^h + (\beta-1)\right]} > \frac{B^u}{B^q} \Rightarrow \psi_s^q E_s^{pr,q} B^q > \psi_s^u E_s^{pr,u} B^u \text{ (6.34)}$$

Esta diferencia de tasas de acumulación implica que el precio de los servicios educativos tenderá a abaratarse con el paso del tiempo para aquellas familias con más habilidades y a encarecerse para los menos cualificados. Antes de perfilar la dinámica del modelo, es conveniente comprobar cuál es la incidencia sobre la tasa de acumulación de cada grupo de esta trayectoria, dado que la variación de este precio por un lado encarece o abarata el volumen de servicios educativos, pero por otro genera un efecto externo que tiende a contrarrestar el anterior, más favorable a los hogares u y perjudicial a los q. Para comprobarlo hay que partir del hecho de que, en cada período, las variaciones internas en los componentes del ahorro en términos del capital humano son de suma cero. En efecto, dado C_0 y el capital humano del período, E está determinado, con lo cual también está definida la tasa de retorno y la tasa de crecimiento del consumo. Por esta razón las variaciones de precios relativos y cantidades de escolarización deben ser equiproporcionales:

$$\frac{dE_s^{pr,j}}{d\psi_s^j} = -\frac{E_s^{pr,j}}{\psi_s^j} \text{ (6.35)}$$

Diferenciando la tasa de acumulación respecto a los precios relativos y E y sustituyendo el resultado anterior, puede concluirse que:

---

[220] El supuesto realizado sobre el producto entre la ratio de stocks de capital humano iniciales y el cociente de los parámetros de productividad asegura que el valor de E que garantizaría la igualdad de tasas de acumulación al comienzo del horizonte de planificación debería más alta para los no cualificados. En efecto, sin más que despejar la ratio de E de la expresión de determinación del umbral, evaluada en el período 0:

$$\frac{E_0^{pr,q}}{E_0^{pr,u}} = \frac{B^u}{B^q}\frac{a_0^{hq}}{a_0^{hu}} < 1 .$$

$$\frac{d\Gamma_{aj}}{d\psi_s^j} = 0 \text{ (6.36)}$$

Esto es, con rendimientos constantes se produce una compensación total de los dos efectos, por lo que el precio relativo evoluciona monótonamente a lo largo de la senda. A partir de aquí, el comportamiento dinámico es diferente para los individuos q y u. Para los primeros, a lo largo de la senda ψ descendería, aunque este hecho se ve perfectamente compensado por el aumento del volumen de los servicios educativos. Por ello, la tasa de acumulación permanecería constante, aunque con cambios cualitativos, ya que con el tiempo el peso de la tasa de acumulación q dentro de la tasa de acumulación media se elevaría, por lo que asintóticamente $\lim_{s \to \infty} \Gamma_a = \Gamma_{aq}$. Esto significaría que ψ^q se estabilizaría y, consiguientemente, también lo haría $E^{pr,q}$. **La trayectoria se caracterizaría por tanto por ser estacionaria en el segundo de los sentidos definidos, mientras que en el límite lo sería también en el primero**. En cualquier caso, la tasa de acumulación permanecería constante a lo largo de toda ella. Para las familias u la dinámica sería la inversa, con una tasa de acumulación inferior y ausencia de estabilización asintótica de ψ^u , al tender el peso de su tasa de acumulación en el límite a 0. Por tanto, la senda convergería asintóticamente hacia $E^{pr,u} = 0$, sin que este punto se considere de equilibrio, al no satisfacerse por hipótesis la condición enunciada antes para los equilibrios sin crecimiento.

Desde la perspectiva de la desigualdad, esta dinámica solo puede calificarse de adversa, por cuanto que las diferencias originales en los stocks de capital humano se ampliarían con el tiempo. Como veremos más tarde, tampoco esta solución es satisfactoria desde el ángulo de la eficiencia, ya que implica una desigualdad continua entre las relaciones marginales de sustitución de los individuos de ambas clases. **Puede argumentarse por tanto que en este marco la intervención pública estaría justificada por ambos motivos, al margen de las externalidades que emergen al resolver el problema del planificador benevolente.**

En el caso especial de $B^u = B^q$, la dinámica del modelo sería muy diferente. La relación que sería necesaria entre las demandas educativas para lograr la misma tasa de acumulación sería:

$$\frac{E_0^q}{E_0^u} = \frac{a_0^q}{a_0^u} \text{ (6.37)}$$

Esto es, filtradas las tecnologías de la diferencia en la productividad, los peer effects benefician más a las familias no cualificadas, por lo que será necesaria una demanda de escolarización superior para los hogares q. Precisamente al calcular la ratio relativa de demandas educativas a partir de las cpo se pone de manifiesto que esta coincidiría con el nivel preciso para lograr la equiparación de las tasas de acumulación desde s=0, luego desde este período inicial se alcanzaría, sin dinámica de transición, un estado estacionario con ψ^{j} y $E^{pr,j}$ individualmente constantes y ratio consumo/capita humano también constante. El grado de desigualdad relativo entre los dos grupos, dado por el estatus inicial en el origen de las dinastías, se mantendría. Las relaciones marginales de sustitución se igualarían entre sí, lo que constituye una condición de optimalidad social. En consecuencia la justificación para la intervención pública sería mucho más débil que con productividades de aprendizaje diferentes, salvo que la diferencia original entre los niveles de capital humano fuera diferentes.

La instrumentación de una solución distributiva en estas condiciones estaría severamente limitada. Pensemos, por ejemplo, en un esquema de impuestos (T) lump-sum sobre los cualificados y transferencias (S) del mismo tipo para los no cualificados. Este esquema presentaría la ventaja de no distorsionar las cpo y seguir permitiendo las demandas educativas relativas necesarias para alcanzar desde s=0 una tasa de acumulación común. Sin embargo, **puede verse rápidamente que en general este sistema no sería en general compatible simultáneamente con el cumplimiento de las restricciones presupuestarias en un sentido dinámico**. Las rentas disponibles en cada período de cada clase de hogar serían:

$$y_s^{dq} = A\overline{n}^{w} a_s^{hq} - T \quad (6.38)$$

$$y_s^{du} = A\overline{n}^{w} a_s^{hu} + S \quad (6.39)$$

El consumo, de nuevo, sería una fracción constante de la renta disponible en todo período, como también el gasto educativo. Además, dada la igualdad de B para cualquier hogar, esta proporción sería común para todo individuo. Por lo tanto para que una ratio de gastos educativos resuelva el equilibrio general, deberían verificarse simultáneamente las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{E_0^q}{E_0^u} = \frac{a_0^q}{a_0^u} = \frac{T}{S} \quad (6.40)$$

Puesto que la restricción presupuestaria del gobierno (pensemos, en ausencia de consumo público) liga impuestos y subvenciones, estos solo serían compatibles con una asignación de estado estacionario si se cumpliera:

$$\frac{1-m}{m}=\frac{a_0^{hq}}{a_0^{hu}} \text{ (6.41)}$$

Lo cual no sucederá en general. **Por tanto, las restricciones a que debería sujetarse una política redistributiva son tan exigentes que el margen de maniobra para su diseño disminuye sensiblemente.**

Régimen educativo privado con intervención pública. Pasemos ahora a activar los parámetros fiscales en el sentido en que describimos inicialmente. Las condiciones de equilibrio general no varían sustancialmente si suponemos que el gasto público en términos del capital humano medio se mantiene constante entre períodos, con independencia de que sea el gobierno el que elija su nivel. La condición de equilibrio del mercado de bienes quedará como sigue:

$$C_s^q+C_s^u+\left(a_s^h\right)_a\left(mE_s^{pr,q}+\left(1-m\right)E_s^{pr,u}\right)+g_s=A\left(a_s^h\right)_a\left(1-\overline{n}^h\right) \text{ (6.42)}$$

En cuanto a las restricciones presupuestarias de cada grupo, son las que aparecen más abajo[221]. Dada la condición de equilibrio presupuestario en cada período, si el tipo de las subvenciones educativas y el de las transferencias es constante el tipo impositivo deberá variar endógenamente entre períodos fuera de la senda estacionaria aunque, al estabilizarse la escolarización de los no cualificados en esta posición, podrá ser constante también a lo largo de esta senda. Al escribir las restricciones se admite por tanto esta variabilidad del tipo:

$$C_s^q+\left(a_s^h\right)_a E_s^{pr,q}=\left(1-\tau_s\right)A\overline{n}_s^w a_s^{hq} \quad (6.43)$$

$$C_s^u+\left(a_s^h\right)_a\left(1-\theta^e\right)E_s^{pr,q}=\left(1-\tau_s\right)A\overline{n}_s^w a_s^{hu} \quad (6.44)$$

Consideremos inicialmente una situación en la que no existiesen subvenciones a la adquisición de servicios educativos y toda la recaudación se destinase a sufragar el gasto público y, eventualmente, las transferencias no condicionadas a los hogares menos cualificados. Pasemos a derivar la tasa de retorno de los servicios educativos en tal caso para un individuo genérico.

$$rr_{s,s+1}^{h,e}\Big|_{ge}^{pr,j}=\left(1-\tau_{s+1}\right)A\overline{n}^w B^j\left(1-\overline{n}^w\right)+1;\ j=q,u \text{ (6.45)}$$

[221] Veáse que sin más que realizar una suma ponderada de las dos restricciones presupuestarias y sustituir la tasa impositiva por su valor en la restricción presupuestaria del gobierno se llega a la condición de equilibrio en el mercado del bien final, de la que no forma parte ningún parámetro fiscal con la excepción del gasto público.

Por la condición de no arbitraje la tasa será menor o igual que las respectivas relaciones marginales de sustitución entre consumo presente y futuro, divididas por la tasa de preferencia temporal. Varios son los comentarios que pueden realizarse: i) El efecto del tipo impositivo sobre la tasa de retorno no dependerá del tipo de estrategia del gobierno y de su función objetivo. ii) Incluso aunque nos ciñéramos a la senda estacionaria en la que el tipo pudiera ser constante, la introducción de impuestos no es neutral, ya que afecta a las rentas del activo en la tasa de retorno de los servicios educativos. Este resultado es importante al diverger del obtenido por Lucas (1990), siendo la razón de la discrepancia la utilización de un factor productivo del capital humano adicional, además del tiempo de aprendizaje. Cuando el único factor utilizado es el tiempo, el efecto de la tasa impositiva se neutraliza en la correspondiente de tasa de retorno, ya que impacta proporcionalmente tanto sobre el coste de oportunidad del input como sobre la renta; este es el resultado clásico de Lucas. Sin embargo, incluso aunque se considerara el tiempo como input junto con los servicios educativos, la mera introducción de este segundo factor productivo altera el resultado, ya que los impuestos distorsionarían la elección relativa entre el tiempo de aprendizaje y cualquier input cuyo coste de uso no estuviese basado en el salario. En concreto, el efecto del tipo impositivo sobre la demanda de servicios educativos es el de reducirla, permaneciendo todo lo demás constante.

Para calcular los efectos de la imposición en equilibrio general de nuevo habrá que considerar el caso general de divergencia entre las productividades de q y u, así como el específico en que ambas se igualan. Con **rendimientos constantes**, suponiendo en todo momento que el tipo aplicado a ambos grupos es el mismo, el **valor de los servicios escolares de equilibrio general disminuye para ambos grupos, con lo que también lo hará su tasa de acumulación:**

$$\psi_s^j E_s^{pr,j} = (1-\tau_s)\beta A\left(1-\bar{n}^h\right)+\frac{\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)}{B^j\bar{n}^h} \quad (6.46)$$

Por lo demás, la tasa de acumulación seguirá siendo mayor para los cualificados cuando las productividades B difieren y la dinámica del modelo, la misma que la comentada antes. Un aspecto importante es que, puesto que la tasa de acumulación de los dos grupos sería diferente, la base impositiva -el capital humano medio- variaría con el tiempo, creciendo a una tasa que convergería gradualmente hacia la de las familias cualificadas. Si los gastos a financiar crecieran a la misma tasa -como se ha supuesto- el tipo podría ser constante. Cuando los parámetros B se igualan las tasas de acumulación de ambos grupos seguirían coincidiendo. Resumiendo, la introducción de este tipo de impuestos es inequívocamente negativa, al reducir las posibilidades de consumo de los agentes a lo largo de su senda y no corregir los problemas de desigualdad, que siguen agravándose con el tiempo. inferior.

En términos de las restricciones presupuestarias y la condición de vaciado, es claro que a mayor gasto público autónomo a financiar mayor tendrá que ser el tipo impositivo para conservar el equilibrio presupuestario y por tanto mayor el descenso de la tasa de crecimiento del conjunto de la economía. Nótese además que el gasto a financiar en este primer ejercicio de políticas educativas es improductivo, al satisfacer el consumo público únicamente la utilidad del gobierno. Por tanto la introducción del impuesto supone un peso muerto desde la perspectiva del bienestar, cuando este no va dirigido a financiar políticas educativas que de algún modo estimulen el crecimiento medio. Desde la perspectiva de la desigualdad entre grupos la imposición sobre la renta salarial afectaría a ambos hogares representativos en la misma proporción, por lo que en primera instancia no alteraría el patrón observado en un régimen privado sin intervención pública.

Pasaremos a considerar a continuación el impacto de la utiización conjunta de impuestos generales y subvenciones a los individuos menos cualificados. Mientras que la tasa de retorno para los hogares q es formalmente similar al caso anterior, la de los hogares u estaría modificada en su denominador por el tipo de subvención a la demanda de servicios educativos:

$$rr_{s,s+1}^{h,e}\Big|_{ge}^{u} \equiv \frac{\left(1-\tau_s^*\right)}{\left(1-\theta_s^e\right)} A\left(1-\overline{n}^h\right) B^u \overline{n}^h + 1 \quad (6.47)$$

En el caso de los hogares menos capacitados la subvención opera en sentido contrario, al aumentar la tasa de retorno de la inversión en capital humano vía disminución en su coste de producción. El tipo impositivo va a afectado de un asterisco (como también lo estaría en la tasa de retorno de los hogares q), indicando con ello su carácter endógeno no ya respecto a los parámetros fiscales exógenos, sino respecto a la demanda escolar de los hogares u, la cual a su vez depende del tipo de la subvención. Por tanto las tres variables se determinan simultáneamente. Este hecho refleja además un trade-off en la elección del input del capital humano: Una mayor demanda de educación del hogar u representativo a consecuencia de un menor precio después de subvenciones redundará en un mayor consumo de las generaciones futuras que se internaliza en la función de utilidad dinástica, pero al mismo tiempo implica un mayor tipo impositivo, dados los restantes componentes de la restricción del gobierno. Por el contrario, para las familias q este trade-off no existe, al depender el tipo efectivo de las decisiones del hogar u. De hecho en torno a esta interacción surge otro efecto externo, al no internalizar en su decisión de demanda de E los individuos menos cualificados las consecuencias de esta sobre los más cualificados.

Antes de continuar merece la pena arrojar alguna luz más sobre la interacción entre el tipo impositivo y el de las subvenciones, a través de la restricción presupuestaria del gobierno, dado su carácter central en las decisiones de los agentes. La primera observación es que la variación en los dos tipos deberían estar ligadas a través de la restricción presupuestaria del gobierno en estado estacionario, que como sabemos no puede presentar déficit en ningún período. Suponiendo que el nivel de consumo público por unidad de capital humano permanece constante, deberá satisfacerse sin más que diferenciar en los dos lados:

$$\tau^* = (1-m)\frac{E^{pr,u}}{A\left(1-\bar{n}^h\right)} + g \Rightarrow \frac{d\tau^*}{d\theta^e} = \Upsilon E^{pr,u} d\theta^e + \Upsilon\theta^e \frac{dE^{pr,u}}{d\theta^e} \quad (6.48)$$

Esta última relación pone también de relieve el carácter ex-post del tipo impositivo, al ser la variable que garantiza el cumplimiento de la restricción presupuestaria del gobierno y depender, en última instancia, de las variaciones que la escolarización de los no cualificados experimenta a consecuencia de la variación del tipo de la subvención. El valor de E que integra el primer sumando sería el del equilibrio general de partida.

La anterior expresión puede complementarse con una relación en niveles entre el tipo impositivo, el tipo de la subvención y los restantes componentes de los empleos públicos. Denominando g a la relación consumo público/capital humano en estado estacionario y partiendo del hecho de que no varía, tendremos:

$$\tau^* = \Upsilon E^{pr,u}\theta^e + \frac{g\Upsilon}{N^u} \Rightarrow 1-\Upsilon\left[E^{pr,u}\theta^e + \frac{1}{N^u}g\right] \geq 0;\ D = g; g = \left(\frac{G_s}{\left(a_s^h\right)_a N}\right) \quad (6.49)$$

Para analizar el efecto combinado de las subvenciones con los impuestos, de nuevo diferenciaremos el modelo general, con diferentes velocidades de aprendizaje intergrupo y el caso especial en que estos se igualan. En el primero de estos supuestos, como primer comentario cabría comparar la tasa de retorno para los no cualificados antes y después de la introducción de la subvención para un E dado. Una simple manipulación lleva a concuir que la tasa aumentaría -según el teórico propósito de esta medida- siempre y cuando, para un $E^{pr,u}$ genérico, se verifique:

$$E^{pr,u} < \frac{1}{\Upsilon} - \frac{g}{N^U\theta^e} \quad (6.50)$$

Por lo tanto, ex ante la tasa de retorno será mayor cuanto mayor sea la base impositiva general o menores los componentes autónomos de gasto público, o menor los servicios de escolarización demandados. Dada la endogeneidad del tipo respecto a la escolarización de las familias menos cualificadas, sin embargo, solamente una vez determinado su valor podrá saberse si la tasa de retorno es mayor o menor que cuando no hay subvención. En cualquier caso, supuesto que los parámetros de la restricción del gobierno que intervienen en esta desigualdad sean lo suficientemente favorables y la tasa de retorno sea mayor con subvención incluso para niveles elevados de escolarización, se induciría un efecto diferente para cada clase de hogares. Mientras para los cualificados se desincentiva la demanda de educación, para los no cualificados -al menos para ciertos valores de esta- se incentivaría, por lo que las sendas de equilibrio reflejarían una mayor tasa de acumulación relativa de estos últimos para aquellos valores en los cuales se verificara la desigualdad desarrollada más arriba.

Hechas estas consideraciones, **la introducción de una subvención brinda la posibilidad de reconducir las sendas de equilibrio general estudiadas hacia otras en las que las tasas de acumulación son comunes y por tanto la expansión del capital humano puede ser indefinida en ambos colectivos**. En efecto, los valores relativos de los servicios escolares serán ahora:

$$\frac{\psi_s^q E_s^{pr,q}}{\psi_s^u E^{pr,u}} = \frac{\left(1-\tau*_s\right)\beta A\left(1-\overline{n}^h\right)+\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)}{B^q\overline{n}^h}}{\dfrac{\left(1-\tau*_s\right)}{\left(1-\theta_s^e\right)}\beta A\left(1-\overline{n}^h\right)+\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)}{B^u\overline{n}^h}} = \frac{B^u}{B^q}\frac{\left[B^q\overline{n}^h\left(1-\tau*_s\right)\beta A\left(1-\overline{n}^h\right)+\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)\right]}{\left[B^u\overline{n}^h\dfrac{\left(1-\tau*_s\right)}{\left(1-\theta_s^e\right)}\beta A\left(1-\overline{n}^h\right)+\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)\right]} \text{ (6.51)}$$

Cuando el segundo factor del miembro de la derecha se iguale a 1, el cociente de los valores de la escolarización será tal que las tasas de acumulación serán idénticas. Para ello es necesario que la tasa de la subvención a los servicios escolares tome el siguiente valor constante:

$$\theta^{e*} = 1-\frac{B^u}{B^q} \text{ (6.52)}$$

En tales condiciones, desde el momento inicial las tasas de acumulación se igualarán y E tomará un valor constante, gracias a que el consumo crece en línea con el capital humano. El álgebra necesaria revela que la tasa de acumulación común será:

$$\Gamma = 1+\Phi\left[B^q A\overline{n}^w+\frac{\beta-1}{1-\overline{n}^w}\right];\ \Phi = \frac{B^u\psi_0^u}{B^u\psi_0^u+\left(B^q-B^u\right)\left(1-m\right)} \text{ (6.53)}$$

El hecho de que el valor de la subvención (como tipo multiplicado por gasto subvencionable) sea constante en el tiempo permitirá que el tipo impositivo también sea constante. Desde la perspectiva de la eficiencia, el nuevo equilibrio general se caracterizará por una igualación de las relaciones marginales de sustitución intertemporal, así como por una estabilización de la desigualdad entre grupos cuando esta se mide por el cociente de los stocks de capital humano. En el paso del laissez-faire sin intervención al régimen privado con impuestos y subvenciones se produce, sin embargo, un efecto convergencia en los niveles del activo, siempre y cuando la tasa de retorno aumente para las familias u, en el sentido de que su tasa de acumulación se incrementará y la de los cualificados disminuirá. A priori no es posible discernir cuál será el efecto sobre la tasa de crecimiento de la economía en su conjunto, que dependerá de factores como la proporción de individuos de uno y otro grupo sobre el total o la desigualdad entre los parámetros B, que determina la cuantía del tipo de la subvención y, en última instancia, la magnitud del tipo impositivo.

Puede apreciarse también que la derivada de la escolarización de equilibrio de u respecto a Υ y el gasto autónomo es estrictamente negativa. Esto significa que, en general, valores lo menores posibles de ambos parámetros se traducirán en un mayor crecimiento del conjunto de la economía. Así pues, un consumo público nulo (o en su mínimo nivel posible, si existiera alguna restricción en este sentido) redundaría en una mayor acumulación de capital humano por parte de estas. En el mismo sentido, una menor proporción de los no cualificados sobre el total de la población o una base impositiva lo más amplia posible contribuirían también a reducir el tamaño del tipo necesario para financiar las subvenciones y elevar la tasa de crecimiento. El impacto de las horas trabajadas, sin embargo, sería ambiguo, ya que por un lado reduciría el parámetro Υ al formar parte de la base impositiva y aumentaría la tasa de retorno, mientras que por otro lado reduciría el tiempo de aprendizaje y con él la acumulación, para cada nivel del resto de las variables que intervienen en dicha tasa.

Un caso peculiar sucedería cuando

$$1-\tau\left(\theta^{e*}\right)=1-\theta^{e*} \Leftrightarrow \Upsilon=\frac{\theta^{e*}}{E^{pr,u}\theta^{e*}+\dfrac{\theta^{u}}{\psi_0^{u}}+\dfrac{g}{N^{u}}} \quad (6.55)$$

Tal escenario sería equivalente a la imposición de un tipo exclusivamente sobre los hogares cualificados unido a la ausencia de subvención a los no cualificados. En cualquier caso, el valor relativo de la escolarización para ambos seguiría siendo el adecuado para unificar sus tasas de acumulación.

Cuando la situación de partida es de igualdad entre los coeficientes B, la introducción de un esquema de impuestos y subvenciones proporcionales solo es eficiente con un tipo de subvención cero. Si el gobierno introduce temporalmente un tipo de subvención positivo para incentivar la tasa de acumulación de los no cualificados hasta que los stocks de capital humano relativos se igualen, será a costa de crear una desigualdad entre las relaciones marginales de sustitución.

Sistema escolar público. En el capítulo 5 se avanzó que la distinción formal entre las distintas formas de provisión pública de educación no siempre es sencilla. En general, todas ellas se caracterizan por la inclusión de una cantidad de input público en la tecnología de aprendizaje, que puede ir acompañado o no de una aplicación privada dependiendo del tipo de coexistencia de los dos sistemas. Mientras tanto, el impacto de los distintos instrumentos sobre la restricción presupuestaria de las familias puede ser muy variada. Siguiendo la línea de Boldrin (2005), consideraremos que la provisión pública que va acompañada de la producción de los servicios (esto es, la escuela pública), presenta indivisibilidades del tiempo disponible por los alumnos, de suerte que no es combinable fácilmente con aportaciones privadas al gasto educativo. Por lo tanto, consideraremos dos regímenes posibles que conllevan la utilización de la provisión pública de educación: uno que se denominará régimen público puro y que se basa en la escuela pública, que no podrá combinarse con gastos privados en educación y otro régimen que se denominará mixto, basado en cupones educativos distribuidos a las familias en cierta cantidad fija que pueden reforzarse con gasto adicional por parte de las familias.

En cuanto al régimen público puro, la nota esencial de este será el suministro a todos los ciudadanos la misma cantidad de servicios educativos $\overline{E}^{P}$, sujeto a la viabilidad económica del sector, esto es, a la consecución de beneficios nulos y por tanto a la fijación del mismo precio por unidad de servicio que cuando regía un sistema privado. En cuanto a la financiación de los servicios prestados, analizaremos dos situaciones diferentes. Una, más próxima a un régimen privado, en la que los individuos q la asumen íntegramente; los hogares u, no obstante, se beneficiarán de nuevo de una subvención en el pago de las tasas escolares. La financiación de esta subvención se sufragará mediante un impuesto sobre las rentas laborales al que contribuirá toda la población. Con cargo a este impuesto se financiará también un volumen arbitrario de consumo público. En definitiva, los impuestos recaudados de los hogares cualificados cubrirán la subvención efectuada a los hogares u más el gasto autónomo. Con este primer sistema se perseguiría principalmente regular la cantidad de educación disponible para toda familia, en una escala suficiente que resultara aproximadamente sustitutiva de aquella que pudiera adquirirse en el sector privado. En una segunda modalidad el gobierno impone una política de “gratis total” en la que ninguna familia paga tasas escolares y, a cambio, los impuestos cubren íntegramente el gasto de funcionamiento de la escuela pública, así como el consumo público. Se buscaría con este procedimiento que los individuos, o al menos algunos de ellos, pudieran dedicar más recursos al consumo y así incrementar su bienestar, manteniéndose constante el volumen de servicios suministrados por el gobierno.

Comenzando por la primera modalidad, la restricción presupuestaria del gobierno adopta una forma similar a la anterior, con la particularidad de que el nivel de servicios educativos cuyo precio se subvenciona está dado. En la medida en que además este es constante, el tipo impositivo también lo será, incluso aunque la senda en la que se sitúe la economía no fuera estacionaria:

$$\tau_s A\bar{n}^w\left(N^u a_s^{hu} + N^q a_s^{hq}\right) = \left(a_s^h\right)_a \theta^e N^u \bar{E}^P + G_s \quad (6.56)$$

En el contexto de las restricciones presupuestarias de los agentes, la fracción no subvencionada del gasto en servicios escolares constituirá un empleo exógeno (que no obstante crecerá, como sabemos, a la misma tasa que el capital humano medio). Las restricciones presupuestarias privadas y la ecuación de vaciado en el mercado de bienes ahora adoptarán la forma:

$$C_s^q + \left(a_s^h\right)_a \bar{E}^P \le \left(1-\tau\right) A\bar{n}^w a_s^{hq} \quad (6.57)$$

$$C_s^u + \left(a_s^h\right)_a \left(1-\theta^e\right)\bar{E}^P \le \left(1-\tau\right) A\bar{n} a_s^{hu} \quad (6.58)$$

$$mC_s^q + \left(1-m\right)C_s^u + \left(a_s^h\right)_a \theta^e \bar{E}^P + \frac{G_s}{N} = A\bar{n}^w\left(a_s^h\right)_a \quad (6.59)$$

La primera consecuencia importante de este instrumento es que la igualdad entre la relación marginal de sustitución y la tasa de retorno pierde relavancia como herramienta de determinación de la escolarización óptima. En este sentido las cpo de E y la posición en el activo desaparecen, al venir dadas exógenamente, y la tasa de crecimiento de acumulación del grupo j se igualará, con rendimientos constantes en E, a $1+B^j\bar{n}^h\psi_s^j\bar{E}^P$. Asímismo la tasa de crecimiento de la escolarización, salvo cambios en el nivel exógeno por el gobierno, será nula. No obstante, si los stocks de capital humano de partida y los parámetros B son distintos, esta política no implica una igualación en el momento inicial de las tasas de acumulación -incluso aunque los stocks de partida fueran los mismos, las tasas de acumulación divergirían a causa de la diferente productividad del aprendizaje-. **La acumulación de las familias q comenzará siendo de nuevo superior a la de los individuos u. Sin embargo, el peer effect ejercerá un efecto compensatorio que en este caso no se verá compensado por una reducción del volumen de servicios demandados en la restricción presupuestaria.** De hecho, el consumo privado adquiere un carácter residual en este escenario de escuela pública, al devenir no operativa la igualdad entre la RMS y la tasa de retorno del activo. Esto es, primero se determinará el gasto en educación del período y, como diferencia con la renta disponible, podrá calcularse el consumo privado; en este marco, la fijación de un tipo más o menos elevado de subvención educativa para los menos cualificados afectará solamente a su nivel de consumo alcanzable y es una decisión puramente distributiva, sin connotación alguna de eficiencia. Así, durante la transición la participación del consumo en la renta disponible deberá reducirse, toda vez que la de los gastos educativos se incrementa para el grupo u, siendo la situación para el grupo q la inversa.

Cabría preguntarse, por tanto, si el peer effect puede lograr una compensación de la disparidad de tasas de acumulación iniciales. Para responder a la pregunta, de nuevo habrá que prestar atención a la evolución dinámica de θ , a efectos de comprobar si su solución estacionaria se corresponde con aquella ratio que garantiza la igualdad de los ritmos de acumulación de capital humano para ambos grupos, esto es:

$$\theta = \frac{B^q}{B^u} \quad (6.60)$$

La ecuación en diferencias es ahora la siguiente:

$$\theta_s = \theta_{s-1}\frac{\left[1+B^q\overline{n}^h\psi^q_{s-1}\overline{E}\right]}{\left[1+B^u\overline{n}^h\psi^u_{s-1}\overline{E}\right]} = \theta_{s-1}\frac{\left[1+B^q\overline{n}^h\overline{E}\left[m+(1-m)\frac{1}{\theta_{s-1}}\right]\right]}{\left[1+B^u\overline{n}^h\overline{E}\left[m\theta_{s-1}+(1-m)\right]\right]} \quad (6.61)$$

Resolviendo para el valor estacionario, se tiene que solo existe una solución positiva para el polinomio de segundo grado resultante y este es precisamente el valor destacado antes que propicia la convergencia entre las tasas de acumulación. Se comprueba además que la función que relaciona θ_s y θ_{s-1} es estrictamente creciente y cóncava, por lo que el estado estacionario identificado es estable y se converge a él para valores de la ratio de capital humano menores al mismo; durante la transición se observará un crecimiento monótono de la ratio, coherente con el hecho de que la acumulación es más rápida para los hogares más cualificados. En este estado estacionario, el peer effect se hará constante, por lo que la ratio entre el consumo y el capital humano también podrá hacerse constante, tras haberse incrementado en la transición para los individuos q y deteriorado para los u. Una propiedad notable de esta solución es que la tasa de acumulación estacionaria común será estrictamente creciente en el nivel de educación pública, ya que esta alcanza el siguiente valor, una vez efectuada la pertinente sustitución de la ratio entre niveles de capital humano:

$$\Gamma = 1+\overline{E}^P\left[B^q m+(1-m)B^u\right] \quad (6.62)$$

Comparando la solución estacionaria con la derivada para un sistema privado con impuestos y subvenciones, hay una diferencia esencial desde la perspectiva de la igualdad entre individuos: mientras la segunda no entraña dinámica de transición, la primera sí y durante la misma se produce un deterioro de la desviación del capital humano de los hogares u respecto al capital medio social; de hecho es este empeoramiento relativo el que posibilita la convergencia entre las tasas de acumulación por medio del peer effect. Por tanto, la escuela pública es más dañina para la desigualdad cuando las diferencias en la productividad de los alumnos acompañan a aquellas en simples niveles desde s=0.

En cuanto al crecimiento alcanzado en el estado estacionario, como acabamos de ver dependerá del nivel de educación pública elegido por el gobierno en comparación con los niveles de servicios educativos demandados por cada grupo en el régimen privado con impuestos y subvenciones. Así, por tomar los casos más representativos, si $\bar{E}^P = E^{pr,u}$, dado que el peer effect decrece para este grupo en la transición, se tiene que $E^{pr,u}\psi_0^u < \bar{E}^P \psi^{Pu}$, de donde se desprende que la tasa de crecimiento de la economía será mayor. Por el contrario, si se toma $\bar{E}^P = E^{pr,q}$, se tiene que $E^{pr,q}\psi_0^q > \bar{E}^P \psi^{Pq}$, por lo que el crecimiento estacionario se ralentiza en el sistema de escuela pública. Existirá pues un nivel intermedio entre $E^{pr,q}$ y $E^{pr,u}$ para el que las tasas de crecimiento se igualan entre el sistema público y el privado con impuestos y subvenciones y este puede despejarse de las ecuaciones .

Por lo que respecta a la comparación entre sistemas en términos del bienestar alcanzado, se partirá del nivel de provisión pública que equipara las tasas de acumulación estacionaria entre sistemas, para evitar distorsiones dinámicas procedentes de distintos ritmos de crecimiento de los stocks de capital humano. Asimismo se hará la ficción de que el stock de capital humano medio ponderado y de cada grupo es el mismo en el estado estacionario que en s=0, para evitar que los cambios en la transición al estado estacionario interfieran en la comparación. Así, para el nivel señalado de gasto público en educación, el tipo impositivo disminuirá a consecuencia del recorte de volumen de servicios a financiar, ya que $\bar{E}^P < E^{pr,u}$. Para los hogares q los efectos en bienestar son ambiguos, ya que por un lado disfrutarán de una renta disponible superior, pero por otro, su gasto en educación aumentará al cumplirse $\bar{E}^P > E^{pr,q}$. Estos efectos netos sobre la renta pueden formularse como $\Delta E^u \left[\theta^e (1-m) a_s^{hq} - \left(a_s^h \right)_a \right]$, donde se supone, para facilitar la comparabilidad, que el tipo de las subvenciones es el mismo que se utilizaba en el régimen privado.

En cuanto a los hogares u verían aumentar su bienestar en esta comparación simplificada, aunque por omitir esta los efectos del período de transición no tiene en cuenta el encarecimiento relativo de los servicios educativos a consecuencia de su empobrecimiento relativo a lo largo de la senda hasta el estado estacionario. Sin considerar este efecto, que puede ser crítico en el cómputo, y circunscribiendo la comparación al período en el que ambos sistemas se sitúan en sus respectivos estados estacionarios, las familias u se beneficiarían tanto del recorte impositivo como de una menor cantidad adquirida de servicios educativos, con un incremento de renta dado por $-\Delta E\left[\left(1-\theta^{e}\right)\left(a_{s}^{h}\right)_{a}+\theta^{e}\left(1-m\right)a_{s}^{hu}\right]$. **En cualquier caso, el saldo total es ambiguo, máxime si se computaran los cambios que tienen lugar en la transición al estado estacionario**. Cuando el nivel de educación pública es superior a $E^{pr,u}$, la tasa de acumulación, como vimos antes, será inequívocamente superior a la del equilibrio estacionario con impuestos y subvenciones, aunque el tipo impositivo subirá. Será necesario por tanto el transcurso de más períodos para que los agentes compensen este menor nivel de renta disponible por medio de una renta laboral antes de impuestos superior; su preferencia por uno u otro sistema dependería en última instancia de su tasa de preferencia intertemporal, que puede ponderar más o menos las pérdidas de consumo que se generarían en los primeros períodos dentro del estado estacionario.

No obstante, la comparación con un sistema estrictamente privado sin intevención es favorable para la escuela privada, al menos en el terreno de la desigualdad. En este sentido, la generada por la escuela pública está acotada a aquella que se acumula en la transición a su estado estacionario, mientras que la del régimen privado está en continuo aumento, ya que el estado estacionario se basa en la constancia de la tasa de crecimiento, aunque a costa del aumento continuo del peer effect para los hogares u. En crecimiento, la tasa media ponderada del sistema privado es replicable por la escuela pública, fijando un valor adecuado del volumen de provisión.

Como se distinguió al plantear las formas de financiación de la escuela pública, esta puede presentarse también a los hogares como íntegramente financiada por el gobierno, lo que implica la supresión de las subvenciones para los hogares u. La restricción presupuestaria de gobierno y de las familias pasará a ser:

$$\tau A\bar{n}^{w}=\bar{E}^{P} \quad (6.63)$$

$$C_{s}^{q}\leq\left(1-\tau^{P}\right)A\bar{n}^{w}a_{s}^{hq} \quad (6.64)$$

$$C_{s}^{u}\leq\left(1-\tau^{P}\right)A\bar{n}^{w}a_{s}^{hu} \quad (6.65)$$

El tipo de estado estacionario que se alcanza con este esquema de financiación es el mismo que el comentado antes, ya que para derivarlo se utilizaron exclusivamente relaciones técnológicas; la elección del modo de financiación tendrá solamente repercusiones distributivas, aunque a priori estás no están perfectamente definidas. Un factor clave en la evaluación de estas últimas es el signo de la variación del tipo impositivo. Suponiendo que se buscara fijar $\bar{E}^{p}$ en un nivel tal que esta fuera nula, el análisis estático apuntaría a que los hogares q dejarían de pagar las tasas escolares, por lo que se beneficiarían de un incremento de renta disponible por período, dado un vector de stocks de capital humano comparables en ambos sistemas. Los hogares u también ganarán, aunque solamente por la parte no subvencionada del gasto anterior. Sin embargo, cuanto mayor sea el gasto escolar del gobierno y en concreto cuando este comience a generar aumentos impositivos, tanto más probable es que dichas pérdidas comiencen más que a compensar las ganancias estáticas de renta, primero para las familias u y, para aumentos más pronunciados del tipo, también para las cualificadas.

Cuando los parámetros B se igualan la dinámica se invierte. En la situación de partida, un stock de capital humano inferior para los u se traduce en una tasa de acumulación superior de estos últimos, a consecuencia del efecto externo en la función de inversión en capital humano. En cualquier caso, la dinámica de θ_s es análoga al caso anterior, con la peculiaridad de que la igualación de las tasas de acumulación en esta variante implica la igualación de los niveles de capital humano de unos y otros individuos en estado estacionario, suprimiéndose por completo la desigualdad entre los mismos. En la transición al estado estacionario, es la posición relativa de las familias q la que se deteriora en términos relativos.

Régimen escolar mixto con cupones educativos. Bajo esta modalidad, los agentes adquieren todos sus servicios educativos en el sector privado, si bien el gobierno financia una determinada cuantía per cápita $\bar{E}^{c}$ vía transferencia condicionada, lo que significa que los hogares deben canalizar íntegramente dicha cantidad a la adquisición de servicios educativos y en ningún caso a consumo. Por tanto la cuantía de los cupones no aparece en la restricción presupuestaria, aunque sí en la tecnología de acumulación. Por encima de los cupones los agentes están autorizados a realizar el gasto privado que deseen, supondremos que en las mismas condiciones que en el sistema de impuestos y subvenciones, esto es, con un pago íntegro de las tasas por las familias q y con un cierto tipo de subvención las u.

Las restricciones presupuestarias de los agentes y la condición de equilibrio en el mercado del bien final son similares a las descritas hasta el momento y en cualquier caso siguen evidenciando la necesidad de tasas de crecimiento del capital humano iguales entre grupos para que la asignación resultante sea compatible con una senda estacionaria:

$$C_s^q + \left(a_s^h\right)_a E_s^{Pc,q} \leq \left(1-\tau_s^{Pc}\right) A\overline{n}^w a_s^{hq} \quad (6.66)$$

$$C_s^u + \left(a_s^h\right)_a \left(1-\theta^e\right) E_s^{Pc,u} \leq \left(1-\tau_s^{Pc}\right) A\overline{n}^w a_s^{hu} \quad (6.67)$$

$$mC_s^q + (1-m)C_s^u + \left(a_s^h\right)_a \left[\overline{E}^c + mE_s^{Pc,q} + (1-m)E_s^{Pc,u}\right] + \frac{G_s}{N} = A\overline{n}^w \left(a_s^h\right)_a \quad (6.68)$$

La cpo de igualdad entre la RMS intertemporal y la tasa de retorno del capital humano[222], que no experimenta variaciones para ninguno de los dos grupos, se sustancia del siguiente modo:

$$\frac{1}{\beta}\left[1 + B^q \psi_s^q \left(\overline{E}^c + E^{Pc,q}\right)\right] = \left(1-\tau^{Pc}\right) A\overline{n}^w B^q \left(1-\overline{n}^w\right) + 1 \quad (6.69)$$

$$\frac{1}{\beta}\left[1 + B^u \psi_s^u \left(\overline{E}^c + E^{Pc,u}\right)\right] = \frac{\left(1-\tau^{Pc}\right)}{\left(1-\theta^e\right)} A\overline{n}^w B^u \left(1-\overline{n}^w\right) + 1 \quad (6.70)$$

Donde el superíndice v denota este sistema mixto con cupones. A la vista de las cpo, el valor de la subvención que posibilita una ratio de los servicios educativos totales consumidos tal que iguale las tasas de acumulación es el mismo que en el régimen privado con impuestos y subvenciones. Esto es, eligiendo dicho tipo para θ^e y con independencia del tipo impositivo (excepto si este fuera expoliatorio), el sistema alcanzará desde s=0 el estado estacionario sin dinámica de transición al mismo. También es manifiesto en estas cpo que, si los tipos impositivos fueran los mismos que en el régimen privado con impuestos y subvenciones, la demanda total de servicios educativos (incluyendo los cupones) sería la misma que en aquel, con lo que se produciría un efecto expulsión total del gasto privado. O dicho de otra forma, para el mismo tipo impositivo -y el mismo valor de la subvención- el sistema con cupones da lugar a la misma solución de equilibrio que el régimen privado intervenido. El paso siguiente será entonces comprobar la relación que existe entre el tipo impositivo en este régimen mixto y en el privado. En primer lugar, conviene establecer la relación entre el tipo con cupones y la cuantía del cupón, teniendo en cuenta que a su vez la demanda privada de servicios en este depende del tipo impositivo. Esta doble relación se materializa en la siguiente ecuación:

---

[222] Al tratarse de una tasa de retorno marginal, se refiere solamente a la parte de gasto en educación realizada voluntariamente por los agentes, por encima del cupón, y como tal no experimenta cambios.

$$\tau^{Pc} = \frac{1}{A\overline{n}^{w}}\left[\overline{E}^{Pc}\left[1-\theta^{e}\left(1-m\right)\right]+\theta^{e}\left(1-m\right)\left[\varphi_{0}\left(1-\tau^{Pc}\right)+\varphi_{1}\right]\right] \ (6.71)$$

$$E^{Pc,u} = \varphi_{0}\left(1-\tau^{Pc}\right)+\varphi_{1}-\overline{E}^{Pc};\ \varphi_{0} = \frac{A\overline{n}^{w}\beta}{\left(1-\theta^{e}\right)\psi_{0}^{u}};\ \varphi_{1} = \frac{\beta-1}{B^{u}\left(1-\overline{n}^{w}\right)\psi_{0}^{u}} \ (6.72)$$

Reagrupando términos, se observa que:

$$\frac{d\tau^{Pc}}{d\overline{E}^{Pc}} > 0 \ (6.73)$$

Además, hay que tener en cuenta que $E^{pr,u} = \varphi_{0}\left(1-\tau^{pr}\right)+\varphi_{1}$, por lo que si $\overline{E}^{Pc} = 0 \Rightarrow \tau^{Pc} = \tau^{pr}$, como por otra parte es intuitivo. Esto es, para valores positivos del cupón, teniendo en cuenta la pendiente de la recta derivada más arriba, el tipo impositivo será mayor que en el régimen privado. **Por tanto, siempre que el cupón esté operativo, la cantidad total de servicios educativos será inferior a la del régimen privado intervenido, al ser mayor el tipo impositivo que recae sobre los hogares**. Lo mismo puede verse, desde otro punto de vista, si se comparan el tipo que puede financiar el sistema de cupones y el privado, los cuales vienen dados por el primer y segundo miembro, respectivamente, de la siguiente ecuación:

$$\frac{\overline{E}^{Pc}}{E^{pr,u}-E^{Pc,u}} <> \theta^{e}\left(1-m\right) \ (6.74)$$

El hecho de que el segundo miembro sea menor que 1 implica que, para que el sistema de cupones genere un tipo inferior al privado intervenido, la demanda total de servicios educativos del primero debe ser inferior al del segundo.

En concecuencia, la tasa de acumulación de capital humano, si bien se equiparará entre grupos desde el período inicial, será menor que la registrada en el sistema privado intervenido. En cuanto al grado de desigualdad será el mismo, puesto que el peer effect inicial se consolida desde s=0, al no diferir en ningún momento las tasas de acumulación gracias a la aplicación de la subvención. Una condición sine qua non para que este resultado sea válido es que el nivel del cupón no sea superior al valor de equibrio de demanda de servicios educativos en el sistema privado para el tipo impositivo del sistema con cupones, es decir:

$$\overline{E}^{Pc} < E^{pr,u}\left(\tau^{Pc}\right) \ (6.75)$$

Caso contrario, la consecución de un estado estacionario sin transición no estaría garantizada, ya que la demanda efectiva de educación para los no cualificados coincidiría con el cupón proporcionado por el gobierno y lo mismo sucedería para las familias q. Se reproduciría, por tanto, el tipo de solución asociado al sistema de escuela pública, con todos sus inconvenientes (y, eventualmente, ventajas) incorporados. **Cuando la comparación se hace con un régimen de escuela pública pura, si el nivel de provisión pública fuera el mismo que en el sistema de cupones, este genera una tasa de crecimiento superior en el estado estacionario y además una situación superior desde el punto de vista de la desigualdad,** resultado que en última instancia obedece a que el cupón es inferior a la elección privada a tipo impositivo equivalente, como acabamos de ver, lo que sitúa al sistema de empresa pública en desventaja clara en todos los terrenos.

Un caso especial de régimen mixto lo constituiría aquel en que la escuela pública es compatible con un complemento privado, al no producir indivisibilidades de una entidad tal que forzara la exclusividad. Si además el régimen de financiación de la escuela pública fuera el mismo que en el sistema privado, esto es, solo están exentos de las tasas los hogares u por la cuantía de su subvención, la solución de equilibrio sería la misma que en el régimen privado intervenido (para el mismo tipo de subvención), ya que también lo sería el tipo impositivo; en consecuencia, se observaría un efecto expulsión total del gasto privado por el público. Por lo demás, las propiedades en cuanto a crecimiento y desigualdad serían las mismas que en el sistema privado y, en términos de crecimiento, este tipo de sistema mixto sería superior al de cupones, si bien es poco probable que esta ausencia de indivisibilidades del tiempo pudiera presentarse en la práctica.

Siendo esta es la prelación de resultados, tiene sentido que los sistemas mixtos se impongan al de escuela pública, pero sus posibles ventajas frente a un sistema privado con impuestos y subvenciones son menos claros bajo los supuestos de modelización utilizados en este apartado. **Los primeros pueden tener un sentido, por ejemplo, cuando las preferencias son del tipo descrito por Preston (2003) y comentadas en el capítulo 5, con un factor de altruismo heterogeneo y aleatorio**, tal que imponer un mínimo nivel de educación por medio de la provisión pública -bien sea el cupón, bien la propia escuela pública- puede tener sentido si existen posibilidades reales de que los algunos agentes privados no lo elegirían si tuvieran la posibilidad de hacerlo. Los cupones , como la escuela pública, podrían constituir una solución efectiva cuando los grupos (o alguno de ellos) se encuentra en una trampa de crecimiento, con una elección nula óptima de servicios educativos, aunque deberían proveerse en una cuantía suficiente para generar una demanda positiva de servicios complementarios demandados privadamente, toda vez que podría observarse la siguiente situación, que haría de la oferta de cupones los únicos servicios educativos demandados, por ejemplo, por los individuos u:

$$\frac{1}{\beta}\left[1+B^u\psi^u\left(1-\bar{n}^w\right)\bar{E}^{Pc}\right]<\frac{\left(1-\tau^{Pc}\right)}{\left(1-\theta^e\right)}A\bar{n}^w B^u\left(1-\bar{n}^w\right);\ \tau^{Pc}=\frac{\bar{E}^{Pc}}{A\bar{n}^w} \quad (6.76)$$

Habría que señalar, además, que una comparación entre un régimen privado intervenido y otro mixto entraña consideraciones que no pueden reflejarse enteramente en un modelo tan estilizado como el que se está usando. Por ejemplo, el cambio en los servicios públicos no es infinitesimal, sino que en la práctica se trataría de un escalón considerable que requeriría que el gobierno dispusiese de información perfecta para que su nivel no obstaculizase la consecución de la proporción óptima entre servicios escolares aplicados por cada grupo. Más aún, cuando el número de tipologías de individuos es alto (o incluso existe una gradación perfecta, en el sentido de que sus parámetros B se distribuyen de forma continua a lo largo de un cierto segmento) y la tipología de escuelas heterogéneas, la imposición de un valor cualquiera de $\bar{E}$ siempre perjudica a aquellos que tienen tendencia a demandar una cantidad menor de servicios escolares, ya que tomarán los que le ofrece el gobierno y no se beneficiarán de la variedad más amplia del sector privado, circunstancia que pudiera llegar a traducirse en una menor acumulación si la variedad fuera acompañada de calidad. En tal caso, precisamente los sectores sociales más necesitados de elevar en términos relativos su escolarización serán los menos incentivados a hacerlo, por lo que sus tasas de acumulación no convergirán hacia los de los grupos con mayor predisposición al aprendizaje. En este sentido el sistema mixto presenta, frente al privado intervenido, un sesgo potencial hacia la regresividad que no puede apreciarse completamente un modelo en el la que la tipología de individuos y escuelas es deliberadamente estrecha para facilitar su operatividad analítica.

Sistema mixto con política de excelencia en la escuela pública. Una última política a analizar será, en el marco de un sistema mixto como el que acaba de describirse, un incremento de la calidad de la enseñanza pública. Este podría adoptar variadas formas, aunque partiremos del trabajo de Tamura (2001), que describe en equilibrio parcial la importancia de un profesorado de calidad para lograr la convergencia en el capital humano de distintos estratos de población y lo adaptaremos al entorno de equilibrio general que se viene empleando en este capítulo.

En el citado trabajo, Tamura utiliza una función de aprendizaje dependiente de dos clases de inputs: número de profesores por alumno y capital humano relativo de los profesores en relación con el capital humano de los alumnos, supuesto que estos se agrupan en distritos escolares, en los que el nivel de capital acumulado es homogéneo. En el modelo construido esta estrategia del gobierno pasará por emplear la escuela pública como instrumento para realizar dos tipos de actuaciones sobre el capital humano de los alumnos, que por lo demás siguen teniendo una extracción heterogénea. Primero, la provisión, como en los apartados precedentes, de un nivel homogéneo de servicios educativos constante, $\bar{E}^x$, con los superíndices x denominando el régimen de excelencia. Segundo, una política de excelencia educativa consistente en tomar como referencia la máxima capacidad cognitiva de las clases (esto es, B^q) e intentar que la de los alumnos más rezagados converja a la primera, mediante los correspondientes estímulos, el necesario entorno de disciplina y la contratación de individuos portadores del nivel de capital humano más alto existente en la sociedad en cada período. Con estas premisas, la función de inversión bruta en capital humano se verá modificada y será:

$$i_s^{hj} = B^j\left(\overline{n}^h\right)\psi_s^j\left[\left(\frac{B^q}{B^j}\right)\overline{E}^{Px}\right];\ j = q,u \quad (6.77)$$

Una forma alternativa de interpretar esta ecuación es que la escuela pública provee en este escenario un componente de cantidad de servicios y otro de calidad; la interacción de ambos será el input a aplicar en la función de acumulación del activo real. Esto no significa que en aquellos regímenes en que no se ha incluido este elemento la escuela pública careciera de calidad, sino que la orientación general del sistema no primaba la convergencia de los colectivos de alumnos hacia los máximos niveles de capacidad existentes o el profesorado empleado era escaso, mal motivado o con niveles de capital humano reducidos. Esta es una manera práctica de representar este avance relativo en la capacidad de la escuela pública de proporcionar su output, sin que quepa interpretar el resto de situaciones como una desatención de los alumnos o una carencia total de medios.

La mayor calidad en la escuela pública puede lograrse mediante un coste adicional, dado por la contratación de profesorado entre el segmento de la población que posee una mayor formación. Supondremos que, para evitar que estos últimos individuos incurran en coste de oportunidad alguno, se les paga un salario real por unidad de capital humano igual al que percibirían en el sector productor del bien final. Dado que la población es constante, será necesario emplear a un número αN^q de individuos cualificados en esta tarea, siendo la constante que determina la fracción una función creciente y convexa de $B^q - B^u$. En un contexto de hogares representativos, esta fracción puede racionalizarse también como la asignación de una parte fija del tiempo de trabajo a tareas educativas y la restante, a la producción del bien final. En cualquier caso ambos componentes de la remuneración serán indistinguibles en el lado de los recursos de la restricción presupuestario del hogar representativo q. La financiación de todos los gastos del gobierno, incluyendo ahora los salarios a los profesores, se llevará a cabo como hasta ahora a través del establecimiento de un tipo impositivo sobre las rentas del trabajo a todo individuo, trabaje para el sector privado o el sector público.

En principio se supondrá que la escuela pública genera indivisibilidad y, en consecuencia, es incompatible con una demanda adicional de educación de los agentes privados en las escuelas privadas; en el caso de que cupiera alguna complementariedad, se podría suponer que el paso por la escuela pública tiene la virtualidad de modificar permanentemente los coefiientes de productividad de los individuos, de suerte que los nuevos coeficientes se encontrarían también operativos durante la fracción del tiempo de aprendizaje transcurrido en la escuela pública. En el caso más simple de indivisibilidades, la restricción presupuestaria del gobierno será la que se transcribe más abajo:

$$\tau_s^x \overline{n}^w A\left(N^q a_s^{hq} + N^u a_s^{hu}\right) = \alpha N^q A \overline{n}^w a_s^{hq} + N\overline{E}^{Px}\left(a_s^h\right)_a + G_s \quad (6.78)$$

Dividiendo los dos miembros por N y el stock de capital social medio, se observa que un tipo impositivo constante será compatible con la existencia de una proporción constante entre el stock de capital de q y el medio social, lo cual sucederá siempre que sus tasas de crecimiento se igualen en todo período -aparte de la tradicional exigencia relativa a la tasa de crecimiento del consumo público-. Es más, al eliminarse el término de subvenciones al precio de la educación el tipo impositivo puede formularse exclusivamente a partir de parámetros exógenos de política fiscal o de la tecnología educativa (la ratio profesores sobre población total), por lo que puede hablarse en este caso de un tipo de interés exógeno a priori y no endógeno como en los escenarios en que el gasto por subvenciones dependía de la demanda de escolarización de uno de los grupos. Por su parte, las restricciones presupuestarias-flujo de cada hogar reprensentativo serán las que pueden verse a continuación:

$$C_s^q \leq \left(1-\tau^{Px}\right) A\overline{n}^w a_s^{hq} \quad (6.79)$$

$$C_s^u \leq \left(1-\tau^{Px}\right) A\overline{n}^w a_s^{hu} \quad (6.80)$$

$$mC_s^q + (1-m)C_s^u + \left(a_s^h\right)_a \left[\overline{E}^{Px} + mE_s^{Pxq} + (1-m)E_s^{Pxu}\right] + \alpha m\overline{n}^w a_s^{hq} + \frac{G_s}{N} = A\overline{n}^w \left(a_s^h\right)_a \quad (6.81)$$

Como se aprecia, tanto el consumo público como los salarios a los profesores son componentes de la demanda. Llevando estos últimos al lado de la producción con signo negativo, implicarían una detracción a la producción total del bien compuesto (de un modo paralelo al consumo público), ya que la utilización de individuos cualificados como profesores implica el sacrificio de una fracción de su tiempo de trabajo. En defiinitiva, mediante esta pólítica el gobierno podría conseguir también que desde el período inicial las tasas de acumulación se igualaran y la economía se situara en una senda de crecimiento positiva estacionaria, con consumos creciendo a la misma tasa que el capital humano.

Centrando el análisis en la tecnología de **rendimientos constantes a escala en E,** el régimen de excelencia crea de facto una equiparación en los coeficientes B, lo que permite igualar las tasas de retorno del activo. El modelo converge entonces en uno de escuela pública sin heterogeneidad en los coeficientes B, de suerte que la tasa de acumulación para los hogares u se hace mayor en la transición y el sistema se dirige hacia el estado estacionario con ratio constante de capitales, con la peculiaridad de que la igualación entre los coeficientes B hace que esta ratio sea 1, esto es, no solo se equiparan las tasas de acumulación, sino que se supera la diferencia inicial en niveles del capital humano y por tanto la corrección de la desigualdad es total. Es más, al ser los mismos los niveles de capital humano se alcanza -y esta es una diferencia clara con los restantes sistemas- un índice de externalidades en acumulación unitario, al igualarse los dos stocks de capital humano entre sí y con el stock medio ponderado. Consiguientemente, la tasa de crecimiento del sistema en estado estacionario, de nuevo creciente en el nivel de provisión pública, será:

$$\Gamma = 1 + B\left(1 - \bar{n}^{w}\right)\bar{E}^{Px};\ B = B^{u} = B^{q} \quad (6.82)$$

Comparando este instrumento con un régimen mixto con subvenciones, la relación entre la tasa de crecimiento entre uno y otro se invierte con respecto a un régimen ordinario de escuela pública, sin política de excelencia. Si $\bar{E}^{Px} = E^{pr,u}$ entonces la tasa de crecimiento estacionaria será menor en el régimen de excelencia para un B dado, ya que $\psi^{xu} < \psi^{pr,u}$. Por el contrario, si $\bar{E}^{Px} = E^{pr,q}$ la tasa de acumulación estacionaria será mayor en el sistema de excelencia que en el privado[223]. El hecho de que $E^{pr,q} < E^{pr,u}$ no es incompatible con el crecimiento de la tasa de acumulación respecto a $\bar{E}^{Px}$ en estado estacionario, ya que esta relación se produce para un peer effect de tamaño determinado (1), mientras que a lo largo de la transición el peer effect varía, razón por la que es posible establecer las comparaciones con el sistema privado. En cuanto a la comparación del tipo impositivo privado con el de el sistema excelencia, el signo de esta diferencia es a priori ambigua, ya que hay dos efectos de signo opuesto a considerar: i) La adición del pago a profesores en el sistema de excelencia constituye un coste añadido que no lastra el sistema privado: ii) En sentido contrario no solo se abandona la subvención en el régimen de excelencia, sino que, si se opta por $\bar{E}^{Px} = E^{pr,q}$, la cantidad a financiar en este último (entendiendo por tal su coste variable de producción) será menor que el privado, lo que da pie a la ambigüedad comentada antes. Si los profesores fueran considerados un coste

223 Para niveles de $\bar{E}^{Px}$ menores a $E^{pr,q}$ si bien el índice del peer effect descendería en el estado estacionario de excelencia respecto al privado, también lo haría el volumen aplicado del servicio. La comparación debería tener en cuenta, por una parte, la divergencia entre los dos volúmenes de servicios aplicados y, por otra, la desigualdad inicial entre ambas posiciones en capital humano.

variable, aun así persistiría la ambigüedad, ya que el volumen de servicios a financiar sería menor en el sistema de excelencia, aunque la diferencia con el sistema privado sería menor.

La comparación con el sistema público ordinario está distorsionada por el hecho de que en un caso las B son diferentes (ya que si no, la solución desemboca en la misma del sistema de excelencia) y en otra, iguales tras la actuación de los profesores. En cualquier caso, dado que la convergencia de la producitividad de los no cualificados se produce hacia la de sus pares cualificados, puede usarse para homogeneizar la comparación una misma B^q . Adoptado este supuesto, la tasa de acumulación sería mayor en el sistema de excelencia, ya que $\psi^{pq} < \psi^{xq} = 1$.

Al margen de las comparaciones con los restantes sistemas analizados, que como se aprecia son en general favorables al régimen de excelencia público, una pregunta inmediata es si no cabría hablar de un régimen de excelencia privado; esto es, si una política de contratación de profesores no podría ser adoptada por las propias escuelas privadas como parte de su estrategia de competencia, suponiendo que se permitiera en la modelización algún grado de diferenciación entre ellas a la hora de configurar su catálogo de servicios. La respuesta es importante, en la medida en que eventualmente podría ahorrar dinero a los contribuyentes, y una primera apreciación apunta a que depende de si la retribución a los profesores constituye un coste fijo o variable. En el primer caso, la minimización de costes en el segmento de escuelas privadas exigiría la maximización de la producción de servicios, situación que con elevada probabilidad conduciría a la producción a una reestructuración del mercado a raíz de la cual se redujera el número de competidores, con una reducción sensible de la intensidad de la competencia y la eventual aparición de poder de mercado. En el segundo, en la medida en que los precios igualasen a los costes marginales variables, se produciría la recuperación íntegra de todos los costes adicionales, por lo que en cualquier caso el beneficio se anularía; si la diferenciación del producto fuera tal que otorgase a los competidores que utilizasen esta estrategia un cierto poder de mercado, su beneficio a largo plazo podría ser positivo, con lo que aumentarían los incentivos a emprender este estrategia, aunque la situación podría volver a ser preocupante para las autoridades, por la aparición de una brecha entre precio y coste marginal, con la consiguiente pérdida de eficiencia. Pero **más allá de estos potenciales problemas tecnológicos, el sistema sería difícilmente sostenible en el marco de la escuela privada por una razón de demanda**. Si el precio reflejara el coste variable de implantar un sistema de excelencia y, como tal, de remunerar al profesorado, aquel sería estrictamente superior al necesario para que los hogares q obtuvieran los mismos resultados, por lo que no estarían dispuestos a pagarlo siempre que hubiera escuelas que man-tuvieran el sistema antiguo. Por ello, habría escuelas que estarían dispuestas a ofrecer este servicio, produciéndose de facto una segregación que haría inviable el sistema, en cuanto que precisa de la coexistencia de alumnos de ambos grupos para que algunos de ellos puedan marcar un patrón de excelencia. **En consecuencia, tanto por razones de oferta como de demanda, es improbable que la escuela privada estuviera en condiciones de proporcionar este tipo de servicios a los alumnos de baja cualificación.**

La perspectiva del planificador benevolente (PB). Pasaremos ahora a analizar el problema del PB. Su función objetivo será una ponderación de las utilidades de cada grupo, siendo los pesos sus participaciones en el total de la población y su tasa subjetiva de descuento la misma que la de los hogares individuales. Supondremos por último que el planificador participa del mismo grado de altruismo intergeneracional que los individuos que pueblan la economía. La función a maximizar será por tanto:

$$W=\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s}\left[m\ln C_{s}^{q}+(1-m)\ln C_{s}^{u}\right] \quad (6.83)$$

Las restricciones a la que debe someterse esta función objetiva son aquella relativa a los recursos de la economía, en los diversos regímenes educativos que hemos ido desgranando, así como a la acumulación de capital humano de ambos tipos de hogares. Habrá que tener presente que el capital humano medio ya no será en ningún caso una variable exógena, como sucedía al estudiar el comportamiento de los agentes privados. En el caso competitivo puro sin intervención pública alguna la función lagrangiana las cpo del PB serían las siguientes, tomando en todo momento la tecnología de acumulación con rendimientos constantes en E (la única de las dos consideradas que generaba una verdadera solución de equilibrio general):

$$\Psi=\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s}\left\{\begin{array}{l} m\ln C_{s}^{q}+(1-m)\ln C_{s}^{u}+\lambda_{s}\left[\begin{array}{l} A\bar{n}^{w}a_{s}^{h}-mC_{s}^{q}-(1-m)C_{s}^{u}- \\ -a_{s}^{h}\left(mE_{s}^{PB,q}+(1-m)E_{s}^{PB,u}\right)-\dfrac{G_{s}}{N} \end{array}\right]+ \\ \mu_{s}\left[m\left[a_{s}^{hq}\left[1+\dfrac{a_{s}^{h}}{a_{s}^{hq}}B^{q}\left(1-\bar{n}^{w}\right)E^{PB,q}\right]+(1-m)\left[a_{s}^{hu}\left[1+\dfrac{a_{s}^{h}}{a_{s}^{hu}}B^{u}\left(1-\bar{n}^{w}\right)E^{PB,u}\right]\right]-ma_{s+1}^{hq}-(1-m)a_{s+1}^{hu}\right]\right] \end{array}\right\} \quad (6.84)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial C_{s}^{j}}=\beta^{s}\left[\frac{1}{C_{s}^{j}}-\lambda_{s}\right]\leq 0;\ j=q,u \quad (6.85)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial E^{pr,j}}=\beta^{s}\left[-\lambda_{s}+\mu_{s}B^{q}\left(1-\bar{n}^{w}\right)\left(E_{s}^{PB,j}\right)\right]\leq 0;\ j=q,u \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a_{s+1}^{hj}}=-\beta^{s}\mu_{s}+\beta^{s+1}\left[\lambda_{s+1}\left\{A\bar{n}^{w}-\omega_{j}E_{s+1}^{PB}\right\}+\mu_{s+1}\left\{1+\omega_{j}B^{j}\left(1-\bar{n}^{w}\right)E_{s+1}^{PB,j}\right\}\right]\leq 0;\ j=q,u \quad (6.87)$$

$$\lim_{s\to\infty}\beta^{s}\mu_{s}a_{s}^{hj}=0 \quad (6.88)$$

$$j=q,u;\ \omega_{q}=m;\ \omega_{u}=1-m$$

Combinando las cpo, obtenemos los siguientes resultados, que incluyen la tasa de retorno social para la inversión en capital humano:

$$\frac{C^q_{s+1}}{\beta C^q_s} = \frac{C^u_{s+1}}{\beta C^u_s} = \frac{\lambda_s}{\beta \lambda_{s+1}} \quad (6.89)$$

Esto es, las tasas de crecimiento bruto del consumo deben igualarse entre sí. **Teniendo en cuenta esta condición, solamente aquella senda en la que las tasas de acumulación se igualen será óptima desde un punto de vista social**, ya que de lo contrario la igualdad entre las tasas de crecimiento del consumo no sería sostenible (se llegaría a un nivel asintóticamente próximo a 0 en E en el grupo que acumulara más despacio). **Por otro lado, solamente una senda estacionaria en que todo agente acumulara a la misma velocidad cumpliría a lo largo de todo su recorrido las condiciones del PB**. Esta se caracterizaría también por un nivel constante de E para cada grupo. Como sabemos, sin embargo, esta solución no es alcanzable sin intervención pública con la tecnología analizada.

En cuanto a la tasa de retorno social, esta se refleja en el segundo miembro de la condición de no arbitraje:

$$\frac{C^q_{s+1}}{\beta C^q_s} = \frac{C^u_{s+1}}{\beta C^u_s} = \left[A\overline{n}^w - \omega_j E^{PB}\right] B^j \left(1-\overline{n}^w\right) + 1 + \omega_j B^j \left(1-\overline{n}^w\right) E^{PB,j} \equiv rr^{h,j,PB}_{s,s+1} \quad (6.90)$$

En el desarrollo de la tasa se observan varias diferencias respecto a las tasas privadas. En primer lugar y más obvia, desde el momento en que la productividad en el aprendizaje B difiere entre grupos no existirá una, sino dos tasas de retorno sociales distintas, frente a una sola tasa de crecimiento del consumo, común a los dos grupos. Teniendo en cuenta que la tasa de crecimiento del capital humano medio es única, de nuevo la solución óptima social no es alcanzable sin intervención. Segunda, esperable, se internalizan los efectos externos de la acumulación de capital humano sobre los procesos educativos de los dos grupos de individuos, lo que eleva la tasa de retorno. Tercera, emerge un segundo efecto externo sobre el precio de la educación privada dada la tecnología empleada, en el sentido de que un aumento en la acumulación del activo real conlleva un encarecimiento de su precio (a través de una mayor sofistificación del output) y, consiguientemente, un mayor gasto de recursos sociales. Permaneciendo todo lo demás constante, este factor haría que la tasa de retorno se redujera y conduciría a una demanda de servicios educativos excesivamente alta por los agentes privados.

La consecuencia principal de la consideración conjunta de todas estas condiciones es que **un sistema educativo** en el que los agentes privados conserven algún grado de autonomía (esto es, el privado, privado con intervención o mixto con cupones) **solamente**

podrá cumplir los criterios de optimalidad social cuando cumpla las 3 condiciones siguientes: i) los parámetros B se igualen; ii) los ritmos de acumulación de capital humano también sean los mismos para todo individuo; iii) los volúmenes de input educativo aplicado sean los mismos para todos los hogares. En efecto, dinamizando la condición de recursos de la economía se observa que la única tasa común a la que pueden crecer los consumos a lo largo de toda la senda es a la de acumulación del capital medio ponderado, caso en el que el cual las demandas educativas deben ser constantes. Considerando ahora las restricciones presupuestarias de los agentes privados, el consumo debe crecer en línea con su capital humano, por lo que ambas tasas de acumulación deben igualarse para que el consumo pueda anclarse al ritmo de acumulación del capital social medio. Además, dado que para conseguir esto, dado que las diferencias en los niveles de partida del capital humano y, eventualmente, de las productividades B exigen ciertas proporciones entre las demandas educativas, alterarlas para corregir los efectos externos imposibilitaría la consecución de la misma tasa de acumulación, por lo que las demandas educativas no solo tienen que ser constantes a lo largo de una senda estacionaria, sino que también deben ser las mismas. **Es obvio que el sistema competitivo descentralizado, tal como ha sido definido, no es capaz de cumplir simultáneamente estas tres condiciones de optimalidad social.**

Al margen de esta proposición, que es la principal, tiene interés también comprobar cuál de los dos grupos de agentes en el equilibrio competitivo descentralizado incurre en una externalidad positiva o negativa de acuerdo con los criterios de corrección considerados por el PB. Comparando estos dos términos de la tasa de retorno, positivo y negativo, el efecto predominante sería el positivo cuando $E^{PB,j} \geq E^{PB}$. La lectura de la desigualdad es directa: la externalidad relacionada con el proceso educativo tiene una magnitud directamente proporcional al nivel de escolarización propio elegido por cada grupo, mientras que aquella vinculada al precio relativo de los servicios educativos afecta al conjunto de los demandados por ambos grupos, ya que el precio a que se enfrentan es común. La comparación de estas dos dimensiones, por lo tanto, se hace esencial para definir cuál de ellas es la predominante A partir de aquí pueden distinguirse varias situaciones. Si $B^q = B^u$ (circunstancia en la que se cumpliría la condición óptima de consumo), sabemos que $E^{pr,q} > E^{pr} > E^{pr,u}$. Por esta razón, para los individuos u el signo será siempre negativo, por lo que podrá afirmarse que su demanda de educación es demasiado elevada en relación con el óptimo social. Para los q la situación es la contraria, por lo que su demanda de educación será inferior en equilibrio competitivo descentralizado al óptimo social. Cuando $B^q > B^u$ no puede llegarse a ningún resultado concluyente para ninguno de los dos grupos. En este sentido, solo puede colegirse de las cpo que la tasa de acumulación será mayor para los q, pero no se puede ser más preciso sobre el volumen de servicios que estas familian demandan en relación con el de los hogares q. Esto es:

$$\frac{E_s^{pr,q}}{E_s^{pr,u}} > \frac{B^u}{B^q}\frac{a_s^{hq}}{a_s^{hu}} \quad (6.91)$$

Sin embargo, si bien el signo no puede esclarecerse para un período s genérico, el hecho de que las familias q acumulen más rápido garantiza que existirá un período S a partir del cual el segundo miembro se hará mayor que 1 y, consiguientemente, se verificará de nuevo $E^{pr,q} > E^{pr} > E^{pr,u}$, por lo que a partir de este punto de la trayectoria el equilibrio competitivo descentralizado mostraría exceso de demanda de servicios educativos para los u e insuficiencia para los q. Hay que tener presente, sin embargo, que aunque en ambos casos el signo del efecto externo acaba siendo el mismo para cada grupo, lo es por distintas razones. Cuando las productividades son iguales, los q acumulan más rápido para lograr una equiparación en las tasas de acumulación, mientras que cuando son diferentes, lo hacen a consecuencia de la desventaja en la tasa de retorno de los q, generando distintos ritmos de acumulación.

Modificar la tasa de retorno social cuando el gobierno interviene en la economía solo exige tener en cuenta dos aspectos: i) las preferencias del PB seguirán reflejando solamente la satisfacción de los agentes privados y no las del gobierno, cuya misión debería ser la misma que la del planificador benevolente (y en este sentido la posesión de una función objetivo propia por el gobierno solamente puede entenderse como un incumplimiento del contrato social suscrito con los ciudadanos); ii) las restricciones de recursos de la economía y las ecuaciones de acumulación deberán alterarse en el sentido adecuado, dependiendo de los instrumentos seleccionados por el gobierno. Para los parámetros fiscales que aparezcan en la restricción de recursos y/o en la restricción de acumulación de capital humano, el planificador también podrá formular sus valores óptimos.

En el caso de un régimen educativo privado en el que el gobierno interviene mediante impuestos y subvenciones, como hemos visto la restricción de recursos no se ve alterada sino por la inclusión del consumo público entre las variables de demanda; por lo demás el tipo impositivo y las subvenciones y transferencias quedan canceladas y no se opera ningun cambio en las ecuaciones de acumulación, al no verse transformada ni sometida a restricciones exógenas la tecnología de aprendizaje. La cpo del PB respecto al consumo público conducirá a un nivel óptimo de este nulo, ya que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial g_s} = -\beta\lambda_s \le 0 \quad (6.92)$$

Dado que tanto el multiplicador de Lagrange como la tasa de descuento son positivos, esto implica un equilibrio esquina en el consumo público (o el mínimo exógeno, si se introdujera una restricción en este sentido, para garantizar el funcionamiento del aparato administrativo del gobierno). Este resultado refleja bien la divergencia entre los objetivos del gobierno como agente y el PB. Por otro lado, para un cierto nivel de consumo público impuestos y subvenciones solo tienen un papel redistibutivo, por lo que no alteran la tasa de retorno social: un aumento de las subvenciones se traducirá, desde el punto de vista del conjunto de la economía, en un incremento del tipo impositivo, por lo que no incrementará los recursos disponibles.

Más allá de esta cuestión, dos valoraciones paralelas pueden hacerse sobre las subvenciones: i) En el lado positivo, la aplicación del tipo crítico de la subvención puede lograr como vimos que el equilibrio descentralizado replique la asignación óptima social en lo que a la equiparación de las tasas de acumulación se refiere. ii) Desde la óptica de la corrección de externalidades, la introducción de la subvención habrá ser juzgada también según el signo predominante de las dos externalidades que se analizaron más arriba. Si este es positivo, la subvención puede ser un instrumento adecuado para acercar las tasas de retorno privadas a la tasa social, ahora bien, si es negativo será contraproducente. Dado que cuando las productividades B coinciden la externalidad es globalmente negativa para los u y positiva para las familias q y que cuando difieren, al menos a partir de un punto de la trayectoria esta también es la situación, la asignación de instrumentos debería ser la opuesta: esto es, una corrección negativa de la tasa para los hogares u y positiva para los q[224]. Ahora bien, en este último caso el tratamiento diferencial negativo a los individuos u podría generar consecuencias negativas al imposibilitar el cumplimiento de la condición de optimalidad en consumo. Si los B son los mismos, el equilibrio competitivo descentralizado es capaz de generar las mismas tasas de acumulación sin intervención, por lo que una penalización a los individuos u llevaría a romper la condición de optimalidad en el consumo. Cuando $B^q \neq B^u$, los instrumentos diferenciales llevarían a acentuar la desigualdad en la tasas de acumulación en un sentido desfavorable a los u, alejando al sistema todavía del cumplimiento de la condición de optimalidad social en consumo y profundizando en el problema de desigualdad existente. **Esta discusión pone de manifiesto el resultado anticipado más arriba acerca de la imposibilidad de que el sistema pri-**

[224] La asignación de instrumentos por grupos debe interpretarse en un sentido neto: esto es, las subvenciones para cualquier grupo se entenderían netas de impuestos. Lo esencial es que el efecto predominante tras la distribución de los dos instrumentos sea de incentivo para un grupo y desincentivo para otro si las productividades de su aprendizaje difirieran.

vado, incluso con intervención vía impuestos y subvenciones, pueda satisfacer todos los criterios de optimalidad social.

En un sistema mixto con cupones, la elección óptima de $\bar{E}^c$ reflejaría una tensión entre beneficios y costes sociales: supondría, a la vista de la restricción de recursos formulada más arriba, un consumo de estos por el gobierno (a pesar de que no aparezcan en la restricción presupuestaria de los agentes privados) y, por otro lado, tendría consecuencias sobre la acumulación de capital humano. Así, la cpo del PB sería la que sigue[225]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}_s^c} = \beta^s \left[-\lambda_s + \mu_s \sum_{j=1}^{2} \omega_j B^j \left(1 - \bar{n}^w\right) \right] \leq 0 \text{ (6.93)}$$

Esto es, se añade una cpo adicional para determinar el valor óptimo del cupón, junto con las restantes endógenas[226]. Formando parte del mismo sistema de cpo, de nuevo habría dos tasas de retorno social de los gastos en educación complementarios para los agentes privados, que por haberse obtenido bajo rendimientos constantes del factor E contendrían solamente en las ganancias de capital el nivel óptimo de la demanda total de servicios educativos; este hecho que, con cupones, la tasa social de acumulación de los hogares representativos será formalmente diferente a la que se derivó sin intervención pública.

En concreto estas tasas adoptan la forma:

---

225 La condición desarrollada es válida para la fijación de un nivel de componente público de la educación durante un período. Si se desea prolongar todo el horizonte, y suponiendo que esta política se somete a la restricción de seguir igualando las tasas de acumulación (y, por tanto, los ψ_j se mantienen constantes, se tendría:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}^c} = \beta^s \left[\begin{array}{l} -\lambda_0 a_0^h + \sum_{s=1}^{\infty} -\lambda_s \left(a_s^h + \frac{\partial a_s^h}{\partial \bar{E}^c} \left(\bar{E}^c + E^{PB,c} \right) \right) + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \mu_s \sum_{j=1}^{2} \omega_j \left\{ B^j \left(1 - \bar{n}^w\right) \psi^j \right\} \end{array} \right] \leq 0$$

226 Véase que, combinando dicha cpo con aquellas relativas a las posiciones en capital humano, podrían formularse dos tasas de retorno sociales de gasto en el cupón, a saber:

$$rr_{s,s+1}^{h,\bar{E}^v}\Big|_{ge}^{PB,q} \equiv \left[A\bar{n}^w - mE^{PBc} \right] \tilde{B}\left(1 - \bar{n}^w\right) + m\tilde{B}\left(1 - \bar{n}^w\right)\left(\bar{E}^c + E_{s+1}^{PBc,q}\right); \; \tilde{B} = mB^q + (1-m) B^u;$$

$$rr_{s,s+1}^{h,\bar{E}^v}\Big|_{ge}^{PB,u} \equiv \left[A\bar{n}^w - (1-m) E^{PBc} \right] \tilde{B}\left(1 - \bar{n}^w\right) + (1-m)\tilde{B}\left(1 - \bar{n}^w\right)\left(\bar{E}^c + E_{s+1}^{PBc,u}\right)$$

$$rr^{hE}_{s,s+1}\Big|^{PB,j}_{ge} \equiv \left[A\overline{n}^{w} - \omega_j E^{PBc}\right] B^{j}\left(1-\overline{n}^{w}\right) + 1 + \omega_j B^{j}\left(1-\overline{n}^{w}\right)\left[\overline{E}^{c} + E^{PBc,j}\right];\ j = q,u;$$
$$E^{PBc} = \overline{E}^{c} + mE^{PBc,q} + (1-m)E^{PBc,u} \quad (6.94)$$

Por tanto, se aprecia que, con independencia del valor óptimo que tomara el cupón para el PB, el sistema de ecuaciones sería el mismo que sin cupón, ya que los sumandos relativos a este en las tasas de retorno sociales de la inversión en capital humano por los agentes individuales no cambiarían. dado que nada más en el sistema ha cambiado. En consecuencia, aunque existiera un valor social óptimo positivo para el cupón, este no sería relevante desde la perspectiva de la solución óptima, ya que en cualquier caso volúmenes diferentes de servicios educativos totales absorbidos por cada grupo, unidos a parámetros B diferentes, siguen sin resolver el problema del PB. Esta equivalencia de soluciones con y sin cupón no se observaba en el sistema mixto descentralizado, ya que el tipo impositivo era mayor que con simples impuestos y subvenciones al introducirse los cupones. Sin embargo para el planificador esta diferencia no es relevante, puesto que un mayor tipo impositivo sirve para financiar una mayor cantidad del cupón. Curiosamente esta equivalencia se producía en el ámbito privado cuando se combinaba financiación mixta de escuela pública y se permitía redondearla con inputs adicionales aplicados por los agentes privados, ya que en ese caso el tipo impositivo no variaba respecto a un régimen privado intervenido; para el planificador, sin embargo, ambas situaciones son en esencia la misma, al internalizar a través de la restricción de recursos de la economía el destino de la recaudación incrementada.[227]. **En consecuencia, un sistema mixto con cupones no podrá satisfacer los criterios de optimalidad social,** en la medida en que si bien cuando se acompaña de impuestos y subvenciones logra una tasa de acumulación común a la que crecen los consumos de los individuos de ambos grupos, sin embargo no genera una igualdad en las soluciones educativas de equilibrio para ambos grupos.

Hecha esta reflexión, **un régimen escolar estrictamente público** puede verse como un caso polar en el problema anterior del PB: aquel en el que no existe opción alguna para los agentes privados de complementar el nivel público mínimo y por tanto se suprimen las cpo de demanda privada de escolarización. En tal escenario la cpo respecto a $\overline{E}$ para el PB sería la misma que la utilizada con cupones y la condición de no arbitraje del PB se escribiría ahora como:

$$rr^{h\overline{E}^{P}}_{s,s+1}\Big|^{PB,j}_{ge} \equiv \left(A\overline{n}^{w} - \omega_j \overline{E}^{P}\right)\tilde{B}\left(1-\overline{n}^{w}\right) + 1 + \omega_j \tilde{B}\left(1-\overline{n}^{w}\right)\overline{E}^{P} = An^{\overline{w}}\tilde{B}\left(1-\overline{n}^{w}\right) + 1 \quad (6.95)$$

[227] Alternativamente el problema del PB se podía haber planteado en función de la cantidad total de servicios educativos de cada grupo, siendo indiferente su origen en la medida en que su coste, medido sobre la restricción de recursos de la economía, es el mismo.

En consecuencia, las tasas de retorno de un sistema público se igualan entre grupos sin necesidad de imponer ninguna condición adicional, producto de: i) el hecho de que no hay cpo respecto a las aportaciones complementarias privadas permite utilizar la media ponderada del parámetro B en las mismas, eliminando ese rasgo diferencial; ii) la utilización de la misma cantidad de servicios educativos para q y u constituye la vía para la compensación perfecta de los 2 efectos externos, que se cancelan en la tasa de retorno. Además, la tasa de retorno de la provisión de escuela pública es constante en el tiempo, por lo que la cantidad óptima también lo sería. En estas circunstancias, la escuela pública satisfaría las condiciones de óptimo social por las siguientes razones: proporciona una cantidad igual de servicios educativo para los dos agentes (que podría coincidir con la óptima del planificador) y además permite que las tasas de crecimiento del consumo se igualen, ya que las diferencias en B se ven compensadas en la transición al estado estacionario por movimientos en los índices de peer effect tales que los dos grupos acumulan al mismo ritmo y el consumo puede crecer al mismo. Por tanto el régimen de escuela pública, siempre que se proveyera en la cuantía óptima elegida por el planificador, **sería socialmente eficiente, aunque más regresivo que lasformas de intervención pública "intermedias", el régimen privado con impuestos y subvenciones y el mixto con cupones;** este último aspecto no forma parte de la función objetivo del PB y por eso no aparece reflejado en sus cpo.

El planteamiento formal de un régimen mixto basado en una estrategia de excelencia para la escuela pública es similar, solo que adaptando la restricción de recursos correlativamente. Los principales cambios que se operan son: i) se introduce la remuneración a los profesores cualificados como componente de la demanda; ii) en la ecuación de acumulación pasan a unificarse los parámetros B al nivel de B^q . Se añadiría, como sucediía en los anteriores sistemas de provisión, una cpo relativa al tamaño de la provisión. Las cpo respecto a la posición en capital humano de ambos grupos, no obstante, diferirían, llevando a tasas de retorno sociales asimétricas:

$$rr_{s,s+1}^{h,E}\Big|_{ge}^{PB,q} \equiv B^q\left(1-n^{\overline{w}}\right)n^{\overline{w}}\left[A-\alpha m\right]+1 \quad (6.96)$$

$$rr_{s,s+1}^{h,E}\Big|_{ge}^{PB,u} \equiv AB^q\left(1-\overline{n}^{w}\right)\overline{n}^{w}+1 \quad (6.97)$$

Esta asimetría entre las tasas de retorno se traduce en que el efecto externo es más amplio para los individuos q y, por tanto, la misma cantidad de provisión pública para los dos grupos no podría igualar sus tasas de retorno. La implicación inmediata es que un sistema privado que proporcionara la misma cantidad de educación en la escuela pública en régimen de excelencia no verificaría las condiciones de optimalidad social. El factor detrás de esta alteración de las cpo del PB es la extracción del profesorado del segmento de población más cualificada y su remuneración en condiciones equiparables a los restantes individuos de su clase. Si la fórmula de selección del profesorado fuera más amplia, beneficiando a los dos grupos de individuos en proporción a su peso en el total de la población, la remuneración total sería diferente para cada tipo de profesor y se realizaría de acuerdo con un número de unidades de capital humano acumuladas por el respectivo grupo; este cambio restauraría la simetría entre las tasas de retorno sociales[228]:

$$rr_{s,s+1}^{h,\bar{E}^x}\Big|_{ge}^{PB,q} = rr_{s,s+1}^{h,\bar{E}^x}\Big|_{ge}^{PB,u} \equiv B^q\left(1-\bar{n}^w\right)\left[\bar{n}^w\left(A-\alpha\right)\right]+1 \quad (6.98)$$

Respecto a la combinación de ambos tipos de trabajadores, puede suponerse que existen diferentes tipos de tareas dentro de la función del profesorado que pueden encomendarse a unos y otros y que las que requieren una formación menor pueden realizarse tras un entrenamiento que puede proporcionarse a los no cualificados a coste adicional despreciable. Por otro lado, si la consecuencia del sistema es la equiparación de habilidades entre todos los individuos. una vez en el estado estacionario la distinción entre cualificados y no cualificados ya tendría ninguna virtualidad. **La consecuencia sería que el sistema de escuela pública con excelencia, si se dota de un nivel de provisión de servicios públicos igual al de equilibrio del PB, cumpliría todas las condiciones de optimalidad social, como ya lo hacía el de escuela pública ordinaria, pero con dos diferencias fuera de la eficiencia social en sentido estricto a favor del de excelencia: i) Es más progresivo, en el sentido de que elimina por completo en el estado estacionario las diferencias entre los niveles de capital humano de los dos grupos; ii) En la medida en que genera una tasa de retorno superior del gasto público en provisión educativa (ya que $B^q > \tilde{B}$), implica una cantidad superior del mismo, esto es, $\bar{E}^{PB,x} > \bar{E}^{PB,P}$, pero al mismo tiempo la tasa se reduce por el efecto externo sobre el sueldo de los profesores, el sistema de excelencia conllevaría tasas de crecimiento superiores al de la escuela pública pura si se cumpliera:**

$$\left(1-\bar{n}^w\right)\bar{n}^w A > \frac{\alpha B^q}{B^q-\tilde{B}} \quad (6.99)$$

Así, cuanto mayor fuera la diferencia entre las productividades iniciales de los dos grupos (o tanta mayor la eficiencia del sistema educativo con profesorado), tantas más posibilidades habría de que el sistema con excelencia proporcionara tasas de crecimiento más altas.

---

[228] De nuevo la tasa de retorno de la cantidad de servicios producidos por la escuela pública sería constante, por lo que el valor óptimo para el planificador no se modificaría.

Una última variante a considerar dentro de la evaluación de este instrumento sería aquella en el que α deja de ser un parámetro fijo descriptivo de la tecnología educativa, para pasar a considerarse una variable más de elección relacionada con el número de alumnos por profesor. En este sentido, la capacidad de equiparar capacidades de unos y otros individuos sería función monótona creciente de de dicho parámetro, que puede moverse dentro de un intervalo cerrado de reales positivos en (0,1) dado por $\alpha \in [0,\bar{\alpha}]$, teniendo en cuenta que es el extremo superior del intervalo el único que garantiza la equiparación total de B. Así, podría escribirse la ecuación de acumulación de u en este caso como:

$$a_{s+1}^{hu} = a_s^{hu}\left[1 + B^u\left(\bar{n}^h\right)^\gamma \psi^u\left(B^T(\alpha)\right)\left(\bar{E}^x + E_s^{px,u}\right)\right] \text{ (6.100)}$$

$$B^T(0) = \frac{B^u}{B^u};\ B^T(\bar{\alpha}) = \frac{B^q}{B^u};\ \frac{dB^T}{d\alpha} > 0;\ \frac{d^2B^T}{d\alpha^2} < 0$$

Con estas premisas habría una cpo respecto a α dada por:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_s} = \beta^s\left[-\lambda_s A\bar{n}^w + \mu_s B_{\alpha s}^T B^u\left(1 - \bar{n}^w\right)\right] - \rho_s \leq 0 \text{ (6.101)}$$

Donde ρ es el multiplicador de Lagrange ligado a la restricción $\alpha \leq \bar{\alpha}$.; la simplificación de los capitales humanos en beneficios y costes marginales permite obtener un valor constante óptimo para α , constancia que se retroalimenta hacia el valor socialmente óptimo de servicios producidos por la escuela pública. Esto es, supuesto que el PB deseara fijar este parámetro de manera constante en el tiempo, para una senda dada de acumulación[229] debería confrontar los mayores gastos derivados de una mayor atención por alumno en el aula con una mayor velocidad de acumulación para los hijos de las familias menos cualificadas. Nada garantiza, sin embargo, que la solución a esta cpo fuera $\bar{\alpha}$. Si la solución óptima en α del PB se aplicara por el gobierno para $\bar{E}^{PB,x}$, se tendría una dinámica de la ratio de capitales humanos análoga a la analizada en el sistema de escuela pública común, aunque dado que existiría cierta convergencia en los parámetros B, se produciría en la transición al estado estacionario un incremento más contenido de la desigualdad. El problema seguiría satisfaciendo las condiciones de optimalidad social, aunque la corrección de la desigualdad sería inferior a la proporcionada con el régimen de excelencia puro en el que $\alpha = \bar{\alpha}$. Respecto al crecimiento, este podría ser inferior o supe-

[229] Si la extracción del profesorado fuera amplia la influencia de la senda de acumulación en la solución óptima de α se cancelaría.

rior a los restantes obtenidos para regímenes de escuela pública según el grado de corrección lograda en la ratio de los B respecto a 1 y el tamaño óptimo de α^{PB}.

VI.2. Políticas educativas en un entorno de generaciones solapadas.

Se plantea a continuación un modelo con una estructura similar al anterior, solo que las preferencias ya no se caracterizarán por un altruismo perfecto respecto a la utilidad de los descendientes y por lo tanto el problema de optimización dejará de realizarse para toda la dinastía. En su lugar, presentaremos sucesivamente dos situaciones, caracterizadas por acuerdos contractuales entre padres e hijos, en un primer caso de naturaleza exógena y posteriormente endógena.

Los individuos viven durante tres períodos y distinguiremos, como antes, dos grupos de los mismos, idénticos entre sí y analizables mediante el comportamiento de un hogar representativo; las fuentes de heterogeneidad son las mismas que diferenciamos para el modelo con altruismo perfecto. La población total no crece en ningún momento y se normaliza a 1, de suerte que cada hogar genera solamente otro hogar en la siguiente generación. Durante el primer período los agentes se encuentran en su niñez y se limitan a recibir el cuidado paterno, sin tener unas preferencias generalizadas. Asímismo dedican todo su tiempo a formarse, de acuerdo con los servicios escolares que los padres demandan para ellos. El segundo período corresponde a la madurez y se caracteriza porque el individuo trabaja y recibe unas rentas salariales a cambio del alquiler de su capital humano; el tiempo de trabajo es exógeno; supondremos por el momento que el tiempo dedicado a la crianza del único descendiene de cada famili es nulo, por lo que el tiempo de trabajo es igual a la dotación unitaria de todo el período. Al comienzo de este segundo período nacen los hijos, a los que hay que dedicarles un tiempo exógeno de cuidado por unidad y se decidirá la cantidad de servicios escolares demandados con cargo a la renta laboral. En la medida en que dichos servicios van dirigidos a los niños, no se manifestarán en sus ingresos hasta el período siguiente. Por último, en el tercer período los padres viven de la renta de los fondos ahorrados en el segundo período; a continuación veremos en qué activo se materializan dichos ahorros.

La utilidad de un individuo del grupo j, que no tiene como argumento ninguna variable relacionada con sus descendientes, se basará en los consumos realizados durante el segundo y tercer período de su vida:

$$U^j = u\left(C_s^{s-1,j}\right) + \beta u\left(C_{s+1}^{s-1,j}\right) \quad (6.102)$$

En concreto, continuaremos considerando que las preferencias son logarítmicas , con lo que $u\left(C_{s+j}^{s-1}\right)=\ln\left(C_{s+j}^{s-1}\right)$, con $j=0,1$. De nuevo la tasa de descuento temporal es la misma entre grupos. La función de aprendizaje de los niños tiene una estructura similar a la vista en el primer apartado y su ecuación dinámica de acumulación será:

$a_{s+1}^{hj}=a_s^{hj}B^jE^{pr,j}$ (6.103)

Como se observa, la tasa de depreciación del activo pasa a ser unitaria, supuesto muy habitual en contextos OLG. Para generar dinámicas alternativas a la vista con agentes representativos, se introducen algunas modificaciones en la tecnología de aprendizaje. Así, los rendimientos a escala en el factor E pasan a ser solamente constantes y el capital humano que interviene en la producción, el propio de cada familia, de modo que ya no se consideran efectos externos[230]. Las consecuencias de este cambio son importantes, ya que a partir de ahora será exclusivamente la dinámica de E la que determine la tasa de acumulación -más adelante veremos que el valor de E también será constante por el supuesto realizado sobre la tecnología de los servicios educativos-. Indirectamente esto quiere decir también que no habrá compensación alguna para los no cualificados por partir con un stock de capital humano inferior, mientras que cuando los efectos externos estaban presentes paliaban parcialmente la desventaja que una productividad B inferior les proporcionaba en el aprendizaje. Aparte de este aspecto, la tasa de depreciación continúa siendo nula, de modo que el capital humano se lega de generación en generación; dada además la irreversibilidad de la inversión en este activo real, ninguna cohorte podrá tener un stock de capital humano inferior al de la anterior.

La tecnología de los servicios escolares también se ve modificada, de manera que aunque el input de producción de los servicios escolares continúa siendo el propio bien compuesto, ahora su productividad no se reduce con el nivel medio de capital humano, sino con el stock medio de cada individuo que solicita los servicios, esto es, $E_s=x_s^h/a_s^{hj}$. Esta nueva tecnología puede racionalizarse pensando que la escuela proporciona servicios personalizados a cada niño, con costes diferentes y que los vende como productos diferentes, siendo al mismo tiempo capaz de agrupar a los alumnos en la misma escuela y orientarlos hacia una serie de objetivos comunes[231]. En esta discriminación de precios, el precio más caro es exigido a los alumnos cualificados. Si, por el contrario, se supusiera

---

[230] Los efectos externos en acumulación eran solamente relevantes a efectos de indentificar posibles discrepancias entre la tasa de retorno social y la privada, aunque abordado ya este tema pasamos a centrar el foco en otros aspectos del modelo.

[231] De hecho, en algunos países la categorización de alumnos por aulas de acuerdo con sus capacidades es una práctica común.

una distribución uniforme de alumnos por escuelas, de modo que su mix en cada una de ellas mimetizara su proporción en la población, la escuela sería indiferente a cargar un precio unitario igual al capital medio social ponderado, pero ello supondria una subvención para los alumnos más capacitados y una penalización para los más desfavorecidos, que estos no estarían dispuestos a desembolsar cuando ni siquiera existe un peer effect. La importancia del supuesto de segregación de precios es notable y se detallará más adelante, pero como aproximación inicial baste decir que incluso aunque las tasas de acumulación de cada grupo sean diferentes, ya no se producirá un empobrecimiento relativo permanente en términos del precio de la inversión para aquellos cuyo capital humano crezca más despacio. Respecto a la tecnología de producción del bien final, esta seguirá teniendo una estructura AK en el tiempo de trabajo efectivo.

Es inmediato observar que, dadas las preferencias de los padres, la solución trivial sería un legado nulo en capital humano. Sin embargo supondremos, como hicimos al comienzo de este capítulo, la existencia de un contrato que liga a padres e hijos y en virtud del cual estos últimos, durante la edad adulta, transferirán un determinado porcentaje (p) de sus ingresos laborales a sus padres; dichos ingresos constituirán el rendimiento del ahorro en la madurez, ahorro que se materializará en la adquisición de servicios escolares. Un contrato intergeneracional de este tipo surge de modo natural en Ehrlich y Lui (1991) con unas preferencias que veladamente contienen un elemento de altruismo intergeneracional, pero es perfectamente posible suponer su existencia con preferencias diferentes, ya que como se aprecia beneficia a ambas partes, al proporcionar sustento en la vejez a los adultos y una promoción intergeneracional a los más jóvenes. Estas transferencias transferencias se realizarán exclusivamente dentro de una misma familia y por tanto dependerán siempre de la acumulación de capital humano de un mismo grupo. En un primera variante del modelo todas las generaciones acuerdan que un tercer agente, el gobierno, se encargue de vigilar el cumplimiento de este acuerdo y de realizar físicamente la transferencia entre unos y otros: en este marco denominaremos pensiones a la cantidad redistribuida por el gobierno. La existencia este acuerdo será la que incentive a las generaciones de adultos a invertir en las sucesivas cohortes. Por el momento consideraremos la pensión como el único ingreso en la vejez, si bien posteriormente, como se hizo en el modelo dinástico, se introducirán los bonos.

Dados estos supuestos, las restricciones presupuestarias en las dos últimas fases de la vida serán las siguientes:

$$C_s^{s-1,j} + a_s^{hj} E_s^{pr,j} \leq (1-p) A \overline{n}^w a_s^{hj} \quad (6.104)$$

$$C_{s+1}^{s-1,j} \leq p A \overline{n}^w a_{s+1}^{hj} \quad (6.105)$$

A la hora de derivar el problema de optimización dinámica, obsérvese que los adultos no tienen en cuenta, dada la estructura de sus preferencias, las consecuencias de su acumulación sobre los precios futuros de los servicios educativos que tendrá que afrontar la siguiente generación, ya que este aspecto no tiene ninguna incidencia en el consumo que dichos adultos podrán disfrutar en la vejez; para llegar a otro resultado sería necesario que las preferencias internalizaran dichos efectos por medio de la inclusión del consumo de la siguiente generación en su segundo período de vida. Con estas condiciones la función lagrangiana a optimizar y las cpo del adulto de cada generación serían las siguientes:

$$\Omega^{j} = \ln C_{s}^{s-1,j} + \lambda_{s}^{j}\left[\left(1-p\right)A\overline{n}^{w}a_{s}^{hj} - C_{s}^{s-1,j} - a_{s}^{hj}E_{s}^{pr,j}\right] +$$
$$+\mu_{s}^{j}\left[a_{s}^{hj}B^{j}E_{s}^{pr,j} - a_{s+1}^{hj}\right] + \beta\left\{\ln C_{s+1}^{s-1,j} + \lambda_{s+1}^{j}\left[pA\overline{n}^{w}a_{s+1}^{hj} - C_{s+1}^{s-1,j}\right]\right\};\ j = q,u; \mu_{s+1}^{j} = 0 \ (6.106)$$

$$\frac{\partial\Omega^{j}}{\partial C_{s+t}^{s-1,j}} = \beta^{t}\left[\frac{1}{C_{s+t}^{s-1,j}} - \lambda_{s+t}^{j}\right]; t = 0,1 \ (6.107)$$

$$\frac{\partial\Omega^{j}}{\partial E_{s}^{pr,j}} = -\lambda_{s}^{j} + \mu_{s}^{j}B^{j} \leq 0 \ (6.108)$$

$$\frac{\partial\Omega^{j}}{\partial a_{s+1}^{hj}} = -\mu_{s}^{j} + \beta\lambda_{s+1}^{j}pA\overline{n}^{w} \leq 0 \ (6.109)$$

A las que habría que añadir las restricciones presupuestarias y de no negatividad de las endógenas. La igualdad entre la relación marginal de sustitución y la tasa de retorno del único activo vendrá dada por la siguiente ecuación, tras la correspondiente reordenación de las cpo:

$$\frac{C_{s+1}^{s-1,j}}{\beta C_{s}^{s-1,j}} = pA\overline{n}^{w}B^{j};\ j = q,u \ (6.110)$$

La primera diferencia clara con el modelo de agente representativo es la carencia de un término de ganancias de capital, consecuencia de la ausencia de altruismo. La segunda, el hecho de que la elemento de renta marginal del activo en la tasa es constante en el tiempo, como consecuencia tanto de la pérdida del efecto externo en la función de acumulación como del cambio en la estructura del precio de los servicios escolares. Este resultado es formalmente análogo al que se obtenía en el modelo de agente representativo con rendimientos constantes en E, pero detrás de esta aparente similitud subyace un comportamiento dinámico muy diferente del precio relativo de la escolarización en términos del bien final.

Los cambios en la dinámica del modelo son posibles al restaurarse bajo estas hipótesis una de las propiedades de las preferencias logarítmicas (y en general, de elasticidad de sustitución intertemporal constante) en modelos de generaciones solapadas: la constancia de la tasa de ahorro. Si el instrumento de ahorro en el período de madurez fuera un activo financiero convencional que permitiera adoptar posiciones deudadoras, como los bonos, con un retorno marginal igual al medio, la cpo de igualdad entre la relación marginal de sustitución intertemporal del consumo y el retorno marginal del activo sería la siguiente:

$$\frac{C_{s+1}^{s-1}}{C_s^{s-1}}=\frac{(1+r_s)S_s}{Y_s-S_s}=\beta(1+r_s)\Rightarrow\frac{S_s}{Y_s}=\frac{\beta}{1+\beta} \quad (6.111)$$

Siendo la clave de este resultado el hecho de que la tasa media de retorno del activo, en el numerador del primer miembro, es la misma que la tasa marginal, en el segundo miembro, de modo que ambas pueden simplificarse. Cuando el único activo de la economía es capital humano, la igualdad entre las tasas de retorno media y marginal no tiene por qué satisfacerse, y de hecho no lo hace bajo las hipótesis utilizadas hasta el momento. Sin embargo demostraremos a continuación que dentro del marco definido por los supuestos de este apartado, esta propiedad sí se cumple. En efecto, el retorno medio vendrá dado bajo rendimientos constantes por $pA\bar{n}^w/\left(1/B^j\right)$. Por otro, como acabamos de ver, la tasa de retorno margina será $pA\bar{n}^w B^j$. Ambas se hacen iguales para cualquier valor de los stocks de capital humano y E. La principal consecuencia es que la tasa de crecimiento del consumo de cualquiera de los dos grupos se ajustará en todo período a su tasa de acumulación de capital humano. En consecuencia, razonando sobre la restricción presupuestaria dinamizada del período de madurez (que adopta la misma estructura que la restricción en el problema dinástico con horizontes infinitosy relaciona tasas de crecimiento de las variables entre cohortes sucesivas), en todo período la tasa bruta de crecimiento de E será unitaria, esto es, desde s=0 la economía se situaría en una senda estacionaria diferente para cada uno de los grupos, a la que se accede sin dinámica de transición.

Para calcular del valor de E consistente con la constancia del consumo en términos de la renta disponible, este no puede despejarse de la igualdad entre relación marginal de sustitución y tasa de retorno del activo, a diferencia de lo concluido en el modelo de dinastías. La razón es dicha constancia solo se produce en el segundo período de vida y no en el tercero, donde la estructura de la restricción presupuestaria es diferente por no incluir ahorro alguno -se trata de un período terminal-. En su lugar, puede despejarse de la restricción presupuestaria sabiendo el valor de la tasa de ahorro. Esto es:

$$(1-p)A\overline{n}^{w}a_{s}^{hj}\frac{\beta}{1+\beta}=E^{pr,j}a_{s}^{hj}\Rightarrow E^{pr,j}=(1-p)A\overline{n}^{w}\frac{\beta}{1+\beta};\ j=q,u \quad (6.112)$$

Este, por tanto, es el valor estacionario de E que garantiza el cumplimiento de la restricción presupuestaria dinamizada de los agentes. Además, será necesario exigir que $E^{pr,j}<\rho$ para que pueda verificarse la condición de transversalidad. Como se aprecia, incluso cuando los parámetros B son diferentes entre grupos, la demanda de escolarización será la misma, con lo cual la tasa de acumulación de los más cualificados será superior. **Desde el punto de vista de la desigualdad entre grupos**, esto significa que se incrementará a lo largo del tiempo, incluso aunque se partiera de una ratio unitaria de stocks de capital humano entre q y u. Asintoticamente la tasa de crecimiento de capital humano medio se aproximará a la tasa de acumulación de q, por la que la velocidad de deterioro del capital humano relativo de los individuos u se estabilizará, lo que no quita para que la diferencia en niveles se amplíe continuamente. **De este modo, esta nueva dinámica global del modelo se diferencia esencialmente de la obtenida en un modelo dinástico con precios relativos de la educación variables, efectos externos y rendimientos constantes a escala de E en el hecho de que la demanda de este input es común a ambos grupos y estacionaria en el tiempo -mientras que con los otros supuestos la constancia era del valor de la escolarización en términos del bien de consumo- y, si bien en ambos casos existe una tasa de acumulación constante en ambos grupos, más favorable a los más cualificados. Por tanto, a pesar de que el modelo es capaz de alcanzar per se una senda estacionaria -lo que no sucede ni en OLGs ni en modelos dinásticos cuando los rendimientos de E son decrecientes-, podría justificarse la intervención pública desde la perspectiva de la búsqueda de una mayor convergencia entre las rentas laborales de los dos hogares representativos. Además, los consumos crecerán en línea con las tasas de acumulación respectivas, pero sus ritmos de expansión no se igualarán entre grupos.**

Merece la pena destacar que, por el hecho de que la tasa de depreciación sea 1 (supuesto necesario, por lo demás, para que las tasas de retorno media y marginal del capital humano puedan igualarse), nada garantiza a priori que al menos para uno de los grupos la tasa bruta de acumulación no fuera inferior a 1, convergiendo hacia un nivel nulo de capital humano. Si este fuera el caso para ambos grupos, se produciría una igualación del stock de ambos, aunque a consecuencia de un proceso de depauperación progresiva. Para evitarlo basta imponer la restricción:

$$B^{u}(1-p)A\overline{n}^{w}\frac{\beta}{1+\beta}>1 \quad (6.113)$$

En el presente apartado con OLG no se volverá a calcular la solución óptima completa del planificador, aunque sus condiciones básicas pueden extraerse fácilmente por simple referencia a las desarrolladas en el modelo dinástico. La igualdad entre la RMS intertemporal del consumo entre ambos grupos sigue estando vigente lo que, en combinación con las preferencias logarítmicas, implica el alineamiento de las tasas de crecimiento del consumo. En cuanto a las tasas de retorno social del capital humano, el cambio del valor de la tasa de depreciación, unida a la compensación perfecta de las ganancias de capital con la internalización de la acumulación sobre el precio de los servicios educativos, estas coinciden con las tasas de retorno privadas. Esta situación es posible debido al cambio del precio de vaciado en el mercado de servicios escolares, que pasa a ser el stock de capital individual, de modo que las consecuencias de la acumulación se proyectan ya no solamente sobre la demanda de servicios educativos de toda la sociedad, sino solamente sobre la demanda de cada grupo. Esta peculiaridad permitirá, como se verá a continuación, poder diferenciar más claramente una de las políticas estudiadas como la única que satisface a lo largo de toda la senda de equilibrio general las condiciones de optimalidad social. Mientras tanto, las comparaciones entre las demás de nuevo serán comparaciones entre subóptimos, con las limitaciones consiguientes a la hora de extraer conclusiones. Aun así, se evaluarán aspectos particulares de las mismas distintos de la eficiencia, como as tasas de acumulación que conllevan, las variaciones en bienestar de una generación en el cambio de uno a otro régimen o sus repercusiones sobre la desigualdad.

Cuando en el modelo se introducen los bonos, varían ligeramente las restricciones presupuestarias del segundo y tercer período de vida en el siguiente sentido:

$$C_s^{s-1,j} + b_{s+1}^{s-1,j} + a_s^{hj} E^{pr,j} \leq (1-p) A\bar{n}^w a_s^{hj} \quad (6.114)$$

$$C_{s+1}^{s-1,j} \leq (1+r_s) b_{s+1}^{s-1,j} + pA\bar{n}^w a_{s+1}^{hj};\ j = q,u \quad (6.115)$$

El retorno marginal y medio de los bonos es el mismo y al mismo tiempo se iguala al tipo marginal, por la condición de no arbitraje entre activos, del capital humano, el cual por los supuestos realizados a su vez coincide con el tipo medio. Por lo tanto existe en la economía un único tipo marginal y un único tipo medio, razón por la cual sigue siendo aplicable la conclusión de que el ahorro es una proporción constante de la renta grupal. Aunque habitualmente la renta sobre la que se computa el consumo es la totalidad de la renta intertemporal cuando los bonos son un activo accesible, en este caso particular, al no haber en el período de vejez más renta que la que generan los activos, la renta intertemporal coincide con la del segundo período de vida. **No obstante, la igualdad de las dos relaciones marginales de sustitución al tipo de interés de los bonos, común, implica la imposibilidad de alcanzar una asignación de equilibrio general si los parámetros B difieren entre grupos**. Para solucionar este problema una alternativa sería introducir un mercado de bonos específico para cada grupo, cada uno de los cuales asociado a un interés de equilibrio diferente -aunque en tal caso en equilibrio la posición en bonos debería anularse por el supuesto de hogar representativo-. La otra, si hubiera un tipo de interés común de equilibrio, que en equilibrio al menos uno de los dos grupos no invirtiera en capital humano. En el caso de que ninguno lo hiciera, de modo análogo a como se señaló en el apartado del modelo dinástico, lo que exigiría el cumplimiento de análoga desigualdad[232]:

$$\frac{1}{\beta} > pA\overline{n}^{w}B^{q} > pA\overline{n}^{w}B^{u} \quad (6.116)$$

Si B es la misma para ambos grupos no habría obstáculos para el establecimiento de un mercado de bonos común. En este caso, la tasa de crecimiento del consumo seguiría siendo la misma que la tasa de acumulación respectiva y a la vez la igualdad entre las relaciones marginales de sustitución implicaría que las tasas de acumulación se igualarían, lo que implica la adquisición de la misma cantidad de servicios escolares desde s=0. El nivel óptimo de consumo de la madurez sería igual a una fracción independiente del tipo de interés de la renta vital total, pero al ser los mismos los retornos de los dos activos no sería posible calcular la distribución del ahorro entre los mismos, siendo la utilidad derivada de cualquier trade-off la misma para el agente. En todo caso, si existen posiciones distintas de cero de equilibrio en el mercado de bonos estas irían asociadas a demandas de E mayores que generarían mayores pagos en s+1, a cambio de sufrir una disminución de la renta disponible a consecuencia del pago de los intereses de los bonos; la renta disponible en s+1 sería en cualquier caso la misma. **El nivel de E no es neutral desde el punto de vista de la tasa de acumulación, aunque sí desde la perspectiva**

---

[232] El ámbito de generaciones solapadas permite, a diferencia del dinástico, sostener una solución en la que solamente un grupo acumule a tasa cero, siendo la razón el hecho de que en el último período de vida se elimina la posibilidad de que los individuos, no altruistas, mueran endeudados y leguen su deuda a su descendencia. De este modo, es factible que si uno de los grupos no acumula, al mismo tiempo presente un crecimiento del consumo entre períodos igual al del colectivo que acumula capital humano, aunque este debería estar acompañado de un menor nivel de consumo en su madurez para poder hacer frente a los intereses de la deuda en su vejez, o en otras palabras, para lograr que su consumo fuera suficientemente reducido en el segundo período como para ser compatible con la misma tasa de crecimiento que el otro hogar representativo. Por el contrario, en un modelo dinástico el mantenimiento de la misma tasa de crecimiento del consumo a lo largo de toda la senda inifinita implicaría la asunción de una posición deudora creciente y, en consecuencia, la ruptura de la condición de no Ponzi.

del bienestar de los agentes privados. **Sin embargo el modelo no es capaz de determinar dicha tasa de acumulación**[233].

Si las dotaciones de capital humano al comienzo de la cadena generacional fuera el mismo, estamos hablando de los mismos agentes, por lo que es obvio que su posición de equilibrio en bonos debería ser la misma, cero. En lo sucesivo nos centraremos en el modelo sin bonos, por presentar este una mayor riqueza analítica.

El cambio operado en la dinámica del modelo gracias a los nuevos supuestos no es exclusivo de un marco de generaciones solapadas. En el Anexo se muestra cómo la aplicación de análogos supuestos en un marco dinástico produciría resultados equivalentes y analiza también la dinámica en generaciones solapadas cuando los supuestos son los mismos que en el apartado anterior, dando lugar a resultados equiparables.

Régimen educativo privado con impuestos y subvenciones análogo al considerado en el modelo dinástico. Si se desea lograr una equivalencia con el instrumento utilizado en el modelo dinástico, el tipo impositivo se establecería sobre la pensión recibida en la vejez. Comenzando por el impuesto aislado sobre las rentas del trabajo, sin subvenciones, la tasa de retorno es similar a la derivada en el modelo dinástico:

$$rr_{s,s+1}^{h,e}\Big|_{ge}^{j} = (1-\tau)\,pA\bar{n}^{w}B^{j} \quad (6.117)$$

Puesto que el tipo impositivo actúa uniformemente y de manera no neutral tanto sobre los rendimientos medios como marginales del capital humano, la tasa constante de ahorro no se ve modificada. Esto implica que, despejando de la restricción presupuestaria, el nivel de servicios escolares demandado seguiría siendo igual entre grupos, aunque menor que antes, por lo que las tasas de acumulación serían menores que en competencia perfecta sin intervención y diferentes entre sí, siendo el descenso proporcional y en consecuencia no afectaría a la desigualdad entre grupos:

$$E_{s}^{j} = (1-\tau)(1-p)\frac{\beta}{1+\beta}A\bar{n}^{w} \quad (6.118)$$

Al mismo resultado se llegaría si, en lugar de gravar directamente las pensiones, los impuestos recayeran sobre la renta de los individuos adultos antes del pago de las pensiones; en cualquiera de los dos casos la tasa de retorno del capital humano se vería re-

---

233 Aplicando la condición de equilibrio en el mercado de bonos, $mb_{s+1}^{q} + (1-m)b_{s+1}^{u} = 0$, puede establecerse una condición sobre la suma ponderada del valor de las demandas educativas de los hogeres representativos, tal que su media ponderada no puede superar el ahorro agregado.

ducida por la cuantía del tipo de impositivo, al pasar a ser la restricción presupuestaria en el segundo período de vida:

$$C_s^{s-1,j} + a_s^{hj} E_s^{pr,j} \leq (1-p)\left[(1-\tau) A\overline{n}^w a_s^{hj}\right] \text{ (6.119)}$$

El esquema de generaciones solapadas permite analizar otras alternativas. El hecho de que las decisiones educativas se tomen sin un sentido del altruismo por las rentas ni el consumo de las generaciones próximas salvo en lo que a la pensión se refiere implica que habría otro tipo de impuestos que podrían lograr la neutralidad en las decisiones de inversión en capital humano. Por ejemplo, si el tipo recayera sobre la renta disponible del trabajo en la madurez (esto es, después de honrar el compromiso de transferencia a los mayores), la restricción presupuestaria del segundo período se modificaría en el siguiente sentido:

$$C_s^{s-1,j} + a_s^{hj} E_s^{pr,j} \leq (1-\tau)\left[(1-p) A\overline{n}^w a_s^{hj}\right] \text{ (6.120)}$$

En este contexto, la tasa de retorno del capital humano no sería distorsionada y tan solo lo haría el nivel de consumo alcanzable por cada generación; por lo demás la tasa de ahorro sería la misma. Es interesante observar, no obstante, que cualquiera de las dos soluciones conducen a una reducción del nivel de consumo y por tanto a un menor bienestar de los agentes, cada una por diferentes vías. Cuando es la renta antes del pago de pensiones la que tributa (esto es, las pensiones no están exentas) se reduce la tasa de acumulación de capital humano y con ella el crecimiento de las rentas salariales; cuando las pensiones están exentas, entonces no se altera el crecimiento del capital humano pero igualmente se opera un recorte en la renta disponible de las familias. Puede comprobarse que las disminuciones de la renta disponible son, en cualquier caso las mismas (que denominaremos 1 y 2):

$$\left.\frac{dy_s^j}{d\tau}\right|_{\tau=0}^{1} = -(1-p) A\overline{n}^w a_0^{hj} \Gamma^{s-1} s B^j \frac{dE^{pr,j}}{d\tau} = \left.\frac{dy_s^j}{d\tau}\right|_{\tau=0}^{2} \text{ (6.121)}$$

La clave de este resultado es la constancia de la tasa de ahorro ante cualquiera de las dos formas impositivas, al afectar el impuesto en la misma proporción a la cuantía de la ahorro que a la renta y ser la utilidad logarítmica. Al ser la misma la tasa de ahorro, existe en cualquier caso la misma caída del nivel de escolarización, por lo que la tasa de acumulación se resiente de igual modo en cualquiera de las dos alternativas. En cuanto a las repercusiones intergeneracionales, tanto mayores como adultos se ven afectados por la menor demanda de educación; los impuestos con pensiones exentas influyen sobre el consumo de los adultos más indirectamente, al contraer la tasa de acumulación de capital humano, aunque finalmente los efectos también les alcanzarán, al generarse una senda de capital humano más amortiguada que constituye la base para el cálculo de sus pensiones. En cuanto a los adultos, en ambos casos su renta disponible, para un determinado capital humano, se ve minorada por el mismo tipo efectivo $(1-\tau)(1-p)$ y, más indirectamente, por idéntica ralentización en la acumulación de capital humano.

Cuando se añaden subvenciones favorables a los no cualificados, la dinámica del modelo experimenta algunos cambios respecto al modelo dinástico, a consecuencia del diferente precio de los servicios educativos. En efecto, prescindiendo por un momento de los componentes autónomos del gasto público, el tipo impositivo que deja exento las pensiones, despejado de la restricción presupuestaria del gobierno, pasará a ser ahora diferente:

$$\tau_s = \Upsilon'\theta^e E_s^{pr,u}; \Upsilon' = \frac{1-m}{A\bar{n}^w(1-p)}\frac{1}{\psi_s^u};\ \psi_s^u = \frac{a_s^h}{a_s^{hu}} \quad (6.122)$$

Esto es, hay un componente que en general es variable, la ratio de capital humano media y del grupo u, que impide que, en general y salvo que las tasas de acumulación se igualen, el tipo impositivo sea constante. Puesto que el tipo impositivo, caso de que no deje exentas las pensiones, y las subvenciones afectan por igual al tipo marginal que al medio del activo, la tasa de ahorro seguirá siendo constante e igual entre grupos, por lo que también puede despejarse el valor de equilibrio de E de la restricción presupuestaria de los agentes. Para cada uno de los agentes, este será:

$$E_s^{pr,u} = A\bar{n}^w s(1-p)\frac{\psi_s}{(1-\theta^e)\psi_s + (1-m)\theta^e s} \quad (6.123)$$

$$E_s^{pr,q} = A\bar{n}^w s(1-p)\frac{(1-\theta^e)\psi_s}{(1-\theta^e)\psi_s + (1-m)\theta^e s};\ s = \frac{\beta}{1+\beta} \quad (6.124)$$

De lo que se deduce que a lo largo de toda la trayectoria de equilibrio, $E_s^{pr,u} > E_s^{pr,q}$. Este es un resultado perfectamente lógico, ya que si en un equilibrio competitivo sin intervención ambos niveles de escolarización eran idénticos, al introducir un incentivo asimétrico es lógido que el input adquirido por los hogares u sea superior. Si esta es diferente para compensar la diferencia entre las productividades B dependerá de la cuantía de la subvención. Por su parte, el tipo impositivo, evaluado en la demanda de servicios escolares de equilibrio de los u y suponiendo que deja exenta las pensiones, será:

$$\tau_s = \frac{(1-m)\theta^e s}{(1-\theta^e)\psi_s + (1-m)\theta^e s} \quad (6.125)$$

Se confirma, pues, la intuición inicial de que el tipo no podía ser constante para tasas de acumulación en principio diferentes. En efecto, en un caso general en el que las tasas de acumulación no coinciden, la ratio relativa capital humano ψ o inversa de la medida de desigualdad elegida se alterará al alza o a la baja, con lo que el tipo impositivo lo hará en sentido contrario. Desde un punto de vista presupuestario, este hecho es consecuencia de la variación de la base impositiva a un ritmo diferente a aquel al que los gastos en subvenciones educativas se producen. Debido a este problema, la economía ya no podrá situarse desde el principio del horizonte en un estado estacionario.

Detengámonos por un momento en la dinámica global del modelo cuando el tipo impositivo es variable. El consumo crecerá a la misma tasa que la renta disponible, aunque a su vez el crecimiento de esta dejará de coincidir con la tasa de acumulación. Respecto a los niveles demandados de escolarización, estos evolucionarán en paralelo a la senda del tipo impositivo. Si los individuos q son los que acumulan más rápido, el precio sombra de las subvenciones educativas para el gobierno disminuirá, por lo que τ_s caerá a lo largo de la trayectoria, elevando las demandas educativas, que en cualquier caso mantendrán su diferencia relativa. En el límite las consecuencias serán diferentes para los q y los u. Para los primeros, al converger la tasa de crecimiento del stock de capital medio hacia la de q, ψ se estabilizará en un valor constante, por lo que la tasa de acumulaciónde estas familias vendrá dada por:

$$\Gamma_q \equiv B^q A \bar{n}^w s(1-p)\frac{(1-\theta^e)\psi}{(1-\theta^e)\psi+(1-m)\theta^e s} \quad (6.126)$$

Para las familias u, su demanda de E tiende en el límite a un valor finito cuando $\psi \to \infty$. Por tanto, la expresión equivalente a la planteada para los hogares q será:

$$\Gamma_u \equiv B^u \frac{A\bar{n}^w s(1-p)}{(1-\theta^e)} \quad (6.127)$$

Por lo tanto, asintóticamente los dos stocks de capital estabilizarían su crecimiento en un valor estacionario, aunque permanentemente uno sería superior al otro, por lo que la desigualdad aumentaría permanentemente para los u. En sentido contrario, si la subvención fuera muy elevada, podría favorecer una tasa de acumulación más rápida para los hogares u, por lo que el argumento sería el contrario, como también las condiciones asintóticas de los parámetros señaladas. En algún momento de la trayectoria se produciría una reversión de los stocks de capital relativos y esto, combinado con una divergencia creciente entre los mismos, daría lugar a una desigualdad desfavorable a los q que se iría acentuando con el tiempo.

A semejanza de lo concluido para el modelo dinástico, sin embargo, existe un valor crítico de la subvención capaz de igualar las tasas de acumulación y, con ello, hacer el tipo impositivo constante a lo largo de la senda. Para obtener este valor, hay que partir del hecho de que los niveles de escolarización relativos de los dos grupos serán:

$$\frac{E_s^{pr,q}}{E_s^{pr,u}} = 1 - \theta^e \quad (6.128)$$

Será por lo tanto posible fijar un tipo de subvención específico para que las tasas de acumulación. Este toma el mismo valor identificado en el modelo de agentes dinásticos:

$$\theta^{e*} = 1 - \frac{B^u}{B^q} \quad (6.129)$$

Así pues, las dos demandas de servicios educativos y el tipo impositivo, evaluados todos ellos para este tipo crítico de la subvención, son los siguientes:

$$\tau^{pr} = \frac{(1-m)\left(B^q - B^u\right)s}{B^u \psi_0^u + (1-m)\left(B^q - B^u\right)s} \quad (6.130)$$

$$E^{pr,q} = A\bar{n}^w s(1-p)\frac{B^u \psi_0^u}{B^u \psi_0^u + (1-m)\left(B^q - B^u\right)s} \quad (6.131)$$

$$E^{pr,u} = A\bar{n}^w s(1-p)\frac{B^q \psi_0^u}{B^u \psi_0^u + (1-m)\left(B^q - B^u\right)s} \quad (6.132)$$

Bajo este sistema las relaciones marginales de sustitución se igualarán, existirá un incentivo a la acumulación para los no cualificados siempre que $(1-\tau) > \left(1-\theta^e\right)$ y en cualquier caso menor los cualificados. La anterior inecuación, que supone la misma condición necesaria para la eficacia de la política de subvenciones que se impuso en la versión dinástica del modelo, no está garantizada siempre. De hecho la diferencia entre los dos términos viene dada por:

$$(1-\tau) - \left(1-\theta^e\right) = \frac{\left(\theta^e\right)^2\left[-\psi_0^u + (1-m)s\right] - \theta^e\left(3\psi_0^u + s(1-m)\right)}{\left(1-\theta^e\right)\psi_0^u + (1-m)\theta^e s} \quad (6.133)$$

Esto es, cuanto menor sea el stock de capital humano de u respecto al de q, tanto menor necesitará ser el tipo impositivo para saldar en equilibrio el presupuesto; en el mismo sentido, cuanto menor sea la proporción de los no cualificados sobre el total de la población tanto menor deberá ser el tipo que sufrague las subvenciones, siendo todo lo demás igual. El cumplimiento de esta condición no es irrelevante desde el punto de vista del bienestar, ya que la convergencia en el crecimiento del capital humano puede producirse al alza (esto es, por una caída de la de los hogares q y un aumento de los u) o a la baja, con una disminución mayor en los q que en los u. En este último caso el nivel de consumo alcanzable en todo período sería inferior para todo agente, por lo que la intervención pública, aun logrando homogeneizar las tasas de acumulación, seríe globalmente negativo en cuanto al bienestar de todos los agentes. **Es curioso comprobar que, a corto plazo, los incentivos de los agentes u -los de los q son claramente negativos- para pasar de un sistema de competencia perfecta o otro privado con intervención no son claros**. Por un lado, la primera cohorte que contribuyera a poner en funcionamiento este segundo sistema mejoraría en su vejez, gracias a la mayor tasa de acumulación, aunque experimentaría pérdidas netas de renta disponible para consumo en su etapa adulta, por lo que unas y otras deberían ser comparadas una vez homogeneizadas por la tasa de descuento intertemporal. Es a largo plazo donde se pone de manifiesto que todas las generaciones de los hogares u acabarían ganando con el sistema intervenido, al acabar más que compensando los incrementos de renta antes de impuestos a las desventajas de este régimen en términos impositivos; sin embargo, esta es una consideración que excede a las preferencias de los agentes, que solo abarcan los dos períodos de su vida durante los cuales toman decisiones.

Una alternativa a la articulación de impuestos y subvenciones, que no comportaría el despliegue de instrumentos fiscales adicionales por el gobierno, sería **la manipulación de los tipos de las pensiones para ambos grupos**, primando los recibidos por los hogares u. En efecto, en la medida en que el tipo de la pensión incide negativamente sobre el tamaño de los servicios escolares demandados, podría lograrse que el nivel relativo de estos fuera el adecuado para igualar ambas tasas de acumulación. El hecho de que esta medida no comporta instrumentos presupuestarios evita el problema del crecimiento de los ingresos y los gastos a diferentes tasas y, de existir componentes autónomos del gasto que crezcan a la misma tasa que el capital humano medio, permitirían mantener un tipo impositivo constante (o nulo) en todo período.

Denotando con p^q, p^u los tipos relativos y suponiendo un tipo impositivo nulo, se tendría que ambos tipos deberían guardar la relación:

$$\frac{\left(1-p^q\right)}{\left(1-p^u\right)}=\frac{B^u}{B^q} \quad (6.134)$$

En comparación con un régimen de competencia puro sin intervención pública, y suponiendo que $p^q = p$, las familias q no verían modificarse su tasa de acumulación ni su consumo para cada nivel de capital humano, por lo que su bienestar se mantendría igual. Por lo que respecta a los hogares u, su capital humano se expandiría más rápidamente y además, para cada nivel del mismo las posibilidades de consumo aumentarían, por lo que mejorarían su utilidad. El sistema sería por tanto inequívocamente superior en términos paretianos y además las relaciones marginales de sustitución intertemporales podrían igualarse entre ambas clases de individuos, objetivo que no podrá lograr el siguiente instrumento que se analiza a continuación.

Una ventaja adicional de la manipulación del tipo de las pensiones es que se evita el peso muerto en bienestar que generan unas subvenciones, en la medida en que estas se aplican incluso a las unidades de input que las familias u hubieran demandado en competencia perfecta, generando con ello un incremento innecesario de la presión impositiva. Aunque estos modelos se han construido bajo la hipótesis de información perfecta, en la práctica el gobierno no tiene información suficiente para conocer los niveles de equilibrio de E en competencia perfecta. La regulación de tipos diferenciados evitaría este peso muerto, al no descargar sobre el tipo impositivo la consecución de la eficiencia asignativa. Por contra, una desventaja procede en la práctica de la revelación tardía de las características del individuo, así como de la diferenciación de las tasas de fertilidad de unos y otros grupos, que pueden llegar a hacer financieramente inviable este instrumento. Por el momento la fertilidad se ha considerado exógena, pero esta es un condicionante del éxito de cualquier instrumento que implique redistribuciones intergeneracionales de renta.

Educación pública. Un régimen de este tipo en su modalidad totalmente gratis para todo alumno cualquiera que fuera su cualificación, con igualación en los servicios escolares provistos a todo agente, transformaría la restricción presupuestaria del gobierno en el siguiente sentido, suponiendo que también el coste de cada clase de servicio en la escuela pública según el nivel de capital humano de cada receptor del mismo:

$$\tau^{P}\left(1-p\right)A\overline{n}^{w}=\overline{E}^{P} \quad (6.135)$$

Simplificación que ha sido posible porque esta situación es equivalente para el gobierno a un coste unitario de la provisión pública igual al capital humano medio ponderado, pudiéndose dividir por este a ambos lados de la ecuación. De este modo, el tipo impositivo podrá mantenerse constante a lo largo de todo el horizonte. Pero además, la introducción de un nivel de provisión constante y completamente excluyente de la inversión privada privaría de relevancia a la cpo de E y la de acumulación de capital humano, ante la imposición exógena del nivel demandado de input. Esta peculiaridad tiene varias consecuencias importantes. La primera, inequívocamente -al no haber efectos externos- la tasa de acumulación de los hogares q sería superior a la de los u, independientemente del tamaño de las subvenciones a estos últimos. Segundo, la constancia del consumo en términos de la renta disponible deja de regir, despejándose último a partir de la restricción presupuestaria de los agentes privados:

$$C_s^{s-1,q} = \left(1-\tau^P\right)\left(1-p\right)A\bar{n}_s^w a_s^{hq} \quad (6.136)$$

$$C_s^{s-1,u} = \left(1-\tau^P\right)\left(1-p\right)A\bar{n}_s^w a_s^{hu} \quad (6.137)$$

En vista de lo cual, las diferentes tasas de acumulación conducirán a una senda más elevada para las familias q y por tanto a un mayor nivel de bienestar en comparación con los u (siempre a igualdad de preferencias). Las ecuaciones anteriores ponen también de manifiesto que el nivel de provisión tiene un límite derivado de la no negatividad del consumo privado, esto es, sustituyendo el tipo impositivo por su valor:

$$\bar{E}^P < \frac{1}{a_0^{hq}} \quad (6.138)$$

Si en el período inicial se verifica esta desigualdad, también se cumplirá en todos los posteriores y si lo hace para los hogares q, con un stock de capital siempre mayor que el de los u, también lo hará para estos últimos. Si en este contexto se deseara introducir un tipo de subvención a los hogares u sobre su renta disponible, se rompería la constancia del tipo impositivo, ya que de nuevo la ratio entre este último y el capital medio ponderado sería variable a lo largo del horizonte; en cualquier caso, la única virtualidad de dichas subvenciones sería la de mejorar el nivel de consumo de estas familias, a costa de reducir el nivel sostenible de $\bar{E}^P$ (viniendo dado su límite por la no negatividad del consumo de los hogares cualificads(, si bien asintóticamente este sería el mismo. El nivel de consumo para estas familias sería entonces:

$$C_s^{s-1,u} = \left[1 - \frac{1}{A\bar{n}^w\left(1-p\right)}\left\{\bar{E}^P + \theta^u\left(1-m\right)\frac{1}{\psi_s^u}\right\}\right]A\bar{n}^w\left(1-p\right)a_s^{hu} \quad (6.139)$$

En cualquier caso, las ganancias en bienestar para las familias u serían efímeras, ya que si bien a corto plazo los niveles de consumo alcanzables serían algo mayores, como puede verse en la ecuación superior, el bienestar de los mayores de modo inmediato y, a medio plazo, también el de las nuevas generaciones, sería inferior al que podrían registrar bajo la política sin subvención, al ser menor su tasa de acumulación de capital humano ante la obligación del gobierno de restringir en mayor medida su provisión de educación pública.

La comparación en bienestar con el régimen privado con impuestos y subvenciones depende en última instancia del nivel educativo fijo que el gobierno desee proporcionar y su comparación con el nivel de equilibrio en el otro régimen, dado que cuanto mayor sea la diferencia a favor de la escuela pública, mayor también será la cuantía a subvencionar y el tipo impositivo.

Resulta un ejercicio interesante **la diferenciación de efectos por grupos y ver cómo varían en función del nivel educativo público elegido**. Para ello, supongamos en primer lugar que el nivel de servicios escolares públicos es el mismo que el que alcanzan los hogares u en un régimen privado con impuestos y subvenciones -tal que en este último se igualaran las tasas de acumulación-. El tipo impositivo será superior en el sistema público desde el momento inicial, ya que:

$$\tau_s^P = \frac{\overline{E}^P}{A\overline{n}^w(1-p)} > \frac{\overline{E}^P}{A\overline{n}^w(1-p)}\left(1-\frac{B^u}{B^q}\right)(1-m)\frac{1}{\psi_0^u} = \tau^{pr} \quad (6.140)$$

Por otra parte, ahora los servicios escolares serian superiores para las familias q con escuela pública, por lo que su tasa de acumulación se acelerará, con la consiguiente ganancia de renta en la vejez. En cuanto al nivel de consumo para cada nivel de capital humano en la edad adulta, los individuos disfrutarán en el sistema privado intervenido de un menor tipo impositivo, pero a cambio de financiar sus gastos. El saldo del paso del sistema privado intervenido a la escuela pública en este segundo período de vida no tiene a priori un signo definido, viniendo dado por:

$$\Delta W_s^q = \overline{E}^P a_s^{hq}\frac{B^u}{B^q}\left[1-(1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\right] > 0 \quad (6.141)$$

Por tanto, este saldo positivo a corto plazo se añadiría la ganancia de renta en el período de vejez, generando un balance positivo que, en un sentido dinámico, aumentaría progresivamente generación a generación, dado que la mayor acumulación en el sistema de escuela pública se dejaría sentir en la renta de los adultos en mayor medida con el transcurso de las generaciones. Para las familias u, la tasa de acumulación sería la misma en los dos regímenes, por lo que las ganancias en la vejez del sistema de escuela pública serían nulas. En el período adulto, aunque los impuestos serían más favorables en el sistema privado, en este último habrían de hacer frente a la parte no subvencionada de su gasto educativo, si bien el saldo neto es positivo de nuevo:

$$\Delta W_s^u = \overline{E}^P a_s^{hu}\frac{B^u}{B^q}\left[1-(1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\right] > 0 \quad (6.142)$$

En otras palabras, las ganancias del tránsito a la escuela pública serían generalizadas a corto plazo, mientras que también se producen para los mayores -y las siguientes generaciones- dentro de las familias q. Si, por el contrario, el nivel educativo seleccionado fuera igual al de los hogares q en el régimen privado con subvenciones, el tipo impositivo del sistema privado intervenido podría expresarse como:

$$\tau^{pr} = \frac{\overline{E}^P}{A\overline{n}^w(1-p)}\left[\left(\frac{B^q}{B^u}-1\right)(1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\right] <> \tau^P \quad (6.143)$$

No es posible, por tanto, establecer la comparación entre los dos tipos, ya que en este caso hay dos efectos de signo contrario. Por un lado, el tipo privado financiaba solamente una parte del gasto en educación de los hogares u, mientras el público financia la integridad de los mismos. Pero al mismo tiempo, al referenciar la variación del tipo a la cantidad provista por el gobierno, el volumen de servicios demandados por los u en el régimen intervenido se incrementa; de ahí que el efecto sea ambiguo hasta el punto en que el incremento de dicho tipo en el régimen público pudiera llegar a ser incluso superior que el experimentado con el nivel alto de provisión pública. Para los hogares u, la tasa de acumulación del sistema público sería inferior en este caso, por lo que sus mayores perderían con el cambio. En la edad adulta, la variación en bienestar procedería de la consideración de dos efectos: el del tipo impositivo, cuyo signo se desconoce, y el menor gasto privado en este último régimen. Dicho saldo neto, necesariamente ambiguo, puede formularse ahora para estos hogares como:

$$\Delta W_s^u = \bar{E}^P a_s^{hu} \left[\left(\frac{B^q}{B^u} \right) - 2 \right] (1-m) \frac{1}{\psi_0^u} <> 0 \quad (6.144)$$

Obsérvese que la indefinición del signo se produce incluso con una ganancia por en gasto privado superior, en unidades de la provisión educativa de la escuela pública, superior a la del caso anterior. En el caso de que existieran ganancias positivas a corto plazo, habrían de cotejarse con las pérdidas en la vejez a causa de la menor posición en capital humano que en el sistema privado intervenido, dependiendo el saldo, entre otros factores, de la tasa de descuento intertemporal. A medio plazo, sin embargo, la menor tasa de acumulación acabaría mermando la renta antes de impuestos de futuras generaciones, haciendo que las pérdidas derivadas del tránsito al sistema de escuela pública compensansen las ganancias que de modo inmediato se registran en la fase adulta. Para las familias q en la primera generación de implantación de la escuela pública, las variaciones en bienestar se localizarían solamente en la edad adulta, toda vez que la tasa de acumulación sería la misma. En términos netos, estos individuos presentan una indefinición análoga a la comentada para las familias u:

$$\Delta W_s^q = \bar{E}^P a_s^{hq} \left[\left(\frac{B^q}{B^u} \right) - 2 \right] (1-m) \frac{1}{\psi_0^u} <> 0 \quad (6.145)$$

El signo del efecto neto a corto plazo se consolidaría en el largo plazo, al no modificarse la tasa de acumulación para los q. En definitiva, la racionalidad de la transición a la escuela pública parece clara cuando el nivel de provisión elegido es el más alto de los dos estudiados, ya que el incremento impositivo está acotado más claramente en relación con la desaparición de los pagos privados en el sistema público. El sesgo negativo que el sistema educativo público en este entorno de OLG introduce contra las familias no cualificadas a causa de la mayor desigualdad no se detecta en esencia en este análisis estático, aunque a largo plazo las cantidades del bien de consumo que unos y otros individuos podrían adquirir, incluso siendo la provisión pública pareja a la demanda de servicios por los individuos u en el sistema privado, sería claramente divergente y contraria a estos últimos hogares.

A medida que el nivel de provisión de escolarización pública desciende por debajo de la demanda de las familias q en el régimen privado con subvenciones, las disminuciones de bienestar a consecuencia de la reducción de las tasas de acumulación de capital humano tienden a presionar más negativamente sobre el bienestar global, necesitándose recortes de tipos impositivos suficientemente importantes para compensar los anteriores siquiera a corto plazo. En sentido contrario, cuando $\overline{E}$ es superior al nivel de equilibrio logrado por los hogares u en el régimen privado intervenido, las ganancias en las tasas de acumulación comienzan a pesar positivamente -ya que incluso los u disponen de más renta en su vejez- y cuanto menor sea Υ tanto más probable será que predominen los efectos positivos a corto plazo. La otra cara de la moneda es que, cuanto más elevado sea el nivel de provisión pública, tanto más altos tendrán que ser los impuestos en relación con los del régimen privado intervenido y tanto más bajas las ganancias en unidades del nuevo volumen de provisión, por lo que más intensas serán las pérdidas relativas de bienestar a corto plazo y, dada una tasa de descuento intertemporal de los agentes, tanto más improbable será que las pérdidas a corto plazo queden compensadas por la mayor posición en capital humano de la siguiente generación, sobre las que se sustentarán las transferencias intergeneracionales. El corolario es que una cobertura ambiciosa del régimen de escuela pública tiene tantas más posibilidades de elevar el bienestar general si se acompaña de una reducción de gastos superfluos, principalmente consumo público, que no redundan en un aumento del consumo de las familias.

Una forma de mejorar los resultados de este instrumento sería proporcionar niveles de escolarización pública diferentes a cada tipo de individuo de acuerdo con su productividad, haciendo que:

$$\frac{\overline{E}^{Pq}}{\overline{E}^{Pu}} = \frac{B^{u}}{B^{q}} \quad (6.146)$$

Si esta última fuera la forma instrumentación de la política, las tasas de acumulación se igualarían. Para evaluar el efecto neto sobre el bienestar, habría que tener en cuenta, por un lado, la variación del tipo impositivo que se opera en uno y otro caso; este sería mayor en el sistema público con diferenciación, de suerte que, fijando como referencia $\overline{E}^{Pu} = E^{pr,u}$, ambos serían:

$$\tau^{P}=\frac{\bar{E}^{u}}{A\bar{n}^{w}}\left[m\frac{1}{\psi_{0}^{q}}\frac{B^{u}}{B^{q}}+(1-m)\frac{1}{\psi_{0}^{u}}\right] \quad (6.147)$$

$$\tau^{pr}=\frac{\bar{E}^{u}}{A\bar{n}^{w}}\left(1-\frac{B^{u}}{B^{q}}\right)(1-m)\frac{1}{\psi_{0}^{u}} \quad (6.148)$$

Es inmediato comprobar que la tasa de acumulación es la misma en las dos situaciones, por lo que la variación en bienestar que experimenta una cohorte se circunscribe a aquella registrada durante su edad adulta. En el caso que nos ocupa, el paso al régimen de escuela pública diferenciada implica un aumento inequívoco del tipo impositivo, aunque acompañado de la desaparición del gasto -subvencionado o no- que los agentes deben realizar en el sistema privado intervenido. El balance de bienestar no en dicho segundo periodo de vida no tiene un signo definido a priori para ninguno de los dos grupos:

$$\Delta W_{s}^{u}=\bar{E}^{u}a_{s}^{hu}\frac{B^{u}}{B^{q}}\left[1-\frac{m}{\psi_{0}^{q}}-\frac{(1-m)}{\psi_{0}^{u}}\right]<>0 \quad (6.149)$$

$$\Delta W_{s}^{q}=\bar{E}^{u}a_{s}^{hq}\frac{B^{u}}{B^{q}}\left[1-\frac{m}{\psi_{0}^{q}}-\frac{(1-m)}{\psi_{0}^{u}}\right]<>0 \quad (6.150)$$

Cuando la provisión pública para los hogares u se eleva por encima de su nivel de equilibrio privado intervenido, las tasas de acumulación son mayores que en el sistema privado intervenido para ambos grupos, lo que constituye un incentivo para los individuos de toda cohorte en el último período de su vida. Sin embargo, será también más probable que el aumento del tipo impositivo genere pérdidas durante la etapa adulta, tal como se concluía en el análisis del régimen público homogéneo.

En cuanto a la comparación con el régimen público de escolarización homogénea, la variación en bienestar dependería tanto de la modificación en el tipo impositivo que se operara como de aquella que se registre en la tasa de acumulación. Por ejemplo, si $\bar{E}^{P}=\bar{E}^{Pu}$, el tipo impositivo será menor en el sistema diferenciado, ya que el volumen de servicios ofrecido a los hogares q será inferior en este último. Por tanto, las familias u disfrutarán de la misma tasa de acumulación y de un tipo impositivo más bajo, luego ganarían en bienestar. Las familias q, por el contrario, tendrían una tasa de acumulación inferior, de modo que deberían confrontarse pérdidas en la vejez con ganancias en la etapa adulta. En el otro extremo, si $\bar{E}^{P}=\bar{E}^{Pq}$, el tipo impositivo aumentaría, aunque las familias u compensarían dinámicamente este impacto en nivel negativo mediante una tasa de acumulación más alta, mientras que los q no verían alterada su tasa de acumulación y sin embargo se verían negativamente afectados por un tipo impositivo mayor, lo que redundaría negativamente sobre su bienestar.

En resumen, en términos de bienestar las consecuencias del régimen público son muy variables en función de los niveles de provisión pública elegidos, aunque puede afirmarse que, salvo en el improbable caso de que sea factible diferenciar los niveles de provisión a cada clase de hogares, el sistema es regresivo a corto y medio plazo, a diferencia de lo que sucedía cuando se introducía el peer effect en la tecnología de acumulación del capital humano. La brecha creciente entre los stocks de capital humano de ambos grupos se refleja en una creciente divergencia en los niveles de consumo y bienestar a lo largo de los generaciones, aunque este es un fenómeno al que los agentes se mantienen indiferentes, dada la estructura de sus preferencias. Un régimen privado intervenido puede frenar el deterioro de la posición relativa de los hogares u desde el primer momento si se proporciona la subvención adecuada a estos últimos, aunque el balance de bienestar con el sistema pública en la primera generación que tiene que optar entre ambos es incierto, existiendo una relación de intercambio de bienestar entre la vejez y la fase adulta a medida que se incrementa el nivel de provisión.

Cuando los parámetros B se igualan, las tasas de acumulación son las mismas en un régimen público, si bien lo harían también en un equilibrio competitivo descentralizado. El régimen público puede alcanzar la misma tasa de acumulación del capital humano que el privado, aunque a costa de un tipo impositivo que minora en términos relativos el bienestar de los agentes. Para niveles de provisión pública superiores a la demanda de servicios educativos de equilibrio general privada, los impuestos aumentarían, por lo que la elección dependería en última instancia de la tasa de descuento de los hogares, que deberian confrontar un menor nivel de consumo a corto plazo frente a mayores tasas de acumulación, que aumentarían los niveles de consumo a medio y largo plazo.

Régimen mixto con cupones. Este instrumento tendrá características análogas a las que se presentaron en la versión del modelo con agente dinástico, solo que en esta ocasión se operará un cambio en la tecnología de acumulación, a fin de preservar la comparabilidad de resultados con otros apartados y la operatividad analítica. En concreto, la influencia del cupón dentro de la tecnología de acumulación será multiplicativa respecto a la aportación privada, lo que implica que esta versión del sistema solo estaría definida para cupones mayores o iguales que 1, conforme a la siguiente estructura[234]:

$$a_{s+1}^{hj} = a_s^{hj} B^j E_s^{pc,j} \left(\bar{E}^{cj}\right)^{\gamma};\ 0<\gamma<1;\ \bar{E}^{cj}>1 \quad (6.151)$$

En la cual se admite en principio la posibilidad de una diferenciación de cupones por grupos de individuos. Esta especificación conserva la igualdad entre la tasa media y marginal del activo respecto al gasto privado, por lo que sigue proporcionando una tasa de ahorro constante -la misma derivada desde el comienzo- y proporcionando, en ausencia de subvenciones específicas a un grupo, una solución común a la demanda de servicios educativos complementarios privados. Por tanto en este escenario la única posibilidad de equiparar las tasas de acumulación desde el principio sería la imposición de cupones diferenciados a ambos grupos, cuyo peso relativo fuera:

$$\frac{\bar{E}^{pc,q}}{\bar{E}^{pc,u}} = \left(\frac{B^u}{B^q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (6.152)$$

El tipo impositivo necesario para financiar este esquema sería:

$$\tau^{Pc} = \frac{\bar{E}^{cu}}{A\bar{n}^w(1-p)}\left[m\frac{1}{\psi_0^q}\left(\frac{B^u}{B^q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + (1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\right] \quad (6.153)$$

Tipo cuyos componentes son constantes, lo que permitiría que se mantuviera invariable a lo largo del tiempo. El nivel de servicios demandado complementariamente por los agentes, independientemente de su cualificación, es:

$$E_s^{Pc,u} = E_s^{pc,q} = \frac{\beta}{1+\beta}\left[A\bar{n}^w(1-p) - \bar{E}^{cu}\left[m\frac{1}{\psi_0^q}\left(\frac{B^u}{B^q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + (1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\right]\right] \quad (6.154)$$

---

234 Caso de que se mantuviera la estructura aditiva entre cupones y gasto privado que se utilizó en el modelo dinástico, se rompería la igualdad entre la tasa de retorno media y marginal del activo, siendo la primera de ellas $\frac{pA\bar{n}^w B^j}{1-\bar{E}^{cj} a_s^{hj} B^j}$. El problema puede resolverse sin más que sustituir la cpo de la posición de capital humano en la restricción presupuestaria intertemporal. Si se desea igualar las tasas de acumulación para un $\bar{E}^c$ común, la ecuación resultante es un polinomio cuadrático en dicha variable cuyos coeficientes son variables período a período, por lo ni el cupón será constante ni puede garantizarse que tenga una solución positiva en todos los períodos. En sentido contrario, la aplicación de esta segunda tecnología en el modelo dinástico tampoco preserva en general la neutralidad de la totalidad del gasto educativo, como sucedía con la especificación aditiva.

Donde la derivada de un aumento del cupón respecto a la cantidad demandada privada es negativa, por lo que en equilibrio habría un grado de sustituibilidad entre los gastos de ambas procedencias, resultado que va en el mismo sentido que el destacado en la versión dinástica del modelo.

El sistema con cupones no satisfará la condiciones de optimalidad social, a pesar de que las tasas de retorno de los hogares de cada grupo, para el cociente crítico de cupones por grupo, se igualan, de la misma forma que las tasas de crecimiento del consumo desde s=0. La razón es que la solución de equilibrio del PB implica una misma cantidad de servicios educativos consumidos por ambos tipos de familias, en línea con la única tasa de retorno social del capital humano que se precisa se iguale a la también única RMS. Sin embargo, a pesar de que el componente privado complementario será igual entre grupos, no así los cupones, que deben compensar el diferencial entre los parámetros de productividad. En cuanto a la **comparación** con otros regímenes, ésta de nuevo se beneficiaría de anclar el valor del parámetro exógeno, en este caso el cupón proporcionado a las familias u en otro de los del sistema alternativo. **En cuanto al sistema de escuela pública con provisiones diferenciadas**, si se parte del siguiente nivel de provisión conjunta (privada más el cupón), las tasas de acumulación se igualan en ambos, por lo que la variación de las posibilidades de consumo en el segundo período de vida serán las decisivas para verificar la preferencia de los agentes por uno u otro régimen:

$$E^{Pc,u}\left(\overline{E}^{cu}\right)^{\gamma}=\overline{E}^{Pu} \quad (6.155)$$

La evaluación de este último aspecto se reduce a determinar el mayor de los tipos impositivos, ya que en ninguno de los dos son necesarias las subvenciones. Sin embargo, la relación descrita entre los niveles de provisión no permite esclarecer cuál de los niveles de provisión pública será superior, resultado que dependerá de la relación entre los parámetros de las tecnologías, puesto que:

$$\frac{\overline{E}^{cu}}{\overline{E}^{Pu}}=\left(\overline{E}^{Pu}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{1}{E^{Pc,u}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} <> 1 \quad (6.156)$$

A priori no resultará posible averiguar, por tanto, cuál de los dos tipos es superior. La estrategia alternativa, encontrar la relación entre niveles de provisión que posibilitan la igualación de los tipos, tampoco arroja un resultado definido en cuanto a la comparación de las tasas de acumulación de capital humano. En el caso especial $\gamma=1$, la relación entre niveles de provisión pública que harían iguales el tipo impositivo sería $\overline{E}^{cu}=\overline{E}^{Pu}$, situación en la cual si $E^{Pc,u}>1$ la tasa de acumulación con cupones sería superior, lo que haría preferible el sistema por las ganancias derivadas en la vejez de la cohorte que lo introdujera. En general, la única afirmación que puede realizarse sobre la operativa de los dos sistemas es que ambos producen consequencias equivalentes en cuanto a la contención de la desigualdad, ya que equiparan las tasas de acumulación desde el primer período, si bien el sistema de cupones presenta una mayor viabilidad que el de provisión de niveles de escolarización pública distintos.

Si la comparación se efectúa con el régimen privado intervenido, el nivel de provisión conjunta público-privado que garantiza la misma tasa de acumulación se formará de modo análogo al caso anterior:

$$E^{Pc,u}\left(\overline{E}^{cu}\right)^{\gamma}=E^{pr,u} \quad (6.157)$$

La valoración del cambio en bienestar privado por el tránsito al sistema de cupones debería enfocarse también sobre las consecuencias en el período de vida adulto, en el que interviene un doble efecto: el cambio en el tipo impositivo, así como la desaparición del gasto privado no subvencionado. Sin embargo la propia comparación de los tipos choca con el mismo obstáculo anterior, esto es, la falta de determinación de la magnitud relativa del gasto en cupones dirigido a las familias u y del gasto privado de estas en el sistema intervenido, por lo que a priori el balance entre ambos regímenes no tiene un signo definido. Desde el ángulo opuesto, la relación entre los niveles de provisión que dejaria invariable la renta (para una posición dada en capital humano) en la madurez sería:

$$\overline{E}^{cu}=E^{pr,u}\frac{\left[\left(1-\frac{B^{u}}{B^{q}}\right)(1-m)\frac{1}{\psi_{0}^{u}}+1\right]}{\left[(1-m)\frac{1}{\psi_{0}^{u}}+m\frac{1}{\psi_{0}^{q}}\left(\frac{B^{u}}{B^{q}}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (6.158)$$

Relación que no permite determinar cuál de los dos niveles de educación es el mayor, ni tampoco las respectivas tasas de acumulación. Calculando la relación entre ambos niveles que simplemente hace igual el tipo impositivo, se obtiene que $\overline{E}^{cu}<\overline{E}^{pr,u}$, si bien este hecho tampoco conduce a una conclusión definida sobre la relación entre las tasas de acumulación.

Régimen mixto con política de excelencia en la escuela pública. Ofrece, como en el modelo dinástico, la posibilidad de equiparar tasas de acumulación sin recurrir a niveles de provisión en la escuela pública diferenciales por grupos de individuos. Este sistema presenta, para los supuestos realizados, una ventaja esencial sobre los restantes considerados anteriormente: es el único que puede cumplir todas las condiciones de optimalidad social. En efecto, el sistema privado intervenido satisface la condición de igualación entre las tasas de crecimiento del consumo, aunque no genera una única tasa de retorno social que se iguale a la única RMS intertemporal, ya que no corrige la diversidad de los parámetros B y lo mismo puede decirse del sistema mixto con cupones. El sistema de escuela pública pura no cumple ni la condición de igualación de las RMS (ya que no hay transición a ningún estado estacionario donde converjan las dos tasas de acumulación) ni las dos tasas de retorno grupales se igualan. Sin embargo, el sistema de excelencia elude todos estos problemas si la extracción del profesorado fuera equiproporcional a la participación de cada grupo en la población, ya que: i) por un lado, logra desde el primer momento la igualdad entre las tasas de acumulación; ii) existe una única tasa de retorno social que se iguala a la RMS intertemporal del consumo y, aunque esta no se iguala a las tasas de retorno privadas -ya que los agentes no internalizan las consecuencias de la acumulación sobre la retribución a los profesores-, **si la provisión de servicios públicos se igualara a la equilibrio del planificador la asignación resultante sería un óptimo social**[235].

En comparación con el régimen de escuela pública puro, no solamente produce un alineamiento de las tasas de crecimiento desde s=0, sino que puede generar tasas de acumulación al menos tan elevadas como las de la escuela pública ordinaria, sin más que modular el nivel de provisión. Por ejemplo, si se quiere conseguir una tasa de acumulación igual a la disfrutada por las familias q con escuela pública homogénea, deberá respetarse $\overline{E}^{Px} = \overline{E}^{P}$. Por otro lado, la tasa impositiva bajo el régimen de excelencia será estrictamente superior al que prevalece en el sistema de escuela pública pura, toda vez que:

$$\tau^{Px} = \frac{1}{A\overline{n}^{w}(1-p)}\left[\overline{E}^{P} + \alpha A\overline{n}^{w}\frac{m}{\psi_0^q}\right] > \tau^{P} = \frac{\overline{E}^{P}}{A\overline{n}^{w}(1-p)} \quad (6.159)$$

En cuanto a los hogares q, en estas condiciones el sistema de escuela pública ordinaria sería estrictamente preferido, ya que al llegar la jubilación el sistema de excelencia no permite disfrutar de ganancias en consumo, mientras que en el período de madurez el tipo impositivo es superior en este último, con la consiguiente pérdida de bienestar -en ausencia de subvenciones en ambos-. Sin embargo, la situación de las familias u es más ambigua, ya que su tasa de acumulación mejora en la vejez, a pesar de sufrir un retroceso de bienestar en la madurez, por lo que la ponderación neta de ambos efectos dependerá decisivamente de la tasa de descuento intertemporal. Para niveles de provisión pública mayores que el de la escuela ordinaria, las ganancias del sistema de excelencia se de-

235 El valor óptimo de $\overline{E}^{Px}$ para el PB puede despejarse de la restricción de recursos de la economía. Por otro lado, teniendo en cuenta que el planificador plantea su problema en un horizonte infinito, el cumplimiento de su condición de transversalidad exigirá:

$B^{q}\overline{E}^{Px}\delta < 1$

jarían sentir especialmente a largo plazo -de manera más notable para los menos cualificados-, si bien esta consideración queda fuera de la función de utilidad de los agentes privados.

Cuando se evalúa el sistema frente a aquellos que también igualan las tasas de acumulación desde un principio, los efectos sobre la desigualdad, medida como la ratio relativa del capital humano de las familias u sobre el capital medio ponderado, es idéntico en todos ellos. Por lo que respecta a la magnitud de la tasa de acumulación las comparaciones varían sustancialmente con el nivel de provisión pública; **si el otro término es el sistema privado intervenido**, un nivel de provisión que cumpliera la siguiente relación lograría generar la misma tasa de acumulación que este último sistema:

$$\frac{B^u}{B^q}E^{pr,u} = \overline{E}^{Px} \quad (6.160)$$

Por tanto, eligiendo un nivel de provisión en excelencia que cumpliera la anterior igualdad, los efectos de su implantación en la primera generación vendrían dados por las consecuencias sobre la fase adulta, durante la cual se observarían dos cambios: i) la variación del tipo impositivo al pasar de uno a otro sistema; ii) la desaparición del gasto privado propio del régimen intervenido. El signo, sin embargo, será indefinido, al serlo también el de la variación del tipo impositivo:

$$\tau^{Px} = \frac{1}{A\overline{n}^w(1-p)}\left[\frac{B^u}{B^q}E^{pr,u} + \alpha A\overline{n}^w \frac{m}{\psi_0^q}\right] <> \tau^{pr} = \frac{1}{A\overline{n}^w(1-p)}E^{pr,u}\left(1-\frac{B^u}{B^q}\right)(1-m)\frac{1}{\psi_0^u} \quad (6.161)$$

Siendo una condición suficiente para que el tipo del régimen de excelencia fuera mayor:

$$2\frac{B^u}{B^q} > (1-m)\frac{1}{\psi_0^u} \quad (6.162)$$

Si el término de referencia es el régimen mixto con cupones la situación esparecida, con la peculiaridad de que las subvenciones a los no cualificados son innecesarias en cualquiera de los dos. Para igualar las tasas de acumulación, bastará con que se cumpla:

$$\overline{E}^{Px} = E^{Pc,q}\left(\overline{E}^{c,q}\right)^{\gamma} \quad (6.163)$$

De nuevo, cumpliéndose esta relación, los efectos sobre el bienestar deberían analizarse a través de la variación del tipo impositivo al que debe hacerse frente en el segundo período de vida. No hay tampoco una relación concluyente con entre los dos tipos, lo que impide establecer un signo definido en la variación de la renta disponible para los agentes privados:

$$\tau^{Px} = \frac{1}{A\bar{n}^{w}(1-p)}\left[E^{Pc,q}\left(\bar{E}^{cq}\right)^{\gamma} + \alpha A\bar{n}^{w}\frac{m}{\psi_0^q}\right] <> \tau^{Pc} = \frac{\bar{E}^{cq}}{A\bar{n}^{w}(1-p)}\left[\frac{m}{\psi_0^q} + \left(\frac{B^q}{B^u}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\right] \quad (6.164)$$

Tres ventajas adicionales que no son captadas suficientemente por este tipo de modelos cabría atribuir a este instrumento. La primera, fuera del ámbito estricto de OLG, es probable que el sistema de excelencia produzca efectos permanentes sobre la productividad del aprendizaje del individuo a lo largo de toda su vida, lo cual es particularmente oportuno cuando se enlazan a lo largo de su ciclo vital diversos canales de acumulación de capital humano, primero en la escuela y después en el ámbito laboral. Por el contrario, la subvención requiere de una instrumentación continuada para surtir efectos, ya que no corrige la desventaja estructural de partida del agente menos cualificado. En estos modelos donde la vida laboral del individuo se reduce a un período este hecho es inapreciable y en todo caso, al cubrir infinitas cohortes, el instrumento debe aplicarse a todas ellas. Pero el peso en bienestar de una y otra situación no es la misma, ya que incluso si el tipo impositivo ligado a un sistema de excelencia fuera mayor que otro de subvenciones durante la fase de escolarización, las necesidades de financiación del primero decrecerían sensiblemente a lo largo de los años, lo que acabaría trasladándose al tipo impositivo medio y al bienestar.

El segundo factor a considerar es que, en virtud de la competencia que de facto se establece entre el segmento privado del mercado de servicios escolares y el público en un régimen mixto, cualquier política de excelencia que se implante en el segundo con resultados positivos tiende a desencadenar una respuesta en el segundo en términos de mayor calidad, incluso aunque es improbable que esta sea del mismo tipo, como se explicó antes, con los consiguientes efectos multiplicadores sobre la acumulación de capital humano. En este sentido, que sea el líder del mercado el que introduzca esta tecnología puede tener efectos desbordamientos con gran probabilidad y si además esta filosofía impregna a las principales instituciones sociales, las consecuencias positivas todavía serán mucho mayores.

Por último, la política de excelencia minimiza los problemas de riesgo moral. En un ámbito de información asimétrica[236], como el que habitualmente caracteriza la revelación

---

236 En el modelo que venimos utilizando, caracterizado por diferentes tasas de acumulación en un régimen educativo privado sin intervención pública, la identificación de los hogares menos cualificados puede lograrse sin más que observando sus rentas laborales. En la práctica, sin embargo, estas se encuentran sujetas a distintos shocks a lo largo del ciclo vital del individuo, lo que hace imposible la utilización de este criterio.

de la tipología de los individuos, los resultados académicos de estos dependen no solo de su capacidad de consolidación de habilidades, sino del esfuerzo desplegado para internalizar en su tecnología de aprendizaje el output escolar. Por esta razón unos malos resultados pueden obedecer tanto la posesión de una tecnología de acumulación menos productiva, como a la ausencia de incentivos adecuados que motiven al alumno a realizar un mayor esfuerzo. Una política de subvenciones a aquellos que sistemáticamente presentan peores resultados, incluso si tiene límites temporales, puede resultar contraproducente en este contexto, generando riesgo moral. Por el contrario, una política que ligue la obtención del título a la verificación de unos estándares relativamente elevados promueve un conjunto de incentivos que fomentan un esfuerzo elevado y hacen más eficaz la producción de servicios escolares públicos.

Extensiones.

Modelo de OLG con endogeneización del tiempo. Supongamos ahora que la acumulación de capital humano se lleva a cabo mediante producción doméstica, con tiempo de aprendizaje como único input. La función de acumulación reviste una forma análoga a la utilizada en este apartado, con rendimientos constantes a escala en ambos inputs y ausencia de efectos externos. Los factores de heterogeneidad entre agentes residen, como hasta ahora, en diferentes parámetros B y stocks de capital humano en el momento inicial. Estas características se concretan en la siguiente tecnología:

$a_{s+1}^{hj} = a_s^{hj} B^j n_s^h$ (6.165)

Siendo n_s^h el tiempo dedicado a la educación de los hijos por medio del capital humano acumulado por los padres. Manteniendóse el mismo coste de atención de los hijos indicado antes, la restricción presupuestaria de los individuos en el segundo período de vida será la formulada más abajo:

$C_s^{s-1,j} + A a_s^{hj} n_s^{hj} \leq (1-p) A a_s^{hj} (1-v)$ (6.166)

La restricción se ha expresado en función de la renta total, en la línea de Becker. Esta está compuesta por el salario de los trabajados aplicado a la máxima cantidad de tiempo disponible, que es la dotación por período menos la fracción exógena de aquel dedicada a la atención de los niños en aquellos momentos en que estos no están concentrados en sus tareas de aprendizaje. Además, se detrae la fracción de la renta total destinada al pago de la pensión a la siguiente generación. El ahorro se destina exclusivamente a la acumulación de capital humano, el único activo existente en la economía, con un coste de oportunidad asociado dado por el salario por unidad de tiempo al que se renuncia. En el último período de vida la restricción presupuestaria no varía, dedicándose un tiempo nulo a trabajar y acumular y siendo financiado el consumo por las transferencias procedentes de la generación que trabaja.

Con preferencias logarítmicas, el ahorro continuará siendo una proporción constante de la renta total tal como ha sido definida, disponiendo los dos hogares representativos de la misma tasa. Esto implicará que el tiempo destinado a la producción de capital humano será igual en todos los períodos e igual a:

$$n_s^{hj} = (1-p)(1-v)\frac{\beta}{1+\beta} \quad (6.167)$$

Por su parte, la relación marginal intertemporal del consumo se igualará a la tasa de retorno del capital humano:

$$\frac{C_{s+1}^{s-1,j}}{\beta C_s^{s-1,j}} = p\left(1-n_{s+1}^h\right)B^j \equiv rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{j} \quad (6.168)$$

Teniendo en cuenta que el tiempo invertido en educación es constante y sustituyendo la expresión obtenida antes, se tendrá:

$$rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{j} = pB^j\left\{\left[1-(1-p)(1-v)\frac{\beta}{1+\beta}\right]\right\} \quad (6.169)$$

En ella, se aprecia que la dependencia respecto al tipo de la pensión se origina por dos vías. Una, más directa, al proceder la renta de la inversión de dicho tipo en el período de vejez. Otra, indirecta, al reducir p el tiempo invertido en educación, aumentará el dedicado al trabajo de mercado, incrementándose la base sobre la que se aplica el tipo. Dado que los dos canales de dependencia de la tasa respecto al tipo de la pensión son positivos, su efecto acumulado también lo será. En cualquier caso, se aprecia que la utilidad logarítmica de nuevo propicia que el input educativo de equilibrio sea el mismo para los dos grupos, por lo que cuando B difiere sus tasas de acumulación también lo harán. Consiguientemente, de nuevo se tendrá una situación en la que cada grupo se sitúa desde el comienzo sobre su propia senda estacionaria, con tasas de acumulación diferentes y divergentes, dadas por:

$$\Gamma_j \equiv B^j(1-p)(1-v)\frac{\beta}{1+\beta} \quad (6.170)$$

Desde el momento en que la producción del capital humano se realiza domésticamente, la gama de instrumentos públicos se reduce sensiblemente, salvo que se opte por una política extremadamente intervencionista en la que se regule el tiempo que los padres dedican a la educación de los niños. Algunas medidas seguirían siendo factibles, no obstante, como la diferenciación de los tipos de las pensiones o la utilización de impuestos y subvenciones. Puesto que el análisis es muy similar, no se repetirá lo dicho en apartados previos.

Modelo de OLG con transferencias intergeneracionales endógenas. Hasta el momento se ha supuesto que la fracción salarial que determina la cuantía de las pensiones era exógeno, bien fuera fijado directamente por acuerdo de los individuos o regulado por el gobierno. Cabría preguntarse si la endogeneización de este porcentaje puede conducir a resultados esencialmente distintos (por ejemplo, a través de transferencias de equilibrio inferiores para las familias u que compensaran en alguna medida su productividad inferior en los procesos de aprendizaje.

Como se vio en el capítulo 3, Ehrlich y Lui (1991) construyen un modelo similar a este que se resuelve secuencialmente: primero, los adultos optimizan sus preferencias de modo “no altruista”[237] para un nivel genérico de transferencias y, posteriormente, endogeneizan tal nivel para maximizar las preferencias de la generación próxima. El timing es importante: el adulto en s elige p vigente en s+1, pero toma como dado el p que sus padres fijaron para s; esto es, los descendientes no intervienen directamente en la configuración de p, salvo pasivamente a través de sus preferencias, que sus padres conocen. Este tipo de sistema maximiza el crecimiento del sistema cuando los agentes son homogéneos. Si se aplicara este enfoque en un modelo de agentes heterogéneos, se comprueba en el Anexo que, para preferencias logarítmicas, el valor óptimo de p sería nulo, mientras que para una función de utilidad de elasticidad de sustitución constante sería sensible a B, aunque el signo de la derivada parcial no estaría determinado a priori. Sea como fuere, este tipo de aproximación presenta como principal limitación el hecho de presuponer un fuerte grado de altruismo en la determinación de la transferencia, cuando podría ser discutible si este se encuentra en las preferencias del individuo adulto, que se preocupa solamente por los bienes que le atañen personalmente, aunque en uno de ellos el nivel de formacion de sus hijos sea determinante de su calidad.

Abordaremos este problema de una manera más general, mediante dos supuestos más asépticos: i) el cabeza de familia puede tener un grado de altruismo intergeneracional variable, dado por el parámetro α . La combinación de estos supuestos lleva consigo que la endogeneización de p se realizará para maximizar una combinación lineal de su utilidad

[237] Las comillas se deben a que la ausencia de altruismo en el modelo original de Ehrlich y Lui es relativo, al incluirse en sus preferencias el bien “compañía en la vejez”, en cuya producción inteviene el nivel de capital humano de los descendientes.

en el último período de vida y la de sus descendientes inmediatos en la madurez, momento en el cual la vida de ambos se solapa. Esto es, se tratará de resolver:

$$Max_{p_s} \Psi = \alpha u_{s+1}^{s-1} + (1-\alpha) u_{s+1}^{s} \quad (6.171)$$

El programa presenta la siguiente cpo:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p_{s+1}^{j}} = \alpha \frac{\partial u_{s+1}^{s-1,j}}{\partial C_{s+1}^{s-1,j}} \frac{\partial C_{s+1}^{s-1,j}}{\partial p_{s+1}^{j}} + (1-\alpha) \frac{\partial u_{s+1}^{s,j}}{\partial C_{s+1}^{s,j}} \frac{\partial C_{s+1}^{s,j}}{\partial p_{s+1}^{j}} =$$

$$= \alpha\beta \frac{1}{C_{s+1}^{s-1,j}} A\bar{n}^{w} a_{s+1}^{hj} - (1-\alpha) \frac{A\bar{n}^{w} a_{s+1}^{hj}}{C_{s+1}^{s,j}} = \frac{\alpha\beta}{p_{s+1}^{j}} - (1-\alpha) \frac{(1+\beta)}{\left(1-p_{s+1}^{j}\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{s+1}^{j} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1+\beta)+\alpha\beta}; \ \alpha \in (0,1) \quad (6.172)$$

A diferencia de la función objetivo de Ehrlich y Lui, el hecho de que en esta variante no cubra más allá del período s+1 -final del horizonte de las preferencias de los padres, entendiendo que incluso la felicida de sus hijos puede producir satisfacción a los padres solamente en tanto estos estén con vida- lleva consigo la ausencia de preocupación por las consecuencias de p sobre la acumulación de capital humano y, derivadamente, la pensión recibida por la siguiente generación en su vejez; esta consideración haría relevante los parámetros B, al evaluarse los efectos de p sobre la demanda de escolarización y los de los cambios de esta sobre el nivel de capital humano. Sin embargo en este marco se observa que p es: i) estacionario y ii) igual entre hogares representativos, por lo que no ejerce ningún contrapeso a las diferentes velocidades de aprendizaje[238]. De ahí que, incluso con legados endógenos, la función objetivo de acuerdo con la cual estos se determinan puede hacer necesaria la intervención pública, incluso con un grado de altruismo intergeneracional variable.

Fertilidad endógena[239]. Como última ampliación al modelo básico de OLG con agentes heterogéneos, se endogeneizará el número de descendientes (N) en cada generación, con la restricción de que este sea como mínimo la unidad: de lo contrario y dada la estruc-

---

[238] A la vista del valor óptimo de p es claro que deben excluirse los valores extremos del parametro de altruismo, puesto que si p=0 el consumo debería anularse en la vejez, lo que resulta incompatible con las condiciones de Inada y otro tanto podría decirse cuando p=1 con el consumo en la edad adulta.

[239] El punto de partida, de nuevo, es el modelo de Ehrlich y Lui, solo que varía el input considerado, así como la estructura de la transferencia intergeneracional, por lo que como veremos a continuación las condiciones para la obtención de soluciones interiores no son las mismas.

tura del modelo, sería imposible generar recursos suficientes para la supervivencia de los agentes durante su vejez, salvo que se introdujera un activo diferente al capital humano. La fertilidad viene apoyada por las siguientes preferencias, que permiten que esta tome un valor de equilibrio por encima del mínimo vegetativo:

$$U = \ln C_s^{s-1} + \beta\left(\ln C_{s+1}^{s-1} + \ln N_s\right) \text{ (6.173)}$$

La decisión sobre el número de hijos se toma al comienzo del segundo período de vida, aunque produce satisfacción durante la vejez. En el marco de referencia más sencillo sin intervención pública, aquella modifica las restricciones presupuestarias de s y s+1 para los miembros de una cohorte en el siguiente sentido:

$$C_s^{s-1,j} + N_s^j a_s^{hj} E_s^j \leq (1-p) A a_s^{hj}\left(1 - vN_s^j\right) \text{ (6.174)}$$

$$C_{s+1}^{s-1,j} \leq pAa_{s+1}^j N_s^j\left(1 - vN_{s+1}^j\right);\ j = q,u \text{ (6.175)}$$

Como se aprecia en las ecuaciones precedentes, en este ejercicio se tomará un tipo de transferencia p exógeno. El efecto de la endogeneización de N se localiza, por tanto, en tres áreas de estas restricciones: i) El gasto en servicios escolares, que se multiplica por el número de hijos; ii) El tiempo de trabajo y con ello la remuneración laboral total, que queda también endogeneizada al mutiplicarse por N el tiempo destinado al cuidado de los hijos; iii) La renta recibida en s+1 de la inversión en capital humano acometida en s, ya que esta se multiplica por el número de hijos generados en el período anterior y además dependerá de la prole que estos deciden tener como adultos, al determinar esta la base sobre la que calcula el importe de la pensión. Es de destacar también que las restricciones presupuestarias podrían escribirse en un sentido beckeriano, como una renta total que financia el consumo y el ahorro, el cual se canaliza hacia la inversión en cualquiera de los dos otros dos activos, el tamaño familiar y el gasto en educación. No obstante, dado que los costes de ambas inversiones se encuentran interrelacionados, a efectos de la derivación de la solución óptima es preferible considerar la renta total neta del tiempo exigido por la fertilidad, o en otras palabras, la inversión en capital humano condicionada a la inversión efectuada en el número de hijos. De este modo la renta del segundo período se puede considerar igual al rendimiento bruto de la inversión en capital humano multiplicado por el ahorro, estando el primero condicionado al número de niños.

Por lo demás, supondremos que la estructura de las preferencias se mantienen[240]. Finalmente, dado que el tiempo de trabajo debe ser estrictamente positivo, debe exigirse que $1 - vN_s^j > 0$. Existirá, pues, una primera cota superior para N, que viene dada por 1/v para ambos grupos.

El lagrangiano del hogar representativo no cambia en sus cpo respecto a los dos consumos, pero sí en las restantes, que se transcriben a continuación:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial E_s^j} = -\lambda_s N_s a_s^{hj} + \mu_s B^j a_s^{hj} \leq 0;\ j = q,u \quad (6.176)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_{s+1}^{hj}} = -\mu_s + \beta \lambda_{s+1} pA\left(1 - vN_{s+1}\right) N_s \quad (6.177)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial N_s} = \lambda_s \left[-Aa_s^{hj} v(1-p) - a_s^{hj} E_s \right] + \beta \left[\lambda_{s+1} pAa_{s+1}^{hj} \left(1 - vN_{s+1}\right) + \frac{1}{N_s} \right] + \xi_s \leq 0 \quad (6.178)$$

Con ξ_s el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $1 \leq N_s$. Las dos primeras cpo de este bloque no presentan grandes novedades, salvo porque algunos términos están escalados por N. La condición respecto al número de hijos implica que, de existir una solución interior, el beneficio marginal de incrementar el número de descendientes, dado por la pensión incremental a recibir en la vejez, se iguala a la suma de sus costes marginales, en términos de gasto acrecentado en educación y menor renta salarial a consecuencia de un tiempo disponible más reducido.

---

240 Como se explicó en el capítulo 4, el modelo de Ehrlich y Lui se apoya para endogeneizar la fertilidad en la introducción de un tercer bien en la función de utilidad, denominado “compañía” y que comprende el conjunto de servicios que, por medio de su proximidad física y emocional, los descendientes pueden prestar en la vejez al cabeza de familia. Estos a su vez se generan mediante una tecnología dependendiente del número de hijos y de su capital humano. Este artificio se utiliza porque, en ausencia de él, cuando el input empleado en la tecnología de aprendizaje es el tiempo, la tasa de retorno del número de hijos es siempre inferior a la del capital humano, con lo que la fertilidad endógena no sería operativa. Al introducir este tercer bien en las preferencias se alteran las tasas de retorno y se da cabida a la posibilidad de soluciones interiores tanto en fertilidad como en capital humano. En la variante del modelo desarrollada en este capítulo, sin embargo, no es estrictamente necesario el recurso a la modificación de las preferencias. El Anexo muestra de hecho cómo, de replicarse la función de utilidad de Ehrlich y Lui, la condición para la obtención de soluciones interiores es análoga a la enunciada más arriba.

La introducción de la fertilidad endógena supone poner un activo real más a disponibilidad de los agentes privados, con la particularidad de que su renta está ligada a la que proporciona el otro activo real, el capital humano, a través de la composición de las pensiones[241]. La naturaleza de activo real de la descendencia se pone de relieve en la medida en que la inversión supone un sacrificio de recursos inicial, a cambio de una cierta renta futura; además, la tasa de depreciación del activo sería nula, gracias a la consideración implícita de una tasa de supervivencia unitaria. Sin embargo, tal como sucedía con el capital humano cuando se consideraba simultáneamente un bien de consumo duradero, no puede derivarse una tasa de retorno de la fertilidad en sentido estricto, ya que en ella se incluiría un cociente de utilidades marginales sin traducción en un precio relativo. Por lo que respecta a la tasa de retorno del capital humano, esta tomará la forma familiar, mientras que por su cpo la RMS entre consumo en s y s+1 se igualará a la siguiente expresión, suponiendo que se trate de una solución interior -en este contexto, superior a la unidad-:

$$rr_{s,s+1}^{h,e}\Big|_{ge}^{j} \equiv pA\left(1-vN_{s+1}^{j}\right)B^{j} \quad (6.179)$$

$$\frac{\lambda_s}{\beta\lambda_{s+1}} = \frac{pA\left(1-vN_{s+1}^{j}\right)B^{j}E_s^{j}}{\left((1-p)Av+E_s^{j}\right)} + \frac{C_{s+1}}{N_s a_s^{h}\left((1-p)Av+E_s^{j}\right)} = 2\frac{pA\left(1-vN_{s+1}^{j}\right)B^{j}E_s^{j}}{\left((1-p)Av+E_s^{j}\right)} \quad (6.180)$$

Para que existan soluciones interiores en la inversión en fertilidad y capital humano, la RMS se igualará a la tasa de retorno del capital humano y al segundo miembro de la ecuación inferior, lo que exige que se verifique en todo período:

$$E_s^{j} = Av(1-p) \quad (6.181)$$

En consecuencia, la inversión en educación sería común a ambos grupos, por lo que las tasas de acumulación divergirán desde el momento inicial. Habrá que imponer, pues, una condición que asegure que el capital humano de al menos uno de los grupos no se estanca:

---

[241] En los modelos de equilibrio general dinámico la introducción de bonos o de otro activo real junto al capital humano presenta tiene, en principio, diferentes implicaciones en cuanto al perfil del consumo. Mientras si se usa un activo real el consumo no puede exceder la renta del período, los bonos permiten la toma de posiciones deudoras, por lo que el consumo inicial se gira sobre la totalidad de la renta intertemporal del individuo. En un contexto OLG con los supuestos realizados, sin embargo, la única renta que se percibe en la vejez es la procedente del ahorro en la edad adulta; por tanto, si bonos y capital humano tienen una tasa de retorno común, la única fuente de renta relevante en ambos casos será la del segundo período de vida -siendo la del tercer período los rendimientos del ahorro del segundo-, por lo que desde este punto de vista la renta intertemporal sobre que sirve para la determinación del consumo inicial será la misma en las dos alternativas.

$1 < B^j Av(1-p)$ (6.182)

Por lo que respecta a la fertilidad, habrá que tener en cuenta que de nuevo la tasa de ahorro es constante, por lo que el número de hijos en equilibrio podrá despejarse de la siguiente relación:

$$N_s^j a_s^{hj} Av(1-p) = \frac{\beta}{1+\beta}(1-p)Aa_s^{hj}\left(1-vN_s^j\right) \Rightarrow N_s^j = \frac{1}{v}\frac{\beta}{(1+2\beta)} \quad (6.183)$$

La fertilidad, como se aprecia en la ecuación anterior, también es común entre grupos y además guarda, dada la tasa de ahorro, una relación inversa con el gasto en educación a través del parámetro v, que deprime la primera y potencia la segunda. Esta relación es común a la práctica totalidad de la literatura sobre fertilidad endógena y transición demográfica y en cada modelo se materializa de una forma distinta, dependiendo de la estructura de las preferencias y los restantes supuestos tecnológicos. Una clave, por tanto, de que la relación de demandas educativas no alcancen la proporción adecuada para igualar las tasas de acumulación es que el coste variable de cada hijo en términos de tiempo no puede diferenciarse de acuerdo con los respectivos niveles de cualificación.

Comenzaremos, como en los anteriores apartados, analizando el potencial de las políticas de impuestos y subvenciones para corregir esta situación de desigualdad creciente entre los dos segmentos de población. Supongamos que los impuestos no dejan exentas las pensiones y, por tanto, tanto estos como las subvenciones a la educación afectan tanto a la tasa de retorno del capital humano como a la cpo de la fertilidad. Efectuando las oportunas modificaciones en las cpo, puede comprobarse que los servicios de escolarización demandados son los siguientes, mientras que el número de hijos no varía para ninguno de los grupos:

$$E_s^q = (1-\tau_s)Av(1-p) \quad (6.184)$$

$$E_s^u = \frac{(1-\tau_s)}{(1-\theta^e)}Av(1-p) \quad (6.185)$$

De aquí que, imponiendo el mismo valor crítico de la subvención que se ha venido utilizando hasta el momento, las tasas de acumulación se igualaran desde el primer momento. El hecho de que la fertilidad óptima para todo individuo no se altere se deriva del hecho de que los correspondientes efectos renta se compensan exactamente con los efectos sustitución en la demanda de educación: en cuanto a los impuestos, existe un efecto renta negativo y que se compensa con un efecto sustitución positivo sobre la fertilidad (o negativo sobre la educación, si se prefiere); las subvenciones, por su parte, generan un efecto renta positivo compensado por un efecto sustitución positivo hacia la educación demandada. Hay que resaltar también que el tipo impositivo que puede financiar este esquema es constante en el tiempo y sería la solución a la siguiente ecuación, construida a partir de la restricción presupuestaria del gobierno:

$$A\tau(1-vN)=\theta^{e}(1-m)\frac{1}{\psi_0^u}\frac{(1-\tau)}{(1-\theta^e)}(1-p)Av \quad (6.186)$$

Tiene interés comprobar en este contexto el resultado de una política de estímulo a la natalidad dirigido a las familias u, como transferencias compensatorias del tiempo transcurrido al cuidado de los niños[242]. Supongamos que la restricción presupuestaria de los individuos u pasa a ser la siguiente:

$$C_s^{s-1,u}+N_s^u a_s^{hu} E_s^u \leq (1-p)(1-\tau)Aa_s^{hu}\left[1-v\left(1-\theta^v\right)N_s^u\right] \quad (6.187)$$

Sin más que reformular las cpo, se derivan las siguientes demandas educativas y fertilidades para los dos grupos:

$$E_s^q=(1-\tau)(1-p)Av;\ N_s^q=\frac{1}{v}\frac{\beta}{(1+2\beta)} \quad (6.188)$$

$$E_s^u=(1-\tau)(1-p)A(1-\theta)v;\ N_s^u=\frac{1}{v\left(1-\theta^e\right)}\frac{\beta}{(1+2\beta)} \quad (6.189)$$

Esto es, las demandas relativas se ven afectadas por el efecto sustitución consiguiente, que abarata la fertilidad para los individuos menos cualificados, con el resultado de que la brecha entre las tasas de acumulación de ambos grupos no solamente no se cerrará respecto a la solución competitiva descentralizada, sino que se ampliará. Por lo demás, puede demostrarse que el tipo impositivo no será constante salvo asintóticamente, incrementándose gradualmente a lo largo de la senda de equilibrio general, al ser superior el crecimiento de los sujetos subvencionados que el de la población media a partir de la cual se recauda el impuesto. Asintóticamente, sin embargo, la población crecerá a la misma tasa que los individuos u, tras anularse el peso de los q, por lo que el peso de los primeros hogares se estabilizaría y con él el tipo impositivo.

En un régimen de escuela pública pura, la demanda de servicios escolares desaparece de la restricción presupuestaria. La nueva cpo respecto a la fertilidad establece, una vez reordenada:

---

[242] Obviamente este modelo no tiene en cuenta otros efectos importantes que pudieran tener dichas transferencias, como facilitar la incorporación de la mujer al mercado de trabajo, al no reflejar diferencias de género. En cualquier caso el impacto analizado es una dimensión a considerar.

$$\frac{\lambda_s^j}{\beta\lambda_{s+1}^j}=2\frac{p\left(1-vN_{s+1}^j\right)B^j\bar{E}^P}{(1-p)v} \text{ (6.190)}$$

De lo que se deduce que el consumo privado y la fertilidad de cada grupo serán, respectivamente:

$$C_s^{s-1,j}=\frac{1}{2\beta}(1-p)vN_s^j a_s^{hj} \text{ (6.191)}$$

$$N_s^j=\frac{1}{v}\frac{A(1-\tau_s)}{\frac{1}{2\beta}+A(1-\tau_s)} \text{ (6.192)}$$

Dado que el número de hijos es igual para cada grupo, la restricción presupuestaria del gobierno permite despejar un tipo impositivo constante, por lo que también la fertilidad lo será:

$$A\left(1-vN_s(\tau_s)\right)\tau_s=\bar{E}^P \text{ (6.193)}$$

Por tanto, cuanto más elevado resulte el nivel de provisión pública y más alto, consistentemente, deba ser el tipo impositivo, menor será la fertilidad, que absorberá íntegramente el impacto del coste de dicha financiación. Por lo demás, la tasa de acumulación seguirá siendo diferente para ambos grupos, como en el modelo base planteado para OLG[243].

Cuando la provisión rígida de servicios educativos va acompañada de un **régimen de excelencia** la asignación de equilibrio de consumo y fertilidad serían los mismos, solo que las tasas de acumulación podrían igualarse desde el período inicial. La relación de intercambio entre crecimiento de la población y nivel de provisión a través del tipo impositivo sería análoga a la mencionada antes, solo que ahora el hecho de contar con una tasa de acumulación común permitiría contrastar si el tipo impositivo que maximizaría el crecimiento generaría una solución interior de fertilidad. La tasa de crecimiento del ouput a maximizar, función objetivo del problema, vendría dada por:

$$\Gamma_{ys}=\frac{\left(1-vN_0N^s\right)}{\left(1-vN_0N^{s-1}\right)}NB^q\bar{E}^x \text{ (6.194)}$$

---

243 La ausencia de una decisión endógena de acumulación de capital humano permitiría hacer la utilidad marginal de la fertilidad nula y aun así generar una demanda interior de hijos, ya que la tasa de retorno del capital humano dejará de ser siempre superior a la de la fertilidad. En tal caso, la tasa de ahorro retomaría el valor del modelo base y la fertilidad podría escribirse como: $N_s^j=\frac{1}{v}\frac{\beta}{1+\beta}$

La maximización de la tasa de crecimiento del output respecto a la tasa de fertilidad se realizaría resolviendo el siguiente polinomio, cuyo grado depende del período considerado y que, para $s \geq 2$, presenta dos cambios de signo, luego generaría dos raíces positivas:

$$2vN^{s-1} - (1+s)N + (s-1) = 0 \quad (6.195)$$

Por ejemplo, en el caso más simple para s=2 la ecuación deviene lineal y tendría como solución:

$$N^* = \frac{1}{3-2v} \quad (6.196)$$

Esto significa que, en cada período a partir del segundo, un conjunto de soluciones positivas que resuelven la ecuación, el nivel de provisión con el método de excelencia debería ser diferente, lo que llevaría consigo un tipo impositivo también distinto y una fertilidad de equilibrio que resolviera la ecuación polinómica superior. El mantenimiento de una provisión constante en el tiempo, por tanto, sería subóptima desde la perspectiva de la maximización del crecimiento.

Finalmente, **el sistema mixto con cupones** sería también articulable en este marco de fertilidad endógena. Con una interacción multiplicativa como la descrita en el modelo general de OLG, que permitiría modular los cupones asignados a cada grupo de modo que su valor relativo garantizase una tasa de crecimiento común en todo período, los valores de equilibrio de los servicios educativos complementarios privados y de la fertilidad serían los siguientes:

$$E_s^{pc,j} = \frac{\left(1-\tau^{Pc}\right)(1-p)Av}{2\left(\bar{E}^{cj}\right)^{\gamma} - 1} \quad (6.197)$$

$$N_s^j = \frac{1}{v}\frac{\frac{\beta}{1+\beta}}{\frac{1}{2\left(\bar{E}^{cj}\right)^{\gamma}-1} + \frac{\beta}{1+\beta}} \quad (6.198)$$

Como se observa, los cupones ejercen un efecto expulsión parcial sobre el gasto complementario privado -incluso aunque el tipo impositivo no fuera superior al del sistema privado intervenido-, confirmando una vez más esta tendencia encontrada en las versiones anteriores del modelo como en general en toda la literatura sobre esta cuestión. La fertilidad, por su parte, se vería afectada positivamente por los cupones, dada la relación inversa que existe entre gasto educativo y fertilidad en el reparto de la renta total en el contexto de una tasa de ahorro constante.

VII. CONCLUSIONES

1. La obra de Gary Becker y Yoram Ben-Porath no solamente se encuentra en la raiz de la Teoría del Capital Humano, sino que su influencia está omnipresente en todo el desarrollo analítico de esta, desde mediados de los años 60 a la actualidad. El problema canónico de elección dinámica en que cristaliza la contribución de estos dos autores es el que ha perdurado y constituido la base de toda la literatura posterior, de modo que la práctica totalidad de esta, tanto la referida a equilibrio parcial como la de equilibrio general, puede considerarse una extensión y profundización analítica del núcleo construido por aquellos. Los dos ingredientes básicos de la Teoría son, por un lado, la asignación óptima del tiempo de Becker y, por otro, la formulación de la inversión óptima en capital humano de Ben-Porath conforme a una estructura neoclásica intertemporal á la Jorgenson, con dos particularidades: se identifica al individuo con un empresario que adquiere capacidades a través de un proceso productivo doméstico y se atribuye al capital humano la condición de bien de inversión que, a diferencia del capital físico, no puede ser adquirido directamente a través del mercado. El artículo de Ben.Porath de 1967 y su posterior revisión de 1970 recogen los principales elementos de la inversión en este activo explicitados por Becker en sus trabajos de 1962 y 1964 y además se articula con el artículo de este último publicado en 1965 sobre asignación del tiempo, al posibilitar la contribución simultánea del capital humano a dos procesos productivos gracias a una utilización óptima de la dotación de tiempo disponible por período. Además, como se discute en el capítulo 4, este modelo genera tasas de retorno respecto a las que las construidas previamente por Becker de un modo más intuitivo y sin un aparato analítico tan refinado pueden considerarse un caso especial y también congruentes hasta cierto punto con las sugeridas por Mincer en sus obras de 1958 y 1962.

2. El modelo canónico de capital humano con ciclo vital que emerge a finales de los años 60 tiene una versión primal (elaborada por Becker y Ghez) y otra dual, la de Ben-Porath. Tal distinción no es posible cuando el activo real es el capital físico, ya que este se adquiere directamente en el mercado y no requiere ninguna combinación óptima de inputs para incrementar la posición en él. En la primera de ellas, el que el individuo optimiza una función de utilidad intertemporal dependiente del consumo de un bien adquirido directamente en el mercado o de un conjunto de commodities producidas a partir de inputs de mercado, sujeta a disponbilidades de renta salarial dependientes positivamente del stock de capital humano acumulado. Dicha renta debe distribuirse óptimamente entre la adquisición de los inputs a partir de los cuales se produce el capital humano -tiempo y otro factor adquirido en el mercado-, cada uno de los cuales tiene un

coste asociado -la retribución que se sacrifica y el precio del input-, así como el consumo directo. El valor sombra específico del capital humano se deriva de las posibilidades de consumo futuro ampliado a que da acceso, las cuales pueden verse ampliadas cuando su tasa de depreciación es diferente de la unidad. En el problema primal, el vector de endógenas se compone de la senda de los consumos y las demandas de inputs cuya finalidad es la producción del activo, esto es, el tiempo de trabajo -y, por derivación, el de aprendizaje- y el bien de mercado, caso de que ambos inputs coexistan en el problema. Para dar cabida a la ecuación dinámica de acumulación de capital humano en el problema primal, hay dos opciones: una, la utilizada por Becker y Ghez, consistente en la sustitución de dicha ecuación en la restricción presupuestaria-flujo del lagrangiano, y que da lugar inmediatamente a las condiciones de igualación entre costes marginales y beneficios marginales descontados propuestas por estos dos autores. En el problema dual, se maximiza la riqueza intertemporal (como flujo descontado de rentas salariales menos costes de producción del activo) respecto a la producción de capital humano la que se encuentra en el vector de endógenas, mientras que los inputs aplicados se determinan complementariamente mediante minimización de costes; de este modo es esta función de costes, calculada en una fase previa del problema, la que entra a formar parte de la función objetivo. La ventaja del primal es más clara en los casos en que no es de aplicación el Teorema de Fisher (por ejemplo, cuando el ocio está presente en la función de utilidad), en los que la maximización de la riqueza no puede realizarse independientemente de las preferencias. En la práctica, el procedimiento que resulta más operativo -y se encuentra más enraizado en la programación dinámica- es un problema primal en el que, el lugar de sustituir la ecuación de acumulación del capital humano en la restricción presupuestaria -lo que resta agilidad a la resolución- se añade tal ecuación como una restricción más del problema, lo que obliga, para que el sistema no quede indeterminado, a derivar una nueva cpo respecto a la posición en el activo que proporcione una ecuación en diferencias en el valor sombra de este; a partir de esta última no solamente puede obtenerse la condición de transversalidad habitual, sino también y mediante su manipulación, la misma igualdad entre costes marginales y beneficios marginales descontados de la inversión y la propia tasa de retorno, que de otra manera queda enmascarada. Planteado en estos términos, el modelo de ciclo vital genera un máximo en el stock de capital humano antes del final de la vida del individuo, basado en fuertes inversiones iniciales asociadas a importantes beneficios marginales descontados, así como ofertas de trabajo crecientes a medida que la acumulación del activo es más robusta y crece el coste de oportunidad de la utilización del tiempo en fines diferentes a la oferta de trabajo de mercado. La adición de otros elementos al problema, como ocio (tanto en la versión de Blinder y Weiss como en la de Heckman), o incluso de restricciones crediticias en la adquisición de ciertos inputs, no modifican sustancialmente la solución, pudiendo variar la pendiente de la acumulación durante ciertos periodos o la composición del tiempo entre trabajo y ocio en la fase final de la vida, aunque en esencia la dinámica es similar; los costes de ajuste de la inversión enriquecen la tipología de las trayectorias dinámicas, aunque para valores congruentes de los parámetros estas desembocan en perfiles similares a los descritos antes. En un contexto de teoría de la búsqueda en el mercado de trabajo, es también posible dotar de incertidumbre al problema, como hacen Bowlius y Liu (2013), de modo que, admitiendo una condición binaria de empleado y desempleado -voluntario o transitoriamente involuntario, por la destrucción del anterior puesto de trabajo-, tanto la realización de esfuerzo en la prospección del mercado de trabajo como la asignación de tiempo a la acumulación de capital humano se realizará maximizando los respectivos valores esperados de ambas condiciones y teniendo en cuenta que la llegada de ofertas laborales se articula mediante una tecnología lineal dependiente del esfuerzo desplegado.

3. El problema de inversión en capital humano tiene lugar en un contexto social determinado, de modo que este último condiciona notablemente la forma en que el primero tiene lugar. Enfocando dicho contexto en primer lugar en el seno de la familia, el propio Becker, desde inicios de los años 70, reconoció y modelizó este hecho, introduciendo una segunda rama de modelización en la que son los padres y no el individuo los que determinan la formación de este en una fase temprana de la vida; esta rama daría lugar casi 20 años más tarde a los modelos de generaciones solapadas basadas en capital humano. El modelo canónico de inversión en la siguiente generación, que cristaliza en Becker y Tomes (1979,1986) se forma mediante la combinación de una elección en cantidad-calidad de los descendientes, desarrollada por Becker y Lewis en 1973, en la que ambas variables son argumentos de las preferencias paternas y tienen un precio de mercado asociado y la teoría de la interacción social de Becker de 1974, en virtud de la que el entorno en el cual se consume una commodity constituye una variable más que determina la satisfacción que esta produce. A resultas de la fusión de estos dos enfoques, el nivel educativo de los niños constituye un factor que, además de calidad, aporta estabilidad y reconocimiento social a sus padres; en consecuencia, cobra pleno sentido la introducción de la renta de la siguiente generación en las preferencias junto al propio consumo de los padres, resolviéndose el problema de inversión como una aplicación más del Teorema de Fisher, como uno de maximización de la renta familiar conjunta -incluyendo las dos generaciones adyacentes-, con respecto a la cual se determina posteriormente el consumo de los padres. Bajo mercados de capital perfectos, la productividad marginal de la inversión de los padres se iguala al coste de obtención de los recursos en el mercado de capital en equilibrio y la renta familiar gravi-

tará a largo plazo en torno a la media de su componente estocástico. También dentro de este contexto familiar, el orden de nacimiento de los niños puede implicar diferencias en la inversión en capital humano de sus padres por diferentes factores, como restricciones crediticias que cobran una intensidad diferente en función del período de la vida, dotaciones genéticas distintas, variaciones en el precio de los inputs del activo, etc. Bagger et al. (2013) dan reconocimiento a este hecho incluyendo en las preferencias paternas no solamente el número de individuos, sino el stock de capital de cada uno de ellos, sometiéndose el problema a una restricción intertemporal por la que el gasto total actualizado en educación es menor o igual a la renta vital; el perfil de las inversiones dependerá, entre otros factores, de las elasticidades cruzadas de la utilidad marginal respecto al nivel de capital humano de los diferentes descendientes, así como a la senda esperada de los precios de los inputs, pudiendo dar lugar a trayectorias con perfiles de diferente signo. Fuera del ámbito estricto de los microfundamentos de generaciones solapadas, el matrimonio constituye otro condicionante de la formación de capital humano y puede entenderse, de hecho, como una sociedad que maximiza sus rentas a largo plazo mediante inversiones en capital humano, conforme a la visión de Becker en el *Treatise of Family*. Esta aproximación a la que se añaden restricciones de liquidez es la utilizada por Cohen-Goldner et al. (2010), construyendo una frontera de posibilidades salariales de ambos cónyuges y eligiendo un punto de equilibrio sobre la misma tal que maximice la utilidad de cualquiera de los cónyuges sujeta a un nivel de utilidad del otro; este planteamiento permite trazar un mapa de inversiones en capital humano de cada uno de los participantes en el proyecto matrimonial. Más allá de la familia, el entramado de interrelaciones sociales en torno al individuo también puede ayudar a entender la cantidad y sesgo de las inversiones en capital humano, supuesto que pueda establecerse una cierta heterogeneidad en las mismas: de hecho las relaciones de complementariedad entre capital humano y el concepto de capital social de Coleman (1988) son recíprocas. En este espíritu, Chiswick (2009) generaliza el modelo canónico dando cabida al capital humano étnico -o de uso específico dentro de una comunidad junto a otro de tipo general-, al tiempo que introduce una commodity étnica junto a una estándar en las preferencias, de modo que la inversión relativa entre ambas vendrá dictada principalmente por la RMS entre ambas commodities, así como por las productividades relativas de ambas clases de capital en las dos commodities. Las relaciones con el entorno pueden también modificar los pagos reales de la inversión en capital humano. Esta interconexión puede surgir a consecuencia de la interacción de los niños con ciertos pares, la cual a su vez se produce en atención a ciertos signos externos de riqueza que el consumo deja traslucir; en este planteamiento, sustentado por Bidner (2010) y en la medida en que la función objetivo del cabeza de familia contiene como argumentos dicho consumo, así como la inversión en capital humano de los niños-familiar y por desbordamiento externo-, se establece entre las mismas un trade-off que da sentido al problema de optimización, por cuanto que un mayor sacrificio de consumo conduce a un mayor stock de origen familiar, pero a emparejamientos más pobres en la segunda fase del juego. Variaciones similares en el modelo canónico serían también las incorporadas por Huan (2007), al introducir el capital humano de dimensión social-cooperativa en el legado de los padres, de modo que la esperanza de generación de rentas futuras depende positivamente de este debido a ciertas reglasde funcionamiento de las instituciones, al tiempo que su instilación en los niños va asociada a un coste creciente para los padres; las probabilidades de elusión de las reglas sociales o, puesto de otra manera, de no detección de la ausencia de probabilidades cooperativas, sin que esta suponga un quebranto de la renta de los descendientes jugará un papel fundamental en la decisión de educación de los progenitores. En una línea semejante, Sjödren (2000) relaciona la varianza de la renta marginal del capital humano a la proximidad de la ocupación elegida por los individuos con la ocupación de sus padres, con la consiguiente tendencia a la persistencia entre generaciones. En entornos con discriminación salarial desfavorable a la mujer, aquella afecta diferencialmente a los pagos de la inversión en capital humano respecto al hombre y, por tanto, implica una mayor probabilidad de que esta se ocupe a lo largo de su vida enteramente de la producción doméstica. En este escenario Dessy y Pallage (2009) modelizan la decisión de la mujer de contraer matrimonio -caracterizada por una transferencia inicial de recursos entre los miembros de la pareja- y trabajar residualmente en el segundo el período el tiempo que permita la crianza de sus hijos, frente al emprendimiento de una actividad empresarial con rendimientos superiores al salario de mercado para la mujer e incompatible con dicha institución. Se demuestra que la existencia de esta segunda opción eleva los rendimientos del capital humano para la mujer, al mejorar este la rentabilidad de la actividad empresarial, minora la probabilidad de nupcialidad y mejora, en cualquier caso, su poder negociador a la hora de determinar las transferencias de equilibrio que definen el contrato matrimonial.

4. El capital humano también puede acumularse en el ámbito del trabajo a través de los correspondientes procedimientos de entrenamiento (*on the job training*, OJT en adelante). Este tipo de acumulación, que en última instancia se forma en equilibrio con el concurso de la voluntad del gestor de la empresa y los trabajadores, no se beneficia en su tratamiento de una modelización estandarizada como la inversión vía escolarización, por varios factores señalados por Becker (1962). Primero, si la empresa retribuye al trabajador conforme a su productividad marginal, desaparecen los incentivos para esta del proceso de formación, por lo que hay que atribuir a esta cierto poder de mercado que le permita captar una parte del excedente futuro entre productividad acrecen-

tada y remuneración salarial. Segundo, la renta marginal de la inversión para la empresa depende también de la continuidad en la captación de parte del excedente, que está tanto menos garantizada cuanto mayor sea la sustitubilidad de la formación proporcionada con la demandada por las restantes empresas que operan en el mercado; por el contrario, cuando la adquisición de capital humano se realiza a través de escolarización el trabajador tiene la seguridad de que siempre disfrutará de las rentas que le proporcione el valor no depreciado del mismo. Estos dos condicionantes han hecho gravitar la literatura en torno a dos supuestos: i) la diferenciación entre un capital humano básico o general, que incluye capacidades que permiten el acceso a cualquier empresa y un capital humano específico, de utilidad exclusiva en el seno de la empresa que proporciona dicha formación; ii) distintas configuraciones de competencia imperfecta en los mercados de bienes y factores que permitan explicar no solo la rentabilidad estratégica de la formación específica para reducir la probabilidad de abandono por el trabajador y sus dificultades de captación por los competidores, sino que permitan justificar el reparto de un excedente conjunto, de cuya maximización habitualmente se extrae la solución óptima de inversión en el activo. Es evidente que la consideración conjunta de todos elementos permite numerosas variantes en la modelización, lo que ha constituido un obstáculo para la destilación de un modelo canónico, como en el caso de la formación por escolarización. Dentro de este abanico de situaciones, hay autores, como Jovanovic (1979), Lazear (2009), Fu (2011) y Stevens (2012), que ponen el acento en la elección del OJT por los trabajadores en un tipo de modelización basada en procesos estocásticos de llegada de ofertas laborales que, en realidad, podria considerarse un caso particular de la estructura más general de Bowlius y Liu, comentada antes, en el sentido de que se elige la inversión específica en formación en función tanto de la probabilidad de llegada de nuevas ofertas -que suelen tener un componente estocástico con distribución de Poisson- , como del grado de complementariedad entre el vector de habilidades adquirido en la empresa en la que se encuentra el individuo y el demandado en media por el mercado o del valor incremental de las ofertas futuras que lleven incorporada la posibilidad de formación. En otras palabras, se modeliza la conexión entre la adquisición del activo y su capacidad para generar renta futura introduciendo un vector más amplio de variables que en el enfoque de *schooling, algunas de* las cuales por lo demás son estocásticas; la expectativa sobre el valor de las ofertas futuras con formación, a su vez, deberá ser compatible con la maximización del beneficio empresarial. Esta es la única línea de investigación dentro del ámbito de OJT verdaderamente dinámica, en el sentido de que puede explicar decisiones de formación repetidas en el tiempo, mientras que las restantes se dirigen a modelizar una única decisión en el tiempo, debido a los cambios complejos que pueden operarse en el entorno de la empresa entre períodos. Otros trabajos, como el clásico de Acemoglu y Pischke

(1999), Stevens (1994) o Gersbach y Schmutzler (2003) se centran en la explicación de la decisión de inversión en este activo por la empresa en un entorno de competencia perfecta, bien en los mercados de factores y/o de producto, como vía de maximización del excedente empresarial sin tener en cuenta los efectos para los competidores en estructuras oligopolísticas o internalizándola en el proceso y sabiendo que el sacrificio de fondos en este uso tiene como pago el sacrificio de valor de aquellos o un incremento de sus costes, que en última instancia redunda en una pérdida de cuota de mercado. En este caso la relación entre inversión y pago se haría depender de la estructura completa de mercado y los mecanismos de formación de precios que reemplazan a los de competencia perfecta. Finalmente, otros modelos ponen el énfasis en los problemas de información imperfecta que permean los contratos laborales y, en concreto, aquellos que conciernen la tipología del trabajador en cuanto a su capacidad de aprendizaje. De esta forma, modelos como los de Katz y Zidermann (1990) o Chang y Wang (1995) endogeneizan patrones de inversión específica subóptimos desde una perspectiva de competencia perfecta, que no obstante tienen un sentido en el marco de esquemas de verificación a posteriori de las habilidades innatas del trabajador. En este caso son los pagos de la inversión en períodos posteriores los que están subordinados al pago del primer período, en la medida en que la aceptación de determinadas fórmulas remunerativas, de formación y la permanencia dentro de ellos constituyen señales a la propia empresa que proporciona la formación y al mercado entero sobre la tipología propia, por lo que se realiza un sacrificio de recursos inicial a cambio de recibir a posteriori una inversión en el activo de mayor calidad y generadora de una corriente de salarios más elevados.

5. El artículo de Robert E. Lucas *The Mechanics of Economic Development*, de 1988, marcó un antes y un después en el desarrollo de la Teoría del Capital Humano, al suponer la transposición del modelo canónico de *schooling* de Becker a un marco de crecimiento neoclásico. Basado en un trabajo previo de Uzawa de 1965 que describe el funcionamiento de una economía bisectorial, Lucas realiza las necesarias adaptaciones conceptuales en el mismo, sustituyendo fracciones de población asignadas a cada sector por fracciones de tiempo que el agente representativo transcurre en el trabajo de mercado o el doméstico y transformando el término de progreso técnico (o eficiencia) incorporada al factor trabajo por acumulación de capital humano. El modelo, que en su versión más simple contiene una dinámica tratable analíticamente -con un único estado estacionario local y globalmente estable- genera crecimiento endógeno a largo plazo en los activos reales y el consumo, que sustituye a otras fuentes externas en el mundo neoclásico como el crecimiento de la población o el progreso técnico. Al mismo tiempo, mediante la introducción de efectos externos à la Romer en la función de producción

del bien final, deja la puerta abierta tanto a estructuras dinámicas más complejas, caracterizadas por indeterminación local en el entorno del estado estacionario, cuando dichos efectos externos tienen suficiente entidad y la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo es elevada, conforme al análisis de Benhabib y Perli (1994). Pero además la divergencia entre la solución óptima y privada de equilibrio general proporciona también una base de eficiencia para la discusión de diferentes alternativas de intervención pública para estimular la inversión privada. De la misma forma que la obra de Becker y Ben Porath informó la inmensa mayoría de la literatura de equilibrio parcial posterior, la de Lucas hizo lo propio con la de equilibrio general durante las dos siguientes décadas, principalmente en dos direcciones. En la primera, se añaden variables nuevas al modelo de Lucas que, salvando las contribuciones de King y Rebelo (1988) y el propio Rebelo (1991), más orientadas a sentar las bases de la literatura de ciclos reales basada en capital humano, consistieron mayoritariamente en la adición de diferentes clases de efectos externos en cualquiera de las dos tecnologías involucradas, así como en las preferencias de los agentes, al objeto de identificar esquemas dinámicos con pluralidad de estados estacionarios e indeterminación o inestabilidad en torno a las mismas, como vía para dar cabida a la intervención pública en la reconducción de expectativas o la selección de las sendas adecuadas de transición para el sistema. En cualquier caso, este tipo de dinámicas no son exclusivas de los modelos con capital humano, si bien la existencia de una doble tecnología de producción proporciona una base paramétrica suficientemente amplia para facilitar la emergencia de este tipo de resultados. En la segunda vía, conceptualmente más interesante, se añaden motores complementarios de crecimiento endógeno al sistema que interactúan con el propio capital humano; el caso más claro es el de los modelos de cambio técnico endógeno que, arrancando del trabajo seminal de Romer (1990), añaden 1 sector más a la economía, habitualmente intensivo en capital humano, en el que se producen las innovaciones -bien en forma de patentes, o de simple incremento de la productividad multifactorial- que repercuten en la productividad del sector del bien final o de otros interpuestos de bienes intermedios; de este modo la acumulación de capital humano y la innovación de número de variedades de productos o mejora de la calidad de las existentes discurren paralelas, con relaciones de estímulo bidireccionales. Análogamente sucede con aquellos enfoques de agente representativo basados en capital social o los procesos de aprendizaje de learning-by.doing, estos últimos con origen en el propio trabajo de Lucas de 1988. El OJT, sin embargo, no es una rama que hasta el momento haya cuajado en equilibrio general, por razones que se comentarán más adelante.

6. Una segunda corriente de equilibrio general, paralela a la de Lucas y también de origen beckeriano (en este caso con un vínculo todavía más directo) es la capital hu-

mano en generaciones solapadas, introducida por Becker y Barro en 1988 a partir de la línea de trabajo del primero en equilibrio parcial que se remontaba a principios de los 70. Como señalan Jones y Manuelli (1992), la introducción de tecnologías de acumulación à la Lucas en contextos de OLG, en combinación con capital físico que se transmite entre generaciones, posibilita la generación de una renta a largo plazo suficientemente elevada como para que asintóticamente la adquisición de dicho capital físico sea posible. Azariadis y Drazen presentan un trabajo clave en 1990 donde se analiza las diferentes modalidades dinámicas a que conduce la acumulación conjunta de capital físico y humano con OLG y fertilidad exógena. Sin embargo, desde el nacimiento de esta corriente en 1988 se puso de manifiesto que los principales intereses de los autores participantes discurrían por otros derroteros distintos de los objetivos habitualmente perseguidos por los autores modelos de agentes representativos: la imbricación de fertilidad endógena y capital humano -como activos reales alternativos de los que se compone la cartera de las familias- y el estudio de las consecuencias distributivas de las decisiones paternas sobre la educación de sus hijos, gracias a la dinámica más sencilla y la utilización de supuestos de mayor contrastabilidad empírica que proporcionan los modelos OLG. Respecto al primero de estos temas, la mayor parte de las contribuciones en el campo de OLG señalan relaciones negativas entre fertilidad de equilibrio e inversión en capital humano de los descendientes, a través de distintos mecanismos de estos modelos: por ejemplo, un grado de altruismo dependiente negativamente del número de descendientes, como el utilizado por Becker y Barro en su artículo de 1988 y posteriores o la existencia de distintos costes (de tiempo o en términos del bien de consumo) asociados a la manutención y crianza de los niños, que aumentan a medida que se produce la acumulación de capital humano y generan un efecto sustitución de intensidad creciente; es más, bajo determinadas estructuras de la tecnología de acumulación, esta relación de intercambio se manifiesta en estados estacionarios con inversión en fertilidad positiva y nula en capital humano, constituyendo un tipo de trampa de pobreza. Estas proposiciones han facilitado enormemente la utilización de estos modelos para explicar fenómenos de transición demográfica en sociedades desarrolladas, caracterizados por la ocurrencia de distintos shocks que permiten rebasar un estadio inicial de trampa de pobreza y trasladar a la economía a una senda con acumulación positiva de capital humano y fertilidad decreciente. En la medida en que esta se vea acompañada de mortalidad endógena -ligada ad-hoc, dependiendo de los autores, a la renta per cápita, al capital humano, al gasto en bienes de salud, etc. de los padres- el primero de estos estadios presenta características muy similares a la dinámica malthusiana de sociedades subdesarrolladas. Al calor de estos desarrollos sobre mortalidad endógena se ha desarrollado otra rama de OLG que viene a dar continuidad a los trabajos pioneros de Grossman (1971) en Economía de la Salud y que enfatiza la complementariedad entre las dos variantes de capital humano, en sus vertientes de conocimiento o capacidades y salud. Esta se basa en una relación de complementariedad entre los bienes que reportan satisfacción al individuo y el stock de salud, bien directa -al interactuar dichas variables en la función de utilidad-, bien indirecta, al incidir el gasto sanitario sobre las probabilidades de supervivencia en las diferentes fases de la vida y, por tanto, incidir sobre las tasas de retorno esperadas de la inversión en capital humano y fertilidad. Cuando además coexisten el gasto sanitario público y el privado, puede demostrarse la complementariedad del primero respecto al segundo, en la medida en que aquel eleva la tasa de retorno las inversiones privadas al mejorar la productividad de estas en etapas avanzadas de la vida.

7. La literatura sobre capital humano ha realizado predominantemente incursiones asistemáticas y con un enfoque esencialmente empírico sobre la naturaleza de la tasa de retorno del capital humano, con la notable excepción del trabajo de Gary Becker de 1962 al que se hace alusión en el capítulo 4. Esta es una de las pocas aportaciones a la construcción de la tasa de retorno en el espíritu de los modelos de inversión neoclásicos, derivando la tasa a partir de versiones estilizadas de las corrientes de beneficios y costes marginales de la inversión en el activo. Dicha obra, sin embargo, aun siendo muy notable conceptualmente, no obtiene las tasas en el contexto de modelos de optimización dinámicos de una riqueza como los que propondrían pocos años más tarde el propio Becker y Ben-Porath, lo que hubiera llevado a varias vías de expansión en su desarrollo. Así pues, una aproximación a la anatomía de la tasa de retorno del capital humano, de un modo paralelo al que la literatura de crecimiento ha realizado para activos como el capital físico, los bienes de consumo duraderos o los activos financieros, tiene un interés no solamente teórico, sino como posible vía de enriquecimiento de los estudios empíricos de base minceriana que han sido los dominantes desde finales de los años 50.

8. El principal obstáculo para la construcción de la tasa de retorno del capital humano ha sido el hecho de que este es un activo que no pasa por el mercado y por tanto no lleva asociado un precio constante unitario. En la línea de las conclusiones de Pollack y Wachter (1977) sobre asignación de precios a las commodities de producción doméstica sobre la base de los precios de mercado de sus inputs, se determina que el enfoque típico beckeriano de producción del capital humano a partir de la utilzación de tiempo es incompatible con dicha asignación de un precio unitario, incluso si la tecnología de acumulación de este activo presenta rendimientos constantes a escala. Si se opta por una tecnología lineal en el bien final, entonces es posible asignar un precio unitario al capital humano, pero se imposibilita el cumplimiento de la condición de

transversalidad en horizontes finitos. En consecuencia, serán los costes marginales de producción del capital humano los que jueguen el papel de los precios, en la medida en que suponen igualmente detracciones a la capacidad de consumo de los agentes privados y, como tales, tienen un valor sombra. Un cociente relativo de costes marginales puede interpretarse, en este sentido, como una ganancia de capital aunque no lleve aparejada la potencial realización del activo en el mercado, al reflejar una combinación de recursos más ventajosa por el hecho de producir en el presente frente al futuro.

9. Aunque la conclusión 2) obliga a formular el problema de inversión en capital humano de manera asimétrica a la utilizada con otros inputs, la utilización de un valor sombra asociado a la acumulación de este activo y su relación con el valor sombra de la riqueza permite transformar la cpo respecto a la posición en capital humano en una igualdad entre la RMS intertemporal del consumo y la tasa de retorno del activo adquirido mediante schooling, obteniendo un resultado análogo al cosechado con otros activos con un precio de mercado asociado. La composición de la tasa se estudia en un modelo estándar de ciclo vital de 2 y T períodos. En el segundo caso, la tasa está integrada de un término de renta marginal y otro de ganancias de capital, conteniendo este último el valor en s+1, neto de depreciación y de la productividad adicional del capital humano en la acumulación futura, de la inversión marginal acometida en s, viniendo este último valorado en términos de los costes relativos de producción del activo multiplicados por el cociente de valores sombra del propio activo y de la riqueza. Dado que la literatura tradicional trabaja con 1 ó 2 inputs en la tecnología de producción de capital humano (tiempo de aprendizaje y bien final), la tasa de retorno se definirá respecto a uno u otro cuando se considere un solo input variable y la tasa respecto a cada uno de ellos deberá igualarse cuando los dos sean inputs variables y exista una solución interior en ambos. La estructura general de la tasa es común, con independencia de cuál sea el input utilizado, si bien existen particularidades en función del input. La literatura empírica que utiliza una proxy de la tasa de retorno del capital humano tiende a ignorar el término de ganancias de capital, a pesar de que en el contexto de modelos de ciclo vital es improbable la depreciación completa del capital humano período a período y la asignación de la influencia del capital humano en el proceso de acumulación a una externalidad social parece un supuesto heróico. Con 2 períodos, sin embargo, el valor sombra del capital humano se anula en el último de ellos, lo que priva a la tasa de las ganancias de capital. Esta versión, bajo ciertos supuestos, es más cercana a la empleada por la mayor parte de la literatura empírica y en particular por la de raíz minceriana, que solamente considera incrementos en la renta media del activo en sus ecuaciones.

10. La composición de la renta marginal depende del entorno en el que se deriva la tasa. Cuando esta se construye en equilibrio parcial, el trabajador, como sujeto decisor de la inversión, ve referida su renta marginal a los salarios reales por unidad de tiempo de trabajo, que para él son exógenos. Este es el enfoque más fácilmente insertable en un marco de equilibrio parcial, en el que además los tipos de interés de un activo financiero alternativo podrían ser tomados como un parámetro y el problema de optimización de las preferencias del hogar o inividuo, resuelto a partir del Teorema de Fisher. En equilibrio general, caben dos enfoques posibles. Bien se considera un marco de hogar + empresa representativa, en el que los salarios pueden relacionarse con la productividad marginal del trabajo efectivo, aunque esta última continúa siendo exógena para el hogar representativo, bien puede adoptarse un enfoque de agente representativo consumidor-productor, en el que dicha productividad marginal pasa a ser a su vez endógena. La dependencia de la tasa respecto a distintas variables, incluida su pendiente respecto a la cantidad aplicada del input, es distinta en uno y otro caso. Por otro lado, la tasa en equilibrio general adolece del mismo problema que la tasa de cualquier otro activo en equilibrio general: la imposibilidad de interpretarse al margen de las restantes ecuaciones, al resolverse todas ellas conjuntamente, siendo el vínculo de las relativas a la inversión con las referidas al consumo el tipo de interés, que ahora deviene endógeno. En este sentido y como la tasa de retorno del capital físico, la del capital humano contiene dos variables endógenas de aquellas tres a las que puede reducirse el modelo en su versión espacio-estado. Esta limitación implica que la imposibilidad de determinar con nitidez, sin recurrir al sistema completo de cpo en equilibrio general, el efecto de variaciones de determinados parámetros sobre la tasa de retorno, al incidir dicha variación simultáneamente sobre el vector completo de endógenas que también forman parte de la tasa. No obstante la determinación de estos signos frente a impactos de las variables exógenas (principalmente parámetros de productividad), aun suponiendo constantes los restantes elementos de la tasa, tiene interés para entender la naturaleza de los shocks de oferta en los ciclos reales. En este sentido se demuestra que, de un modo relativamente contraintuitivo, variaciones de la productividad de la tecnología educativa pueden tener un signo indefinido en ciertas condiciones cuando se consideran todos los componentes de la tasa de retorno. Además, la derivación de la tasa en equilibrio general en un escenario de agente representativo permite también ampliar el abanico de variables que determinan la renta marginal del activo más allá del puro salario observable en el mercado, ampliándolas al stock de capital físico y todas aquellas otras que incidieran sobre las conduciones productivas agregadas -tales como determinados inputs, como el progreso tecnológico o el capital social, o las variables definitorias de la tecnología, como elasticidades de sustitución de los inputs o rendi-

mientos de los mismos-. Ex post, dicha tasa es susceptible de evaluación empírica a partir de series de estas variables y un calibrado del sistema dinámico.

11. La distinción entre 2 períodos y un número mayor de ellas es válida sólo para un modelo estándar en el que el bienestar del individuo depende de sus propias inversiones, al maximizar estas su flujo de renta intertemporal. Sin embargo la introducción de vínculos intergeneracionales abre la puerta a la aparición de excepciones. Así, existen modelos de dos períodos que dan lugar a una tasa de retorno completa con ganancias de capital, en los que el agente se preocupa no solamente de su utilidad, sino de la su descendencia más inmediata, que son fácilmente reconvertibles en un modelo dinástico con una tasa de retorno completa. En sentido contrario, cuando el altruismo intergeneracional es parcial y se materializa en una función de utilidad que depende, directa o indirectamente, del nivel de capital humano de la generación posterior y los individuos reciben pasivamente la inversión de sus progenitores, las cpo resultantes no permiten alcanzar una tasa de retorno en el sentido financiero del término, al venir dada la renta marginal del activo por un cociente de utilidades marginales que no puede ser igualado a un cociente de precios relativos de mercado; este problema será recurrente en modelos de ciclo vital en los que el capital humano forme parte como bien de consumo duradero de las preferencias de los agentes.

12.La manipulación iterativa de la igualdad entre la tasa de retorno del activo financiero y del capital humano que debe regir para que exista una solución interior de la inversión en ambos permite definir una igualdad entre coste marginal de la inversión, diferente dependiendo del input utilizado, y la corriente de beneficios marginales que la adquisición de una unidad adicional de posición en el activo reporta, siendo una función de la tasa subjetiva de descuento y la productividad marginal del capital humano en la tecnología de acumulación el factor de actualización de los pagos; en horizontes infinitos, el cumplimiento de la condición de transversalidad del problema del consumidor garantiza que la serie de beneficios marginales esté acotada. En equilibrio parcial y con rendimientos constantes del capital humano, cuando los rendimientos en el input variable de la función educativa sean constantes, no puede garantizarse la existencia de una función continua que relacione la inversión en el período s con los inveles óptimos de inversión en períodos posteriores, por lo que la función de beneficios marginales será en general constante respecto a la cantidad de inversión. En el caso especial de rendimientos decrecientes en el input de mercado, el fenómeno de la “path dependency” de la tasa de retorno respecto al stock previo de capital humano, específico de la tasa de retorno respecto a dicho input, permitirá enlazar niveles de inversión en todo el horizonte de planificación, confiriendo a la función de beneficios marginales un carácter creciente. Dicha función se estudia ex ante, en lugar de darle un enfoque ex-post como el de Becker y Ghez en su artículo de 1975. En horizontes finitos y más de dos períodos, la solución al valor óptimo de la inversión en el input de mercado cuando este presenta rendimientos decrecientes puede ser múltiple y cuando cualquiera de los inputs está sujeto a rendimientos constantes, la solución puede no existir o ser esquina.

13. En equilibrio general puede introducirse un tercer activo, capital físico, cuya tasa de retorno se igualará cuando la solución es interior a la del activo financiero y el capital humano. En cuanto al problema de la irreversibilidad de la inversión, las características del capital físico y humano son diferentes, ya que al ser este un activo no sujeto a transacciones, las propiedades de su función de producción garantizan que su inversión bruta será siempre positiva, mientras que en horizontes finitos su valor sombra decae a 0 en el último período. En el capital físico, sin embargo, cuando el modelo es de agente representativo y el horizonte finito hay que utilizar diferentes supuestos si se quiere eludir la inclusión de una prima de iliquidez en su tasa de retorno; el más habitual suele ser una tasa de depreciación unitaria tanto para él como para el capital humano (suele ser el caso de los modelos OLG), lo que además permite obtener soluciones cerradas para las endógenas del problema.

14. En horizontes infinitos y con rendimientos constantes a escala del capital humano, los modelos de acumulación del activo se han dirigido casi exclusivamente hacia la utilización del tiempo de aprendizaje como input de aquel, al presentar una dinámica bien estudiada y, salvo externalidades severas, con propiedades adecuadas en cuando a la unicidad del estado estacionario y la estabilidad local del mismo. Las tecnologías basadas en el input de mercado han sido básicamente descartadas en este contexto -salvo que lleven aparejadas algún supuesto simplificador-, ya que aunque el problema puede resolverse mediante la utilización de técnicas de cálculo numérico -que acaban ligando el volumen óptimo de dicho input al nivel de alguno de los activos reales disponibles por período-, se da lugar a tasas de crecimiento no acotadas del capital humano y, consiguientemente, a rupturas de la condición de no transversalidad. De esta manera, no sería factible conseguir con este activo sendas estacionarias equiparables a las emergentes con el tiempo de aprendizaje, caracterizadas por un nivel constante del input y tasas de acumulación constantes del capital humano, iguales también a las de capital físico y consumo. Antes bien, el uso del input de mercado ha tendido a circunscribirse a modelos con rendimientos decrecientes del capital humano y de 2 períodos, en lo que resulta más sencillo extraer una solución cerrada y la tasa de acumulación es siempre finita. Los niveles de aplicación del input pueden llegar a ser no acota-

dos incluso con rendimientos decrecientes de todos los inputs que intervienen tanto en la tecnología de producción del bien final como del capital humano.

15. Los rendimientos constantes a escala en el input variable de capital humano -que pueden venir acompañados de rendimientos constantes en el capital humano o no- pueden dar lugar a trampas de pobreza, o sendas estacionarias con inversión nula en el activo y, a largo plazo, estabilización en niveles de todas las variables; un buen ejemplo es el modelo de Lucas, en el que la tasa de retorno estacionaria del capital humano respecto al tiempo depende exclusivamente de la productividad del aprendizaje, cuya relación con la tasa de descuento intertemporal determinará la existencia de inversión bruta positiva. La imposición de restricciones paramétricas para descartar este tipo de sendas es común en la literatura de crecimiento, aunque su búsqueda es un objetivo primordial de la de desigualdad. En el trabajo se identifican varias de estas situaciones, tanto con rendimientos constantes como crecientes del capital humano, y se presentan las restricciones necesarias para evitar estas sendas, aunque en ocasiones ello puede implicar privar al sistema de una senda estacionaria. Queda patente también en este análisis la importancia de la correcta definición de la tasa de retorno del capita humano para extraer las condiciones que permiten evitar la senda con estancamiento a largo plazo.

16. Bajo rendimientos constantes a escala en el capital humano, la tasa de retorno respecto al tiempo de aprendizaje no está afectada por "path dependency" respecto a la posición en el activo, aunque esta propiedad se pierde en modelos de agente representativo y rendimientos decrecientes en capital humano. La convergencia de rentas, sin embargo, no está completamente garantizada en este último caso cuando la tasa se deriva para más de dos períodos, ya que es necesario imponer restricciones paramétricas para que la derivada parcial de la tasa respecto al capital humano sea negativa. En cualquier caso estas condiciones son las mismas que hay que exigir para que la pendiente de la tasa respecto al tiempo sea negativa y que, en definitiva, permiten excluir problemas de estabilidad del equilibrio y soluciones múltiples. No obstante, cuando se restaura la simetría en la utilización del capital físico en los dos sectores productivos de la economía -en la línea de Rebelo (1991), la tasa de retorno del tiempo deja de manifestar esta propiedad, al expresarse esta en función de las dos ratios sectoriales de capital físico sobre capital humano y el propio tiempo consagrado a la educación. Por lo demás, se derivan las tasas estacionarias respecto al tiempo en dos circunstancias: con tasas de depreciación unitarias en tiempo finito, en cuyo caso el estado estacionario, interior, es estable, y asintóticamente cuando la tasa de depreciación es nula. Cuando la productividad marginal del tiempo de aprendizaje sea positiva cuando este

tiende a 0 y la tasa de depreciación unitaria puede surgir una trampa de pobreza aunque los rendimientos a escala del tiempo de aprendizaje sean decrecientes, mientras que con tasa de depreciación nula esta solo será posible si el stock de capital humano inicial es nulo.

17. La utilización de rendimientos crecientes en el capital humano no implica necesariamente la convexidad de la función de acumulación, que podría impedir la maximización de las preferencias al quebrar la condición suficiente del Teorema de Kuhn-Tucker. En este sentido se propone una tecnología cóncava respecto al capital humano pero con rendimientos crecientes que satisface las propiedades estudiadas por Azariadis y Drazen (1990) y se derivan en ella las tasas de retorno, tanto en equilibrio general ordinario como en los dos posibles estacionarios, el esquina y el interior cuando la tasa de depreciación del activo es unitaria y los correspondientes cuando esta se anula, caso no estudiado por los dos autores mencionados. Si los rendimientos crecientes provienen del input tiempo -combinándose con constantes en capital humano-, el programa retiene una concavidad suficiente tal que satisface el teorema de Arrow y la metodología Kuhn-Tucker es aplicable para la resolución del programa de optimización. En tal caso, sin embargo, se demuestra que en ciertos tramos la tasa de retorno estacionaria es creciente respecto al tiempo, lo que puede generar equilibrios múltiples, algunos de los cuales serían inestables.

18. El capital humano puede encontrarse también dentro de la literatura de impronta más beckeriana dentro de la función de utilidad, situación especialmente frecuente dentro de los modelos de economía de la salud. La forma en que esta inserción se produce, sin embargo, es muy variada. La que posibilita en mayor medida la obtención de una tasa de retorno análoga a la definida antes es cuando existe una simetría total en el modo en que el capital humano afecta a la productividad del tiempo destinado a la producción de mercado y a la doméstica de commodities: en tal caso, a la renta marginal del activo dentro de la tasa se añade un término equivalente a la valoración marginal del ocio respecto al bien de consumo, que se plasma en el precio relativo de ambos bienes. Pero también el capital humano puede introducirse no como input indirecto de una commodity, sino como bien en sí mismo, en línea con la literatura sobre bienes de consumo duraderos, la mayor parte de cuyas características comparte. Cuando este sucede, se propone una reformulación del problema de acumulación en la que el disfrute de este activo genera un alquiler imputado, al tiempo que se explicita como uno de sus posibles usos su alquiler a través del mercado. La tasa de retorno obtenida de esta manera resulta formalmente similar a la de un bien de consumo duradero y, al mismo tiempo, preserva las características esenciales del capital humano. Cuando es el flujo

de producción del capital humano el que genera los servicios propios de un *durable,* se propone una solución análoga a la anterior, con dos mercados, uno en el que se alquila el stock y otro las adiciones a la misma, derivándose una tasa *cum dividendo* inducida por el hecho de que las rentas del activo son apropiables en el mismo período en que se realiza la inversión. Esta formulación de la tasa es también común en un núcleo de modelizadores de bienes de consumo duradero. Sin embargo, la solución teórica propuesta en este último escenario exige supuestos de realismo discutible, por lo que la aplicablidad de los resultados es mayor cuando los servicios del capital humano que generan satisfacción proceden del conjunto de su stock.

19. La construcción de la tasa de retorno con rendimientos constantes del capital humano se extiende también a otras economías en las que se acumulan tres activos reales simultáneamente: capital físico, capital humano y un tercer activo cuyos rendimientos se encuentran directamente imbricados con los del último, a saber, capital social, progreso técnico, salud y capital específico empresarial. La construcción de los problemas de acumulación a partir del modelo canónico utilizado pone de relieve la procedencia de todas estas teorías de un tronco común, así como la existencia de variables adicionales que pasan a formar parte de la tasa del activo, como la productividad de este en la construcción de capital social o el nivel de desarrollo tecnológico. En el caso de la cualificación específica en el seno de la empresa, que se complementa con decisiones sobre adquisición de formación básica, y teniendo en cuenta que en puridad son los gestores de esta las que adoptan las decisiones de acumulación y deben considerarse los propietarios del stock, la formulación de la tasa de retorno exige la asunción de determinados supuestos sobre la estructura del mercado en que desenvuelve aquella que hacen difícil la interpretación del resultado en un verdadero marco de equilibrio general. En cualquier caso, se propone una tasa eficiente que maximiza el excedente conjunto de un trabajador y una empresa representativa, con costes de formación implícitos en la utilización del tiempo en fines diferentes a la producción, frente a la corriente principal de la literatura, que considera costes estrictamente monetarios del proceso de formación sintetizados en una función creciente y convexa; esta formulación evita la endogeneización de la formación de salarios en entornos de poder de mercado de la empresa representativa. La tasa de retorno derivada bajo estos supuestos precisa de un horizonte de 2 períodos (la extensión habitual de los problemas de OJT formulados en un marco dinámico, los menos) y tasa de depreciación unitaria para presentar una pendiente inequívocamente negativa respecto al tiempo de formación en el seno de la empresa. Los resultados son congruentes con los obtenidos por Mincer (1974) mediante una estrategia puramente empírica, si bien cualifican el resultado de este último autor con una serie de variables

adicionales relacionadas con la tecnología de la empresa o, pudieran añadirse fácilmente al modelo, probabilidades relacionadas con el abandono de la empresa por el trabajador a consecuencia del mix de formación adquirida, en la línea de Hashimoto (1981) y los autores de OJT de tendencia beckeriana de comienzos de los 80.

20. La introducción de efectos externos en cualquiera de las tecnologías, con independencia del tipo de rendimientos sociales que estos produzcan, hace inevitable la diferenciación entre la tasa de retorno privada y social, entendiendo por esta última la realizada mediante una internalización completa de dichos efectos. Para reconstruir esta última, se intenta hacer operativa en el marco del modelo canónico utilizado la definición de efecto externo de Acemoglu y Angrist (2001), de impronta esencialmente empírica, que se refiere a la diferencia entre el incremento de salarios medios operado en un ámbito geográfico a consecuencia de un incremento de la proporción de trabajadores cualificados y el retorno privado de dicha mejora de formación. Moretti (2004) proporciona una versión estática de dicha tasa en un entorno tecnológico de complementariedad entre trabajadores cualificados y no cualificados y en el presente trabajo se propone una dinamización del modelo de Moretti, haciendo uso de una función de probabilidad de adquisición de formación como la empleada por Cremer, Gahvari y Pestiau (2011). Por otra parte, para dinamizar el resultado en el marco más apropiado, un OLG, se recurre a una estructura de contratos intergeneracionales a la Ehrlich y Lui (1991) que permite excepcionalmente obtener una tasa de retorno en este ámbito. El resultado arroja una tasa social que difiere de la privada en varios aspectos. En primer lugar, la renta marginal del activo internaliza las consecuencias de un aumento esperado en la proporción de trabajadores cualificados sobre el conjunto de la producción -y no sobre los salarios, en la medida en que el impacto sobre estos constituye una mera redistribución desde el punto de vista de la restricción de recursos del conjunto de la economía-, pero también sobre la demanda, con un efecto composición asociado a la variación en la proporción de trabajadores. Por otra parte, el diferente horizonte temporal del problema del PB y los agentes privados lleva al primero a considerar las probabilidades incrementales de lograr una transmisión más eficaz de la educación en períodos futuros, al ser la probabilidad de adquisición de formación sensible a la condición de los padres. Todos estos elementos están ausentes en el análisis de Moretti y el resto de los autores que analizan estáticamente la tasa social y, con independencia de la facilidad con que puedan cuantificarse, ponen de manifiesto los errores a que puede llevar la estimación de la tasa fuera de un modelo dinámico.

21. Uno de los campos donde la teoría del capital humano ha sido aplicada con mayor profusión durante las dos últimas décadas ha sido en el estudio de la desigualdad en

la distribución de la renta y la movilidad, tanto intergeneracional como social. Desde los primeros escritos de Becker (1966, 1967), esta teoría se entendió también como explicativa de la distribución de la renta, en la medida en que la adquisición personal de capital humano, como fenómeno de inversión, está condicionado en su nivel de equilibrio por distintas variables de demanda y oferta de fondos. Por el lado de la demanda, las habilidades del individuo o su dotación inicial del activo serían un factor primordial, mientras que por la oferta la disponibilidad de crédito sería el determinante principal, que permite suavizar las consecuencias de la disparidad en la riqueza entre familias, en la línea de Becker y Tomes (1979, 1986). En ausencia de imperfecciones en los mercados de crédito y cuando las tecnologías de producción son convexas, los modelos OLG revelan que la movilidad intergeneracional es continua hasta que se alcanza el estado estacionario. Una vez este es alcanzado, la tipología de rendimientos determina si esta continúa -con rendimientos constantes del capital humano- o se detiene -rendimientos decrecientes y algunos casos de rendimientos crecientes-. Si existe heterogeneidad de habilidades entre los agentes, la magnitud de la movilidad social -en el sentido de convergencia entre sus niveles de capital humano- estará supeditada a las diferencias de estatus de partida, a los rendimientos y a la tasa de depreciación, aunque en general en estado estacionario hay numerosas situaciones en que la convergencia no se producirá. Respecto a la eficiencia social de estas situaciones, depende en gran medida de cómo se articule la función de preferencias del planificador, aunque bajo ciertas condiciones puede existir ineficiencia al dejar de igualarse las relaciones marginales de sustitución intertemporal del consumo.

22. Dejando aparte las diferencias innatas entre individuos, las fricciones en los mercados de crédito se configuran por tanto como una primer variable susceptible de magnificar las diferencias de renta entre los individuos. Berham (1995) demuestra que, cuando la educación debe financiarse durante el primer período de vida mediante préstamos de los padres, pueden surgir equilibrios estacionarios con trampas de pobreza. Otros autores matizan estas conclusiones, identificando algunas condiciones bajo las cuales al menos tendría lugar movilidad intergeneracional, incluso aunque la convergencia entre individuos heterogéneos estuviera acotada: en esta línea, Ehrlich y Kim (2007) proponen los peer effects o efectos de entorno en la acumulación de capital humano que beneficiaran a los individuos con menor cualificación. Owen y Weil (1998) modelizan en paralelo la adquisición de educación y la eficiencia en el trabajo, siguiendo esta última una distribución estocástica; la conjunción de estas características puede llegar a explicar movilidad social bidireccional en estado estacionario y a una conclusión similar, mutatis mutandis, llegan Hassler y Rodríguez Mora (2000) en un modelo con distinción binaria entre empresarios y trabajadores en el que la movili-

dad del primer al segundo grupo puede ser especialmente fluida en presencia de shocks tecnológicos con una varianza elevada, que dificultan la eficacia de la transmisión intergeneracional de conocimientos entre miembros de la clase empresarial. En definitiva, la severidad de la falta de movilidad social impuesta por las restricciones de crédito depende notablemente de los supuestos de los modelos utilizados y, cuando estos son suficientemente realistas, debería reflejar componentes estacionarios hacia arriba y hacia abajo. Por otro lado, partir de restricciones de crédito omnipresentes a largo plazo parece un supuesto demasiado exigente para explicar la persistencia de la desigualdad.

23. En vista de estas limitaciones de las fricciones crediticias como hilo explicativo de los fenómenos de "histéresis" de la pobreza, otros autores han optado por recurrir a la relajación de determinados supuestos tecnológicos (entendida esta palabra en un sentido amplio, afectando tanto a la producción como a las preferencias) para explicar la emergencia de trampas de pobreza diferentes a las explicadas por los fenómenos de transición demográfica; estas peculiaridades pueden combinarse o con restricciones en el mercado de crédito. Es el caso del trabajo del Galor y Zeira (1993), con costes fijos en el mercado de crédito que se imponen como vía de maximización de la probabilidad de repago en un contexto de incertidumbre sobre la tasa de retorno en este instrumento; dicho coste castiga en términos relativos en mayor medida a las familias de menores recursos. Moav y Neeman (2012) recurren al efecto demostración de estatus en las preferencias, que lleva a las familias con menores recursos a gastar una menor proporción de su renta disponible en educación. Mokherjee y Ray (2003) utilizan las externalidades pecuniarias en la elección de alternativas mapas dentro de un conjunto con un número finito de alternativas, cada una asociada a una inversión en capital humano; las externalidades se manifiestan en la dependencia de la rentabilidad de las elecciones profesionales pasadas del mapa de elecciones pasadas y, unido este hecho a la concavidad de la función de utilidad, determina la ausencia de movilidad entre alternativas profesionales en estado estacionario. Moav (2005), en un modelo de fertilidad endógena, señala apunta a la existencia de costes fijos en la crianza de los niños, unidos a la presencia de un factor laboral -profesores- retribuido a salarios de mercado como el factor principal que explica la existencia de equilibrios esquina en las familias de bajos ingresos, preservándose la estructura dual de estados estacionarios incluso en presencia de progreso técnico. Galor y Tsiddon (1997) hacen depender la eficiencia del trabajo que un individuo puede aportar en un sector tanto de su dotación como de su experiencia previa en el mismo, en un contexto de innovación tecnológica constante, que hace la inversión en capital humano más rentable en los sectores donde tiene lugar, y dotaciones de habilidad aleatorias; la esto-

casticidad de estas últimas hace posible que en estado estacionario exista una movilidad social en dos direcciones aunque, dado un tamaño constante de dotación entre padres e hijos, será más difícil para aquellas familias vinculadas a las tecnologías más antiguas pasar a trabajar en las nuevas, al ser menor su eficiencia en el trabajo y, consiguientemente, el retorno de su inversión en capital humano. En cualquiera de estos casos, no puede hablarse sino de teorías fragmentadas sobre la aparición de equilibrios sin inversión en capital humano o con un nivel en el que la restricción mínima es vinculante; además, el apoyo empírico de estas es relativamente reducido y circunscrito a países y períodos concretos, en los que predominantemente confluyen otros factores ligados a un escaso nivel de desarrollo económico e institucional que pueden distorsionar los resultados mediante la omisión de variables relevantes en los modelos econométricos de contraste. Es muy discutible, pues, que exista un modelo basado en la acumulación de capital humano de la generalidad y la solidez conceptual del de Becker para explicar la persistencia endógena en la desigualdad de la distribución de la renta. Dicho de otra manera, a largo plazo parecen ser las características innatas de los individuos, así como sus diferentes tasas de descuento temporal, los factores predominantes en la explicación de la desigualdad de los niveles de capital humano, junto, por el lado de la oferta, a los factores institucionales que condicionan la calidad y cantidad de educación recibida, tanto en los sistemas públicos como privados; por el contrario, los factores relacionados con las fricciones en el mercado de crédito podrían haber reducido su importancia -o en todo caso, haberla confinado a corto plazo- en un entorno de política económica en el que las intervenciones públicas en este ámbito para paliar posibles restricciones de acceso a crédito se han multiplicado en las últimas décadas. Esta consideración justifica el análisis de las posibilidades y los condicionantes de la eficacia de las políticas de intervención pública para corregir estas situaciones. Dichas políticas de intervención, en cualquier caso, pueden considerarse como concebidas para mejorar la respuesta de la oferta, por cuanto que se orientan a corregir determinadas distorsiones de los mercados, sin perjuicio de que su vehículo de instrumentación sea el presupuesto público. Todo ello sin perjuicio de que, en tanto que resulten eficaces en el fomento de la inversión en capital humano, generen también efectos expansivos de demanda.

24. Un primer instrumento que opera en esta dirección es el crédito público a la educación, para cuya evaluación se parte de diversos trabajos de Lochner y Monge-Naranjo basados en modelos-tipo OLG con restricciones de crédito. La utilización de este instrumento, tanto en exclusiva como acompañando al crédito privado, no está exento de problemas. Uno de los principales es eficiencia y tiene como detonante último la exigencia, posiblemente muy justificada, de que la integridad del capital del

crédito se emplee para la financiación de educación. Así, para los estudiantes con mayores habilidades esto implicará una mayor inversión efectiva en el activo, ya que la restricción de crédito es vinculante para ellos. Para los individuos con una predisposición inferior al aprendizaje, sin embargo, se reducen las posibilidades de suavización del consumo en la medida en que el crédito público sustituya al privado. Cuando el crédito público se complementa con el privado, sin embargo, el impacto positivo sobre los estudiantes de mayor cualificación se redobla, dada la naturaleza endógena de los límites sobre este. La instrumentación del crédito público y la asunción de riesgos financieros en entornos de información imperfecta sobre las habilidades de los agentes puede constituir, sin embargo, una limitación del instrumento, si bien estos pueden paliarse mediante incentivos adecuados en su utilización.

25. Otro instrumento típico de fomento de la educación son las subvenciones ligadas al gasto educativo, financiadas con impuestos que introduzcan o no distorsiones en las elecciones de los agentes. En torno a estas, se analizan dos cuestiones: i) si son necesarias, desde la óptica de la eficiencia, en marcos competitivos sin fricciones en el funcionamiento de los mercados de crédito; ii) su instrumentación óptima en entornos de restricción de crédito, como política alternativa a la provisión de crédito público a la educación. Respecto a la primera pregunta las visiones son variadas. Así, Boldrin y Montes (2005) demuestran que un marco OLG sin altruismo intergeneracional pero con mercado de crédito que financie la educación de los individuos en su juventud satisface la condición de Cass, que liga la productividad marginal del capital -en unidades de eficiencia- con la tasa de crecimiento de la economía. En ausencia de dicho marco, sus condiciones pueden replicarse mediante un impuesto lump-sum que satisfacen los adultos y financia la educación de los jóvenes, en combinación con un sistema de pensiones PAYG que capitaliza en la vejez el impuesto devengado en la etapa adulta y supone un reembolso-sombra de la transferencia efectuada por la generación beneficiada por la inversión en educación. Sin embargo, esta conclusión no es robusta al criterio de eficiencia social empleado: López-García y Del Rey (2013) concluyen, bajo una regla de oro modificada (con consumos en la función de utilidad del agente representativo definidos en unidades de eficiencia) que el criterio delimitado por Boldrin y Montes no es una condición suficiente para la optimalidad social de los procesos de acumulación de capital humano realizados en el contexto de un mercado de capitales perfecto; es más, cuando dicha optimalidad no existe, la política óptima consistiría en el gravamen a la inversión en educación, al encontrarse costes marginales sociales no internalizados en las cpo de los agentes privados. Otras proxys de los mercados de capital, como las transferencias integeneracionales educativas o los legados financieros en un sentido amplio, también presentan ineficiencias sociales de distinto tipo. En

cuanto a las primeras, incluso aunque las preferencias presenten altruismo intergeneracional la solución es distinta a la del planificador, por articularse los respectivos problemas en horizontes temporales diferentes (2 e infinitos períodos, respectivamente). En lo concerniente a las segundas, la restricción que pesa sobre el signo de los legados implica, como demuestra Caballero (1995), una sobre-inversión en capital físico acompañada de una sub-inversión en capital humano, en comparación con la solución del planificador basada en un problema en el que la inversión en la educación de la descendencia puede financiarse mediante préstamos de hijos a padres. En consecuencia, sea cual sea la intensidad de las restricciones de crédito los argumentos favorables a la utilización de subvenciones a la educación basados en consideraciones de eficiencia existen.

26. La mayor parte de los autores que estudian las subvenciones educativas han enfocado sus trabajos, no obstante, al ámbito de restricciones crediticias y, aquellos que lo han hecho desde una perspectiva intertemporal, han puesto el acento en su relación con los instrumentos de financiación de dichas subvenciones. Comenzando por aquellos enfoques centrados en la financiación vía impuestos, para restricciones de crédito son exógenas se estudian en profundidad los resultados sobre imposición óptima sobre las rentas del trabajo con agentes heterogéneos de Jacobs (2002), que partiendo de una ecuación de presupuesto equilibrado para el gobierno (con impuestos financiando subvenciones educativas y gasto corriente) deriva el tipo que optimiza el bienestar social. En general este será decreciente respecto a las distorsiones que origine (aproximadas por la elasticidad salarial de la oferta de trabajo), aunque creciente respecto al sesgo redistributivo de las preferencias sociales y la pérdida en bienestar originada por las restricciones de crédito. Las distorsiones son, por tanto inevitables salvo que la oferta de trabajo sea perfectamente elástica y estas se encuentran inducidas principalmente por el grado de subjetividad del planificador, manifestado en el valor sombra social de los incrementos en el capital humano de los individuos con menor productividad en el aprendizaje. Cuando las restricciones crediticias se hacen endógenas, en el sentido de que los bancos exigen la colateralización de los créditos educativos -segmentando los agentes en aquellos con predisposición al pago o carencia de esta e invirtiendo los últimos en menor medida en educación-, Yan (2010) muestra que el tipo impositivo óptimo es determinado por un conjunto más amplio de variables, dado que el techo crediticio es sensible al tipo impositivo y la cuantía de las subvenciones educativas en cada período de vida: la razón es que las variaciones en la renta disponible producidas por los instrumentos fiscales no afectan a la cuantía del colateral, por lo que las primeras pueden reforzar los incentivos al pago de los créditos o, por el contrario, crear problemas de riesgo moral. En estas condiciones, el signo

positivo del tipo impsitivo no está garantizado y, de cobrar más peso los problemas de incentivos, el esquema óptimo pudiera llegar a ser un impuesto lump-sum negativo y una transferencia proporcional sobre la renta laboral. Finalmente, la rama de la literatura que amplía los instrumentos de financiación de los subsidios educativos a la deuda pública pone de manifiesto la importancia de la contribución de estos a la sostenibilidad a medio plazo; en la medida en que estos sean sensibles a la variación de la deuda pública sobre el PIB, la magnitud de dicha elasticidad determinará en qué medida la política fiscal de sostenimiento del gasto privado en educación fomenta el crecimiento sostenido a largo plazo o, por el contrario, lo hace más volátil y provoca ciclos exógenos con fases de bajo crecimiento.

27. Las subvenciones educativas como instrumento de corrección de distorsiones se encuentran frecuentemente limitadas por la falta de información sobre las tipologías de los individuos y sus funciones de comportamiento, por lo que presentan el riesgo acarrear su financiación distorsiones importantes y generar incentivos adversos. En este contexto cobra importancia la producción directa de servicios educativos por el gobierno. Los modelos OLG de Glomm y Ravikumar (1992) y las sucesivas contribuciones de Durlauf y Benabou sobre estratificación con efectos de entorno (peer effects) a lo largo de los 90 sientan, de un modo complementario, las bases comparativas de los regímenes público y privado a crecimiento constante de la población (entendiendo por el primero uno en el que existe producción pública de los servicios educativos). Con agentes heterogéneos y cuando la desigualdad entre ellos viene dada por diferencias en los niveles de capital humano originales (o en los niveles medios de las distintos distritos, en terminología de estratificación) la dispersión en el capital humano tiende a eliminarse asintóticamente en el régimen privado con rendimientos decrecientes en la tecnología de acumulación, si bien a corto plazo la tasa de acumulación es superior en el sistema de educación pública. Con rendimientos constantes[244], sin embargo, la situación es más ambigua: el crecimiento inicial puede ser mayor en cualquiera de los regímenes, dependiendo de distintas condiciones paramétricas, pero si lo es en el de educación pública, la convergencia en el tiempo que los peer effects proporcionan está acotada, y el nivel de capital humano y renta per cápita siempre será mayor en este último; la situación contraria, sin embargo, también es posible. Cuando además se producen impactos estocásticos sobre las productividades en la función de aprendizaje, estos se acumulan y tienden a incrementar el gap a largo plazo en el capital humano en ambos sistemas. De este análisis comparativo se de-

[244] Con rendimientos crecientes en el capital humano las diferencias de partida entre individuos se incrementan con el tiempo: este es una predicción en la que coinciden todos estos modelos.

sprende que cuanto más sistemáticas sean las diferencias en la productividad de los agentes, en un mundo de rendimientos constantes a escala existirá una fundamentación tanto más sólida para la producción pública: este es el entorno que se describe en el capítulo 6. Con fertilidad endógena y heterogeneidad en el nivel de capital humano de los agentes, De la Croix y Doepke (2004) encuentran que, mientras el sistema privado puede o no generar un estado estacionario en el que se igualen las posiciones en el activo entre agentes, el sistema público -entendiendo por tal un nivel de provisión constante de servicios educativos- genera siempre una senda de este tipo, aunque a costa de un menor crecimiento a largo plazo, al no internalizar los agentes las consecuencias de la fertilidad sobre el coste para el gobierno de provisión de la educación y redundar esta situación en un menor gasto educativo por individuo. En un marco similar, la adición de restricciones al comportamiento de los individuos menos cualificados implica potenciar los atractivos del sistema educativo público; en esta línea, Fanz y Zhang (2013) encuentran que, cuando los trabajadores menos cualificados dedican a la educación de los niños solamente un mínimo de tiempo dado por una restricción exógena, el sistema público puede llegar a generar una tasa de crecimiento mayor que el privado a largo plazo, tanto por el aumento de la proporción de trabajadores cualificados en este horizonte como por el incremento de inversión educativa efectiva de los no cualificados.

28. Al margen de estos efectos teóricos, las actuaciones públicas en materia educativa presentan algunos condicionantes generales en cuanto a su eficacia. En primer lugar, la posible escasez de financiación o la regresividad del gasto cuando la primera es producto de decisiones endógenas de los agentes, manifestadas a través de procesos de votación. En este contexto la mayor parte de los modelos subrayan la importancia del votante mediano en la determinación del resultado, quien confrontará beneficios marginales de un tipo elevado, entre los cuales pueden encontrarse efectos externos positivos, como en Perotti (1993), y costes marginales dados por la pérdida de consumo a corto plazo; de esta manera, la convergencia en nivel de capital humano y rentas hacia la del votante mediano dependerá de la existencia de una solución interior al tipo impositivo y, la velocidad de dicha convergencia, de la cuantía de gasto que pueda ser financiado. Cuando el gasto educativo es excluible, como sucede con las subvenciones educativas si en su distribución priman criterios de eficacia, Fernández y Rogerson (1995) demuestran que pueden existir varios tipos de equilibrio en la distribución del gasto, entre ellos uno de tipo expoliatorio, en el que los individuos menos cualificados paguen los mismos impuestos que el resto y no reciban ninguna subvención. En general la fracción de individuos asociados a cada nivel de cualificación, la distribución de rentas entre ellos y los criterios de utilización del gasto

educativo serán esenciales para alcanzar uno u otro resultado, pero existirá un amplio margen entre el óptimo social y los resultados de un proceso complejo de interacción política y económica entre grupos de individuos con intereses y posiciones económicas muy distintas. La interacción con otros instrumentos del presupuesto destinados al fomento de variables interrelacionadas con la inversión en capital humano es otro condicionante a tener muy en cuenta en equilibrio general. Por ejemplo, este es el caso de posibles relaciones de trade-off entre los tipos impositivos sobre las rentas del trabajo y las cotizaciones a las seguridad social estudiado por Glomm y Kaganovich (2003), siendo el nexo entre ambas en un modelo OLG el ahorro en la fase adulta, o las subvenciones a la natalidad y a la educación, cuya interacción produce efectos externos diferentes dependiendo de la cualificación del grupo a que estas últimas vayan dirigidas, cuando las probabilidades de transmisión de la educación son heterogéneas y función de la tipología familiar.

29. Otro problema con que se enfrenta más específicamente la provisión pública de educación es su coexistencia con las preferencias privadas, en la medida en que un régimen de producción pública pura puede resultar enormemente restrictivo para las familias, especialmente en contextos de preferencias heterogéneas. Además, las posibilidades de compatibilizar un sistema público con uno privado son reducidas, dadas las fuertes indivisibilidades que genera el primero, mientras que cuando se permite elegir a los individuos entre un régimen completamente público y uno privado y al mismo tiempo la financiación del primero es endógena, lo más probable es que esta se vea tanto más reducida cuanto mayor sea el segmento de familias que preferirían una educación privada. Este el argumento clásico de Pelzman (1973) que Boldrin (2005) formaliza en un marco dinámico con capital humano. En este contexto se articula el debate sobre los efectos de sistemas mixtos de provisión pública, como los cupones, propuestos por Friedman (1962), como vía para garantizar un mínimo de inversión en educación para todas las familias y, al mismo tiempo, fomentar la competencia en el mercado privado de educación, con el consiguiente aumento de la calidad y una satisfacción más plena de las preferencias privadas. En el mismo trabajo Boldrin (2005) demuestra que, cuando las preferencias privadas contienen un cierto grado de altruismo, la aportación privada complementaria al cupón presenta un cierto grado de sustituibilidad con el mismo, que refleja la tensión entre el componente egoísta y altruista en las preferencias; de hecho, en cuanto el tamaño de los cupones (y, por ende, del tipo impositivo) excede un umbral determinado, las aportaciones privadas se hacen nulas. En cuanto a las preferencias privadas por el tipo impositivo, este será positivo cuando la eficiencia en la gestión de la recaudación y la participación del capital humano en la renta sean, respectivamente, relativamente elevada y reducida. A

este respecto, Azarnert (2010) demuestra, en un modelo OLG similar al de Boldrin pero con fertilidad endógena, que el grado de sustituibilidad de los cupones con el gasto educativo privado se acentúa a medida que crece el capital humano de los padres, por lo que en sociedades desarrolladas el destino ideal del gasto público sería más bien la mejora de la tecnología educativa, antes que la provisión de los servicios, si bien la heterogeneidad de los niveles de capital humano dentro de sociedades desarrolladas puede hacer matizar hasta cierto punto estas conclusiones. Sentado este funcionamiento general, durante los últimos 15 años se han publicado multitud de trabajos en el que se evalúa el sistema de cupones frente al privado y público desde distintos puntos de vista. Por citar algunos de los más notables, Cardak (2001,2005) lo hace desde la perspectiva de una envolvente de gasto exógeno que financia tanto un sistema mixto con cupones como uno estrictamente público, entre los que los individuos pueden optar: de esta forma, se producen dos efectos sobre el crecimiento de la economía, que pueden llegar a tener un signo opuesto: uno positivo, sobre la acumulación de los que abandonan el sistema público y otro potencialmente negativo, para los que permanecen en él si el gasto educativo per cápita disminute; así, todas aquellas variables que determinen la velocidad de salida del sistema público serán las determinantes del impacto neto de la introducción de los cupones. Preston (2003) realiza una contribución sustancial al introducir en la comparación de los 3 sistemas heterogeneidad en el componente de altruismo de las preferencias, así como ocio en la función de la utilidad, con una demanda óptima de este bien decreciente cuanto menor es el grado de intervención, con el consiguiente impacto más beneficioso sobre el crecimiento en sistemas con mayor peso de las decisiones privadas. Por el contrario, la heterogeneidad del altruismo hace más probable el incremento de la desigualdad en un sistema de cupones respecto al público puro: mientras en este último los stocks convergen, en el primero en el mejor de los casos la desigualdad está acotada con rendimientos decrecientes, si bien con rendimientos constantes aumentará entre aquellos que realizan aportaciones privadas (con su parámetro de altruismo mayor que un cierto *trigger)* y los que gastan solamente el importe de los cupones. Finalmente, la contribución de Caucutt (2002, 2004), microfundamentada por el trabajo de Epple y Romano de 1998, sobre efectos del régimen de cupones con peer effects es tambien muy relevante. De acuerdo con la contribución de la primera, la combinatoria de alumnos dentro de un sistema privado a que dan lugar los peer effects benefician especialmente a los hijos de familias pobres con elevada cualificación, en la medida en que el mercado pone un precio a su influencia positiva sobre otros individuos, especialmente ricos no cualificados. En este sentido, el paso de un sistema público a otro de cupones beneficiaría, desde un punto de vista distributivo, no solamente a los ricos más cualificados, que tenderían a agruparse entre sí formando escuelas de élite, sino a los pobres cualificados, que recibirían rentas por el mencionado canal de las que no disfrutaban en un sistema público; por el contrario, perjudicaría especialmente a los pobres no cualificados, aunque el incremento neto de la desigualdad quedaría tanto más acotado cuanto mayor fuera el tamaño del cupón. Este aumento de la desigualdad con cupones podría estar subestimado si el mix de alumnos en la escuela pública tras la puesta en funcionamiento de aquellos queda sesgado hacia los individuos pobres de baja cualificación y la productividad de la escuela pública fuera endógena al mismo; como demuestra MacMillan (2005), en este contexto la calidad relativa de la escuela pública y la privada se deterioraría más, resultado que en realidad refuerza la conveniencia de elevar al máximo el tamaño de los cupones. Como alternativa a esta solución, Epple (2008) sugiere un tamaño del cupón óptimo que eliminaría los problemas de desigualdad, al venir dado este por el coste marginal efectivo de cada alumno para la escuela (coste tanto mayor cuanto menor su capacidad innata), aunque desde la perspectiva de los incentivos este problema generaría riesgo moral; el trabajo de Orazem y Tesfatsion (1997), planteado en un marco más general de acumulación de capital humano, señala que a mayor igualdad en los instrumentos de intervención pública, tantas más probabilidades de que la inversión se debilite, al desaparecer los incentivos individuales cristalizados en la tasa de retorno marginal del esfuerzo. Por tanto, en este marco de peer effects la asunción de un cierto incremento de la desigualdad parece un precio inevitable por el incremento de la eficiencia y la acumulación, aunque un cupón lo suficientemente elevado y generalizado mitigaría la dureza de esta relación de intercambio. Por lo demás, el cupón genera aumentos de eficiencia al mejorar las posibilidades de combinatoria de un modo tal que se incrementan las posibilidades de acumulación del sistema.

30. Realizada esta panorámica de la literatura instrumentos de fomento de la educación, se aprecia que no existe un consenso claro en la literatura sobre las bondades del sistema de cupones frente a la educación pública, aunque la comparación se ve distorsionada por dos razones: i) los diferentes supuestos de partida de los distintos modelos; ii) los diferentes factores de heterogeneidad que incorporan; iii) la omisión de ventajas dinámicas de los cupones en el sector educativo privado, que obligaría a una modelización más explícita de la tecnología del mismo; iv) la mezcla de criterios de maximización del crecimiento y minimización de la desigualdad sin una referencia clara a los de eficiencia social, al tiempo que se omiten otros términos de la comparación, como la mera intervención del gobierno por medio de impuestos y subvenciones o distintas estrategias educativa dentro del régimen público en el marco de factores de heterogeneidad variados. La escuela pública, por su parte, presenta como principal virtud una mayor convergencia en los stocks de capital privados, aunque provoca

efectos distorsionantes en otras variables privadas, como el ocio y la fertilidad -que eleva-, con las consiguientes efectos perjudiciales sobre el crecimiento derivado del gasto educativo per cápita o la producción del bien final para cada nivel de capital humano.

31. Pensando en explorar un marco de análisis más general que permita profundizar en la evaluación comparativa de las vías de intervención públicas, en el capítulo 6 se propone un modelo con distintas variantes en el que se ensayan y comparan las consecuencias de los diferentes instrumentos públicos desde distintos puntos de vista, principalmente optimalidad social, crecimiento y desigualdad. El modelo se basa en la coexistencia de agentes heterogéneos, diferenciándose estos tanto por su nivel de capital humano inicial como por su productividad en el aprendizaje y transmitiéndose esta última característica genéticamente entre generaciones[245]. En ningún caso existe ninguna fuente de financiación adicional al legado educativo de padres a hijos y, en todas las variantes, los rendimientos del capital humano en la tecnología de aprendizaje son constantes, impidiendo de este modo la convergencia automática de los stocks del activo en estado estacionario. La elección de este marco adverso a la disminución de la desigualdad conduce necesariamente a la idoneidad de la intervención pública, solo que sus distintos instrumentos producen efectos radicalmente diferentes, como se verá a continuación. Las consecuencias de esta heterogeneidad se analizan en primer lugar en un marco de altruismo perfecto y preferencias dinásticas, en las que en cada período los padres efectuarán un gasto educativo que revertirá en el capital humano de los hijos, con una tasa de depreciación nula de este. Se introducen en la tecnología de aprendizaje un peer effect en esta variante, en la línea de trabajos mencionados antes como el de Caucutt y Ehrlich y Kim, pero a diferencia de ambos, se explotan en mayor medida las consecuencias dinámicas de los mismos y, al contrario que los segundos, se establece una simetría en el mismo para ambos grupos de agentes; dicho peer effect recibe un tratamiento de efecto externo en el sentido de Lucas y Romer. Otra característica relevante del modelo es que la tecnología de servicios educativos, externa al hogar, es decreciente respecto al nivel de capital humano

[245] Los componentes de la restricción presupuestaria del gobierno ajenos a las políticas educativas, así como los parámetros de estas, pueden fijarse exógenamente o, alternativamente, mediante la maximización de las preferencias del gobierno, que dependen del nivel de consumo público a lo largo de un horizonte infinito; esta optimización se realiza al comienzo del período inicial y, por tanto, no ofrece margen a la interacción estratégica con las decisiones de los agentes, no siendo en consecuencia susceptible de sufrir la crítica de Lucas. El tipo impositivo que financia todos estos gastos, a causa de la regla de equilibrio presupuestario, devendría endógeno.

medio ponderado, al suponer que este induce una mayor complejidad en la utilización de los inputs -el bien final- para producir una misma corriente de servicios de una determinada calidad; la principal consecuencia será que, en competencia perfecta, el precio de los servicios escolares se igualará al capital humano medio ponderado, con el consiguiente beneficio en términos de poder adquisitivo para las familias más cualificadas y perjuicio para las no cualificadas. El efecto formal sobre la restricción presupuestaria es similar al que consiguen autores como De la Croix y Doepke (2004) partiendo de estos supuestos, aunque las consecuencias son de mayor entidad cuando se combinan con la diferencia en las productividades de aprendizaje. Finalmente, la función de producción del bien final se configura como una tecnología AK en capital humano, sin que el capital físico intervenga en el proceso productivo. Como se demuestra, los rendimientos del gasto educativo en la función de aprendizaje deben ser constantes, ya que la conjetura efectuada sobre la demanda educativa de cada grupo (y que se verifica) para rendimientos decrecientes no satisface la condición de transversalidad del problema. En este aspecto también se aprecia la diferencia con trabajos clásicos como el de De la Croix y Doepke, a consecuencia de la distinta estructura de las tecnologías de acumulación, en la medida en que el componente de "peer effect" en este trabajo tiene asociado rendimientos constantes a escala, lo que impide que asintóticamente se diluya su presencia dentro de la tasa de acumulación del capital humano.

32. Bajo estos supuestos, el consumo debe crecer en todos los períodos en línea con el capital humano de cada grupo, al ser la tasa de retorno del capital humano constante. La solución competitiva descentralizada es estacionaria y carece de dinámica de transición, en el sentido de que la tasa de acumulación del capital humano de cada grupo de individuos es constante en el tiempo, si bien difieren entre sí, al ser siempre menor la de los hogares no cualificados. Este resultado implica grados crecientes de desigualdad medidos por el capital humano relativo de ambos grupos, así como ausencia de optimalidad social, tanto por no igualarse las tasas de crecimiento del consumo de las dos clases de agentes como por no corregirse las externalidades derivadas del peer effect ni aquellas que conciernen al impacto de la acumulación sobre el precio futuro de los servicios de escolarización. Es necesario señalar que el efecto de entorno no corrige en competencia descentralizada esta diversidad de tasas de acumulación -a diferencia de Ehrlich y Kim- ya que, aunque opera favorablemente a los individuos menos cualificados, el encarecimiento relativo de los servicios escolares en relación con su renta neutraliza perfectamente el primero. Varias soluciones con intervención pública son posibles. La primera consiste en el establecimiento de impuestos generalizados que financian subvenciones a la adquisición de educación a los

menos cualificados -puede pensarse que estas últimas constituyen deducciones a un impuesto sobre la renta-. Este instrumento logra equiparar, para cierto valor crítico de la subvención, las tasas de acumulación para ambos grupos, si bien en general no internaliza adecuadamente los efectos externos desde el punto de vista social; es más, la corrección de las externalidades exigiría una subvención para los individuos cualificados y un impuesto neto para los no cualificados, al predominar para estos últimos la externalidad negativa sobre el precio de la educación sobre la positiva, relacionada con la subinversión que trae consigo la falta de internalización de las ganancias de capital de su inversión. En el ámbito de la provisión pública de educación se estudia un régimen de escuela pública puro -excluyente de otros esfuerzos privados-, así como un régimen de excelencia inspirado en Tamura (2001), que consiste en la realización de un desembolso adicional para contrarar un factor -profesorado- que logra la equiparación de las productividades entre grupos, y un sistema mixto de cupones. En cuanto a los dos primeros, ambos generan una dinámica de transición hacia un estado estacionario estable caracterizado por la igualdad entre las tasas de acumulación, si bien con efectos muy distintos, ya que el sistema de escuela pública tradicional es sensiblemente más regresiva que el régimen de excelencia. En ambos casos, sin embargo, dicho estado estacionario satisface las condiciones de optimalidad social, tanto en lo que se refiere a la igualación entre la tasas de crecimiento del consumo como a la corrección de los efectos externos, siempre que las cantidades de provisión pública correspondan a las soluciones óptimas del planificador y la extracción del profesorado entre los grupos de cualificación se realice en la misma proporción que estos constituyen sobre el total de la población. Por lo que respecta al sistema de cupones, cuando los servicios complementarios financiados por el sector privado se someten al mismo sistema de subvenciones comentado antes, la cantidad total de servicios relativos absorbidos por cada grupo puede reconducirse hacia la ratio que iguala las tasas de acumulación desde un comienzo, si bien el mayor tipo impositivo respecto al sistema privado con impuestos y subvenciones determina un menor volumen de servicios totales de equilibrio. Este último sistema tampoco satisface los criterios de optimalidad social, ya que la suma de servicios escolares totales (cupón+privados) aplicados a cada uno de los grupos no corrige los efectos externos, a pesar de cumplir la optimalidad en consumo, ni permite alcanzar una sola tasa de retorno social de la acumulación de capital humano. En resumen, los únicos sistemas que satisfacen plenamente -en su estado estacionario- las condiciones de optimalidad social son los de provisión pública pura a consecuencia de la presencia de peer effects en la tecnología de acumulación, si bien entre ellos el de excelencia es el que presenta las mejores propiedades distributivas; todos los demás analizados pueden calificarse como subóptimos, lo que no obsta para que presenten características diferenciales que puedan valorarse como positivas cuando se les compara con los públicos.

33. Otra variante del modelo estudiada consiste en la eliminación del efecto externo de entorno en la función de aprendizaje, así como en la provisión de servicios educativos diferenciados y simultáneos por el sector escolar, siendo el precio de equilibrio a largo plazo de cada uno de ellos igual al stock de capital humano de cada alumno, suponiendo que este sea reconocible con anterioridad al inicio de sus estudios. Esta varante se desarrolla en un contexto de generaciones solapadas en el que el incentivo a la inversion en el capital humano de la siguiente generación, aunque las preferencias carecen de altruismo, viene dado por un contrato intergeneracional à la Ehrlich y Lui (1991), en virtud del cual cada generación paga en concepto de "pensión" una fracción constante de sus ingresos laborales a sus mayores; por lo demás, los restantes supuestos del modelo se mantienen. La estructura logarítmica de las preferencias y la tasa de depreciación unitaria del capital humano garantizan una tasa de ahorro constante que, unida al cambio en la determinación de precios de los servicios educativos, permite que la demanda de servicios educativos en volumen sea constante en el tiempo e igual para los dos grupos, generando así una senda estacionaria sin transición; aun así, la diversidad de los parámetros de productividad vuelve a producir una desigualdad creciente entre los dos grupos de familias. En estas condiciones, los efectos externos en las cpo del planificador se compensan, provocando que el único sistema de corrección óptimo desde el punto de vista social sea el público con criterio de excelencia, al reducir las dos tasas de retorno privadas a una única, coincidente con la social, y permitir el alineamiento entre el crecimiento del consumo de los dos grupos en todo período. Los restantes criterios son subóptimos y, en particular, el de escuela pública pura lo es -además de ser potencialmente el más regresivo de nuevo- porque, en ausencia de peer effect, no existe la posibilidad de transitar hacia un estado estacionaria con igualación de tasas de acumulación si la economía no se encuentra desde el comienzo sobre dicha senda. El sistema mixto con cupones adopta en esta variante del modelo una interacción multiplicativa con el gasto privado, en lugar de aditiva como en la versión dinástica, a efectos de preservar la comparabilidad de soluciones de equilibrio con tasa de ahorro constante derivadas para los restantes instrumentos. Bajo esta identificación, el régimen con cupones se aproximaría en mayor medida al cumplimiento de las cpo del planificador, en el sentido de que, para el valor crítico de los cupones relativos, los consumos de cada clase de hogar crecerían a la misma tasa y sus tasas de retorno del gasto privado convergerían a una única, si bien diferiría en un aspecto esencial: mientras en el problema del planificador el gasto en educación para cada familia debería ser el mismo, la cantidad total en el

sistema de cupones es diferente, por cuanto que el elemento de provisión pública no es el mismo, aun siéndolo el componente privado. No obstante, el régimen de cupones sería superior al de producción pública en el sentido de que lograría una senda de crecimiento con un grado de desigualdad inferior. Cuando la severidad de la heterogeneidad entre agentes varía, sin embargo, y se limita a la diferencia en los stocks de capita iniciales, esta prelación varía y sería el sistema privado sin intervención pública el óptimo social -al no depender el volumen de educación demandado del stock de capital inicial-, manteniendo la desigualdad constante e igual a la registrada en el período inicial. Se demuestra también que, cuando la tecnología de acumulación sin peer effect y el sistema de diferenciación de precios en función de cualificación se aplica al modelo dinástico los resultados en términos de optimalidad social de las distintas políticas son paralelos a los derivados en el marco OLG -si bien la asignación en competencia descentralizada es distinta-, siendo el sistema de escuela pública con excelencia el que cumple a lo largo de toda la senda de equilibrio general los criterios de eficiencia del planificador.

34. Las conclusiones básicas de la versión del modelo con OLG no se ven modificadas sustancialmente cuando se le somete a una serie de extensiones. Por ejemplo, cuando el input productivo de los servicios educativos es el tiempo, en lugar del gasto en servicios externos, y la producción tiene lugar en el hogar, el carácter de la asignación a que daría lugar la competencia descentralizada no varía. Tampoco lo hace cuando se endogeneiza el tamaño de las pensiones, respondiendo a un programa de optimización que contiene una combinación lineal convexa de la utilidad de los adultos y la de sus descendientes en tanto que los primeros siguen vivos. Por último se introduce fertilidad endógena en el modelo mediante una modificación de la función de utilidad que otorga a esta una doble condición, de activo y de bien de consumo duradero, imposibilitando la definición de una tasa de retorno convencional para esta última. Con estos supuestos, la estructura del modelo sigue generando una tasa de retorno constante cuando se considera que la integridad del ahorro se canaliza hacia inversiones en capital humano, giradas sobre la renta disponible neta de gastos específicos en fertilidad -la cual consume una fracción exógena del tiempo disponible para trabajo-; la vigencia de esta proposición implica que, dada una renta para cada individuo, la relación entre gasto educativo y fertilidad será negativa, como refleja también la mayor parte de la literatura especializada en transición demográfica. En equilibrio competitivo descentralizado, tanto la inversión en educación como la fertilidad, ambas estacionarias desde s=0, son independientes de la tipología a la que pertenece el individuo e iguales entre grupos, por lo que se replica el resultado de incremento de la desigualdad obtenido en la versión del modelo para OLG. La política de impues-

tos+subvenciones educativas a los menos cualificados logra la proporción de demandas de servicios educativos necesaria para lograr tasas de acumulación iguales desde el período inicial, toda vez que esta variable absorbe completamente el efecto de los parámetros fiscales, compensándose perfectamente los efectos sustitución y renta para la fertilidad de equilibrio y siendo esta igual, consiguientemente, a la que rige en competencia descentralizada. Por el contrario, las subvenciones al tiempo destinado a la crianza de los niños generan una expansión de la fertilidad y una contracción de la demanda de educación, a pesar de que en la práctica este tipo de transferencias en especie se conceden para facilitar el acceso a la educación de las familias con menores recursos. La razón del resultado es que, para lograr una solución interior en ambos activos debe anclarse el valor de la demanda de servicios educativos en aquel que iguala la tasa de retorno del capital humano a la cpo de la fertilidad, y aquel se conforma por tanto sobre la base de efectos sustitución puros, mientras que la fertilidad de equilibrio se ve determinada tanto por efectos sustitución como por efectos renta a partir de la constancia de la tasa de ahorro. Por un motivo similar, la provisión educativa, tanto en un sistema de escuela pública pura como de excelencia, impacta negativamente sobre la fertilidad a través del tipo impositivo. El régimen mixto con cupones presenta unas características análogas a las derivadas sin fertilidad, en el sentido de que se genera una sustituibilidad parcial entre el gasto educativo público y el privado en las decisiones de los agentes, razón por la cual la fertilidad se correlaciona positivamente con el tamaño de los cupones.

ANEXOS

ANEXOS AL CAPÍTULO 3

Dinámica de las extensiones del modelo de Uzawa-Lucas.

Benhabib y Perli [246] (1994), siguiendo la metodología de análisis de la dinámica del modelo marcada por Mulligan y Sala-i-Martí, estudian las combinaciones paramétricas dentro del modelo de Lucas que conducen a indeterminaciones, entendiendo por tales la ausencia de una única senda de crecimiento que en el entorno del equilibrio estacionario converja hacia el mismo. A este respecto concluyen que: i) Cuando la tasa de descuento intertemporal ρ es relativamente baja en relación con la productividad marginal del trabajo efectivo en h (B), los restantes parámetros son tales que permiten que el valor estacionario del tiempo de trabajo se encuentre en el intervalo (0,1)[247] y la elasticidad de sustitución intertemporal es relativamente baja, entonces la senda de crecimiento estacionaria es única y estará localmente determinada. ii) Si por el contrario, B es inferior a ρ, la solución estacionaria del tiempo de trabajo sigue encontrándose en (0,1) y la elasticidad de sustitución intertemporal es relativamente alta, un valor del parámetro de la externalidad del capital humano superior a la tasa de preferencia temporal β será una condición suficiente para la aparición de indeterminaciones. iii) Si, en el mismo caso anterior, el parámetro de externalidades de capital humano es relativamente bajo, aun así no existen garantías de que evitar las indeterminaciones locales; es más, bajo ciertas combinaciones de los parámetros del modelo estas últimas pueden surgir, aunque también pueden obtenerse 3 valores propios con parte real positiva.

La posible existencia de indeterminación local en el análisis anterior exige valores de ciertos parámetros (elasticidad de sustitución intertemporal del consumo y externalidad del capital humano en h, principalmente), demasiado elevados en comparación con los

---

[246] El artículo toma como precedente otro la aportación clásica de Benhabib y Farmer (1994) en un marco general de un modelo de crecimiento con trabajo uniforme y capital físico en el que existen externalidades. Este trabajo se publicó casi al mismo tiempo que el de Boldrin y Rustichini (1994), de enfoque similar.

[247] Por distintas razones se descartan los valores esquina del tiempo laboral. Si esta fracción fuera igual a la unidad, entonces no habría acumulación de capital humano en el modelo. Por el contrario, si fuera nula, entonces la producción del bien de consumo también sería cero y la utilidad marginal del consumo tendería a infinito.

resultados de la mayor parte de estudios empíricos o, alternativamente, productividad marginal del trabajo en h demasiado reducida. Por esta razón Benhabib y Perli proponen, en su miismo trabajo de 1994, una variante del modelo de Lucas en la que este problema se atenúa, obteniéndose indeterminación incluso con elasticidades en rangos más realistas. Esta versión se caracteriza principalmente por introducir ocio separable del consumo en la función de utilidad, así como externalidades del tiempo de aprendizaje en h. Es más, se introduce la restricción de que la utilidad instántanea del consumo sea logarítmica, a fin de que su elasticidad de sustitución sea unitaria, lo que representa un valor más bajo que el requerido en el análisis anterior para la aparición de indeterminación local. La satisfacción reportada por el ocio se introduce a partir de desutilidad generada por la suma del tiempo de aprendizaje y de trabajo, no a través de la disponibilidad de una franja de tiempo de ocio o producción doméstica de commodities como tal. La especificación sería por tanto:

$$U = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \frac{\left(n_s^L\right)^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon} \right];\ n_s^L = n_s^w + n_s^h \quad \text{(A3.1)}$$

La función de producción del bien de consumo ahora presenta rendimientos constantes a escala en el conjunto de los inputs privados y, aunque al igual que en Lucas se introducen externalidades en el capital humano, estas no serán relevantes para producir indeterminación local. El tiempo de aprendizaje va a acompañado de un exponente diferente al del capital humano. Con estos supuestos la función F quedaría especificada del siguiente modo:

$$Y_s = A\left(K_s\right)^{\alpha_k}\left(a_s^h\right)^{\alpha_a}\left(n_s^w\right)^{\alpha_n}\left(a_s^h\right)_a^{\hat{\alpha}_a};\ \alpha_k+\alpha_a+\alpha_n=1 \quad \text{(A3.2)}$$

Para dotar a la función lagrangiana de la concavidad necesaria para que exista un máximo, esta debe ser cóncava una vez sustituidas las variables de control y expresada solamente en función de variables de estado. En la versión de Lucas, aunque la función de acumulación no es cóncava la función lagrangiana verifica la propiedad anterior. Sin embargo, con la introducción del ocio esto no ocurre per se, lo que debe garantizarse que los rendimientos sociales del capital humano (la parte privada más la externalidad) sean constantes para que exista un máximo. Por tanto la ecuación de acumulación pasará a ser:

$$i_s^h = B\left(a_s^h\right)^{\beta_a}\left(a_s^h\right)_a^{1-\beta_a}\left(n_s^L-n_s^w\right)^{\beta_n}\left(n_s^L-n_s^w\right)^{\hat{\beta}_n};\ \beta_a+\beta_n=1 \quad \text{(A3.3)}$$

Las externalidades en capital humano y tiempo de aprendizaje, además de restaurar la simetría con el sector productor del bien final, posibilita que aparezca crecimiento endógeno en el sector educativo, al ser decrecientes los rendimientos privados en capital humano. Con estos supuestos pueden distinguirse los siguientes casos: i) Si $\beta_n + \hat{\beta}_n < 1$, existe un único estado estacionario y además es localmente estable; ii) Si por el contrario la suma de estos parámetros es superior a la unidad -esto es, las externalidades el tiempo de aprendizaje son elevadas- entonces el modelo es globalmente inestable, en la medida en que existen dos equilibrios estacionarios, siendo las condiciones iniciales críticas para determinar a cuál de ellos converge la economía. En cuanto a la determinación local, valores relativamente bajos de ε tienden a incumplirla mientras que, valores altos del mismo parámetro, acompañados de un $\hat{\beta}_n$ relativamente alto, pueden generar indeterminación. En cualquier caso, a medida que aumenta $|\varepsilon|$ la probabilidad de indeterminación local disminuye y, en particular, cuando dicho valor absoluto supera la unidad, la probabilidad es muy baja, al exigir también valores muy elevados de $\hat{\beta}_n$. En conclusión, pues, en esta ocasión la indeterminación, bien sea global o local, se logra para valores más realistas de los parámetros y en concreto exigen efectos externos del tiempo de aprendizaje solamente moderados y localizados en la función de producción de capital humano.

Para poner de manifiesto que el capital físico es ajeno a las condiciones paramétricas que dan lugar a indeterminación, el análisis se realiza también en una versión unidimensional del modelo en la que el no existe capital físico y no existen efectos externos en la tecnología del bien de consumo, con una función de producción dada por:

$Y_s = A a_s^h \left(n_s^w\right)^{\alpha_n}$ (A3.4)

Por lo demás, se mantiene la utilidad separable en tiempo de trabajo y consumo, siendo logarítmica para la primera de estas variables, así como la misma función de producción de capital humano considerada en la variante anterior. El resultado es análogo al comentado con desutilidad del tiempo trabajado y capital físico en la función de producción, con una o dos sendas de equilibrios estacionarios e indeterminación local influida principalmente por $|\varepsilon|, \hat{\beta}_n$.

Chamley (1994) estudia un caso intermedio no cubierto por el análisis anterior de Benhabib y Perli: aquel caracterizado por la ausencia de efectos externos en la producción de bien de consumo, función de utilidad dependiente solamente de consumo y efectos externos-flujo (esto es, en el tiempo de aprendizaje) en h; en otras palabras, el esquema de Lucas solo que los efectos externos no serían stock y se desplazarian desde la producción del bien final a la del capital humano. El modelo es muy relevante, al reflejar la importancia del learning-by-doing (LBD) social como factor coadyudvante a la acumulación de conocimientos (y no solamente el output final de dicho proceso, como en Benhabib y Perli).

La especificación de la función de producción F es genérica, exigiéndose solamente rendimientos constantes a escala en el conjunto de los inputs -todos ellos privados, mientras que en la función de utilidad se recurre a la misma tipología empleada por Lucas, con elasticidad de sustitución intertemporal constante e igual a la inversa de σ . La función de producción de capital humano presenta una estructura también genérica dada por:

$$a_{s+1}^{h} = a_{s}^{h}\left[1+G\left(n_{s}^{h},\left(n_{s}^{h}\right)_{a}\right)\right];\ G_1 \equiv \frac{\partial G}{\partial n_{s}^{h}} < 0;\ G_2 \equiv \frac{\partial G}{\partial\left(n_{s}^{h}\right)_{a}} < 0;\ \mathrm{G}_{11} < 0;\ G_{12} > 0 \quad \text{(A3.5)}$$

De esta forma, la concavidad de G respecto al tiempo de aprendizaje privado puede ser compatible con una suma $G_{11} + G_{12}$ positiva, si la productividad marginal cruzada es tiene una magnitud suficientemente importante. La taxonomía de casos al que llega Chamley es análogo al de Benhabib y Perli. En cuanto a la determinación global, si las externalidades en el flujo de capital humano no están presentes, entonces solo existe una senda de crecimiento estacionario. Por el contrario, si éstas se manifiestan, se demuestra que G puede adoptar formas funcionales que impliquen la existencia de más de una senda estacionaria. Suponiendo que exista una única senda estacionaria, habrá determinación local siempre y cuando se verifique:

$$\sigma > \frac{(\theta - 1 - \eta)}{\theta} \quad \text{(A3.6)}$$

El significado de los parámetros implicados en esta fórmula es el siguiente.

$$\theta = \frac{(G_1 + G_2)}{G_1};\ \eta = -\frac{(G_{11} + G_{12})n^h}{G_1}\left(\frac{1-n^h}{n^h}\right) \quad \text{(A3.7)}$$

Esto es, tanto θ como η miden distintos aspectos de la potencia del efecto externo. Cuando este no existe, el primero de ellos alcanza su mínimo valor, 1, lo que maximiza la probabilidad de que la senda estacionaria se encuentre determinada localmente. Por otro lado, η representa en la fórmula el grado de concavidad de G y, en ausencia de externalidad, es siempre positivo, mientras que su valor desciende a medida que toma importancia la externalidad de LBD. Del mismo modo, cuanto mayor es el tamaño de esta externalidad tanto más probable será la aparición de la indeterminación.

Xie (1994) realiza un trabajo paralelo al de Mulligan y Sala-i-Martí, solo que en lugar de ilustrar la dinámica de transición mediante una simulación, explicita analíticamente las trayectorias de las variables introduciendo una restricción paramétrica. Así, tomando el modelo literal de Lucas, impone $\alpha_k = \sigma$, lo que permite alcanzar soluciones cerradas en forma de ecuaciones diferenciales para las sendas de las endógenas. Como veremos más adelante, la elección de esta restricción en los parámetros no es arbitraria, sino que además de proporcionar una mayor operatividad matemática, garantiza la invariabilidad del equilibrio estacionario frente a shocks en las dotaciones relativas de los capitales, propiedad muy conveniente. A cambio, la idoneidad del modelo para llevar a cabo ejercicios de simulación es menor. Además, esta estructura propicia que el trabajo se centre en las condiciones de estabilidad global, frente a otras contribuciones previas más orientadas a la determinación local.

Realizados estos supuestos, se distinguen dos situaciones. Primero, presencia de externalidades del capital humano en F de suficiente entidad[248]. En tal caso, dados los valores iniciales de los stocks de los dos tipos de capital, cada valor inicial del tiempo de trabajo de mercado generará una senda de equilibrio general diferente para todas y cada una de las endógenas del modelo. Este resultado es cualitativamente distinto al de Lucas, que señalaba que por cada ratio inicial de los dos capitales existía una senda de equilibrio general. Xie va más lejos, probando a través de la derivación de las sendas que, cada ratio inicial lleva asociadas múltiples sendas de equilibrio dependiendo del valor inicial del tiempo trabajado; a su vez estas convergirán asintóticamente hacia la ratio estacionaria de capital físico sobre capital humano. Este resultado justifica la posible existencia de "adelantamientos" entre países, frente a la ausencia de convergencia pronosticada por Lucas: dados dos países, teniendo el primero de ellos dotaciones iniciales inferiores de capital físico y humano, es posible que el crecimiento del primero acabe siendo superior al del segundo, con dotaciones más ventajosas, si el tiempo de producción de mercado inicial en el primero es suficientemente bajo en relación con el tiempo de aprendizaje. Todo esto sin perjuicio de que la senda de crecimiento estacionario hacia la que se converja a largo plazo, en términos de la ratio de capitales, sea independiente de estas condiciones iniciales.

Sin embargo, en un segundo escenario, con externalidades del capital humano menores y $\hat{\alpha}_h < \alpha_k$, dada una ratio inicial de capitales, una sola senda de equilibrio general

---

[248] Al no incluir la versión de Xie ocio en la función de utilidad, a diferencia de Benhabib y Perli (1994), los efectos externos del capital humano para generar indeterminación deben ser de una magnitud importante. Esta última se concreta en una doble condición: $\hat{\alpha}_h > \alpha_k$ más una segunda: $B < \rho < B(1 + \hat{\alpha}_h - \alpha_k)$. El cumplimiento de ambas relaciones constituye una condición necesaria y suficiente para la existencia de múltiples sendas de equilibrio.

converge hacia la senda de crecimiento estacionario; por tanto, el fenómeno del "adelantamiento" dejará de ser posible. Además, es posible demostrar que en estas últimas condiciones la única trayectoria que converge al equilibrio estacionario es una en la que el tiempo de trabajo inicial es igual al estacionario (siempre aceptando la restricción antes comentada de $\sigma = \alpha_k$).

Externalidades sectoriales. Estas fueron introducidas en una economía multisectorial por Benhabib y Farmer (1996), Benhabib y Nishimura (1998) y Benhabib, Meng y Nishimura (2000). **Mino (2000)** realiza el trabajo de referencia en este campo, introduciendo externalidades específicas sectoriales tanto en la tecnología de producción del bien final como en la de aprendizaje, con rendimientos sociales constantes en ambos casos. Por tanto estas adoptan la siguiente forma:

$$Y_s = A\left(n_s^{KY} K_s\right)^{\alpha_k} \left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_h} \left(n_s^{KY} K_s\right)_a^{\hat{\alpha}_k} \left(n_s^w a_s^h\right)_a^{\hat{\alpha}_h};\ \alpha_k + \alpha_h + \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_h = 1 \ (A3.8)$$

$$i_s^h = B\left(n_s^{KH} K_s\right)^{\beta_k} \left(n_s^h a_s^h\right)^{\beta_h} \left(n_s^{KH} K_s\right)_a^{\hat{\beta}_k} \left(n_s^h a_s^h\right)_a^{\hat{\beta}_h};\ \beta_k + \beta_h + \hat{\beta}_k + \hat{\beta}_h = 1 \ (A3.9)$$

En una versión básica del modelo la función de utilidad depende únicamente del consumo y tiene elasticidad de sustitución intertemporal constante. Las tasas de depreciación de ambos activos reales son positivas. En este caso la senda estacionaria será única, caracterizándose por mostrar una tasa de crecimiento constante del capital humano, que será la misma que la del capital físico y la del consumo. Para verificar su determinación local debe atenderse a la relación en la intensidad social del capital físico entre los dos sectores. **Así, cuando el sector educativo es el más intensivo socialmente en capital físico y la senda estacionaria presenta una tasa de crecimiento positivo, esta estará siempre localmente determinada**. Así, el sostenimiento de dos (o más) sendas localmente convergentes al estado estacionario, una de ellas con una tasa de retorno del capital físico permanentemente más elevada, exigiría un flujo de tiempo hacia el sector educativo para reforzar la productividad marginal del capital físico; ahora bien, cuando este último es intensivo en capital físico esta reasignación no será posible en la escala suficiente. **La indeterminación también queda excluida cuando el sector productor del bien final es el capital-físico intensivo y además el mismo sector es relativamente más capital-físico intensivo en un sentido privado**; este sería el caso del modelo de Gómez (2004), que se comentará a continuación. En este último escenario, incluso siendo el sector educativo más intensivo en capital humano, la intensidad en capital físico del sector del bien final sería absoluta y evitaría la posibilidad de que se equiparara la rentabilidad de este último activo entre las dos hipotéticas sendas alternativas.

En este mismo trabajo Mino propone una segunda versión del modelo, en el que conviven tres sectores productivos: los dos anteriores, más una tecnología doméstica generadora de commodities, que utiliza los mismos factores productivos que las otras dos y se ve también afectada externalidades específicas, igualmente con rendimientos sociales constantes. Así pues, esta tercera función de producción se describe mediante la siguiente ecuación:

$$C_{2s} = Q\left(n_s^{K,C} K_s\right)^{\gamma_k} \left(n_s^C a_s^h\right)^{\gamma_h} \left(n_s^{K,C} K_s\right)_a^{\hat{\gamma}_k} \left(n_s^C a_s^h\right)_a^{\hat{\gamma}_h};\ \gamma_k + \gamma_h + \hat{\gamma}_k + \hat{\gamma}_h = 1;$$
$$n_s^C + n_s^w + n_s^h = 1\ (A3.10)$$

Esta commodity entra como argumento en la función de utilidad del hogar representativo, junto con un bien de consumo adquirido directamente del mercado. Las preferencias, de nuevo de elasticidad de sustitución intertemporal constante, se formulan por lo tanto como sigue, siendo C_1 el consumo del bien final provisto por el mercado:

$$u_s = \frac{\left(C_{1s}^{\eta} C_{2s}^{1-\eta}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\ \text{(A3.11)}$$

En esta extensión del modelo, la inclusión de un nuevo sector aumenta las probabilidades de encontrar una indeterminación local; la razón es que existen fuentes alternativas de capital físico con las que nutrir la producciónde capital humano y reforzar así el retorno del capital físico en la senda alternativa con mayor proporción de este activo en el entorno del estado estacionario. A consecuencia de este cambio, la indeterminación local puede aparecer tanto si la intensidad social en capital físico del sector educativo es mayor como menor que la del sector productor del bien final. En el primer caso, en el que el modelo básico excluía siempre la indeterminación, ahora puede surgir si la intensidad privada en educación es superior a la de la commodity y a su vez esta es mayor que la del bien final.: de esta forma el capital físico se podría desplazar en cuantía suficiente desde la producción de la commodity a la del capital humano a lo largo de una senda alternativa con un nivel superior de capital físico. En el segundo caso, la indeterminación puede generarse si la intensidad privada en capital físico es superior en educación que en bienes (como en el modelo básico), así como cuando la intensidad privada en capital físico es superior en el bien final que en educación y esta a su vez es mayor que en la commodity.

Mino (2003) vuelve a utilizar externalidades específicas sectoriales, esta vez combinándolas con preferencias en consumo y ocio no separables. La función de producción del bien final presenta externalidades específicas en trabajo y capital humano y rendimientos sociales constantes, al igual que su trabajo de 2000. La función de aprendizaje no utiliza capital físico y por tanto solamente está afectada por externalidades específicas procedentes de trabajo, si bien los rendimientos sociales también son constantes. En términos de la nomenclatura que viene empleándose en este apartado, en la última tecnología se verifica $\beta_k = \hat{\beta}_k = 0$ y $\beta_h + \hat{\beta}_h = 1$. Capital físico y humano se deprecian a tasas positivas y en general comprendidas entre 0 y 1. Las preferencias del hogar representativo son, en general, no separables en consumo y ocio, salvo cuando la elasticidad de sustitución intertemporal de ambos es unitaria, en cuyo caso las preferencias son aditivas. Esto es:

$$u_s = \begin{cases} \dfrac{\left[C_s \Lambda\left(n_s^C\right)\right]^{1-\sigma}}{1-\sigma}; \Lambda\left(n_s^c\right) = \exp\left[\dfrac{\left(n_s^c\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right] \text{ si } \sigma, \theta > 0; \sigma, \theta \neq 1; \\ \ln C_s + n_s^C \text{ si } \sigma = \theta = 1 \end{cases} \quad \text{(A3.12)}$$

Planteado el sistema, el autor se concentra en un caso especial análogo al empleado por Xie (1994) para obtener ecuaciones explícitas de las trayectorias, esto es, $\sigma = \alpha_k$ y $\theta = 1$, estrategia que le permite reducir a dos el número de variables cuya dinámica estudia en el entorno del estado estacionario. Formuladas estas condiciones, se verifica que: i) la unicidad del estado estacionario no siempre está garantizada; contar con único estado estacionario exige la imposición de condiciones paramétricas, en cuya ausencia se encuentra una posición estacionaria de bajo crecimiento y otra de alto crecimiento; ii) si existe un único estado estacionario, bajo ciertas condiciones puede hallarse indeterminación local; iii) si hay dos estados estacionarios, el de alto crecimiento será localmente determinado, pero el de bajo crecimiento será, en función de las condiciones paramétricas que se cumplan, localmente indeterminado o inestable. Desde la perspectiva de la estabilidad global del sistema, la convergencia hacia el equilibrio de alto crecimiento, que exigirá comenzar con valores iniciales situados sobre la senda apropiada, puede o no ser monótona, alternando en este último caso períodos de crecimiento con otros de decrecimiento neto del capital humano. En cuanto al estado estacionario de bajo crecimiento puede presentar indeterminación global tanto si es indeterminado o inestable: de hecho, en este último caso hay elevadas probabilidades, en términos de la zona donde pueden encontrarse los valores iniciales de las variables de estado, de desplazarse hacia una trayectoria cíclica alrededor del equilibrio estacionario de bajo crecimiento que sin embargo nunca llega a alcanzarlo.

Gómez (2004) escoge un caso específico dentro del planteamiento de Mino, aquel en el que las externalidades sectoriales se ubican solamente en el sector de bienes finales y se circunscriben al capital humano utilizado en el sector, debido a las especiales propiedades en términos de eficiencia que presenta esta configuración. El autor justifica de un modo muy gráfico la importancia de estas externalidades: "...*having smart colleagues in* *the department is not very useful unless they spend some time in the office*". Este último autor inserta este tipo de externalidades en una economía con acumulación de capital humano, buscando el paralelismo con Lucas-Uzawa, a través del volumen de este activo empleado en el sector productor de bienes finales, con el objetivo de revisar en estas circunstancias la optimalidad de la solución descentralizada. Así pues, la función de aprendizaje empleada es una del tipo Lucas-Uzawa, con rendimientos constantes tanto en capital humano como en tiempo de aprendizaje, mientras que la tecnología generadora de bienes finales queda descrita mediante la siguiente función:

$$Y_s = AK_s^{\alpha_1}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_2}\left(n_s^w a_s^h\right)_a^{1-\alpha_1-\alpha_2} \quad \text{(A3.13)}$$

Por tanto, la función de producción presentaría rendimientos constantes a escala sociales, pero rendimientos decrecientes en los inputs privados. La función de utilidad depende solamente del consumo y presenta elasticidad de sustitución intertemporal constante. Al ser los rendimientos de los inputs privados decrecientes, las empresas son capaces de extraer un beneficio positivo, que suponemos se distribuye a los consumidores en su calidad de propietarios de las empresas. De esta manera, la restricción presupuestaria flujo del hogar representativo incorporará entre sus recursos tales beneficios positivos, aparte de la retribución que percibe por el alquiler de los factores productivos de que es propietario. A su vez la existencia de beneficios positivos deberá combinarse con la existencia de un coste fijo de entrada en el mercado para que el número de empresas operativas en equilibrio esté determinado.

La comparación de las soluciones social y descentralizada desvela que la segunda, a diferencia del resultado básico de Uzawa-Lucas, es óptimo paretiana, siendo los sistemas de ecuaciones dinámicos que caracterizan la economía en uno y otro caso idénticos. La razón de este resultado es paralela al argumento de Lucas (1990) en virtud del cual una tasa impositiva proporcional sobre las rentas del trabajo es neutral en un contexto de acumulación endógena de capital humano, al afectar en la misma proporción a la renta del activo y al coste de producción del mismo (esto es, al coste de oportunidad del tiempo de aprendizaje cuando se usa una función h que tiene a este y al capital humano como sus únicos inputs). En este caso, la externalidad sectorial implica que el retorno social de la inversión en capital humano es superior al retorno privado, pero al mismo tiempo el coste de oportunidad privado de producir capital humano también es inferior, en la misma proporción, al coste de oportunidad social, por lo que la neutralidad queda preservada. Hay que subrayar que este resultado es solo posible en un marco de especificidad sectorial de la externalidad, ya que de lo contrario no se verifica esta equiproporcionalidad entre renta del activo y coste de producción del mismo. Además es importante destacar que la proposición es robusta a otra especificación de la función de producción F, en el sentido de que sigue cumpliéndose aunque esta tenga rendimientos constantes en los inputs privados y crecientes en los inputs sociales. Por lo demás, la dinámica de transición es análoga a la del modelo de Uzawa-Lucas sin efectos externos, con un solo estado estacionario que presenta estabilidad local de punto de silla, así como estabilidad global.

Chakraborty y Gupta (2007) contrastan la robustez de la dinámica de transición del trabajo de Gómez introduciendo como variante rendimientos constantes en los inputs privados y crecientes en los inputs sociales como vía para reforzar el paralelismo con el modelo de Uzawa y Lucas. Si las externalidades son específicas al sector, entonces el estado estacionario presentará bien estabilidad punto de silla o inestabilidad; la indeterminación, sin embargo, se circunscribe al caso en el que las externalidades son de tipo agregado (como en Uzawa-Lucas). Para ilustrar la imposibilidad de indeterminaciones locales en el modelo de externalidades específicas a un sector, puede pensarse en el siguiente ejemplo. Supongamos dos sendas de convegencia hacia el estado estacionario en su entorno (lo que equivale a aceptar la indeterminación local); procederemos por reducción al absurdo. Una de ellas se caracteriza por mayor inversión en capital físico y, por tanto, mayor tasa de retorno de este activo que la primera. Dada la productividad marginal cruzada positiva entre capital físico y humano en F, esa tasa de retorno más elevada de capital físico al tiempo que se produce su acumulación deberá ser respaldada con acumulación de capital humano. Cuando las externalidades son agregadas, como en Uzawa-Lucas, la detracción de horas de trabajo de mercado no implica una merma de la externalidad; sin embargo, cuando son específicas del sector de bienes, la externalidad se debilita al aumentar las horas de aprendizaje, lo que hace inviable dicha senda alternativa de convergencia al estado estacionario.

Kawamoto (2008) introduce una modificación en las preferencias del modelo de Gómez (2004), alterando de este modo los resultados en cuanto a la optimalidad de la senda de equilibrio general competitiva. Así, los argumentos de la función de utilidad serán tanto el consumo del bien final de mercado como el status del propio individuo, esto es, su nivel de capital humano en relación con la media social. En marco de elasticidad de sustitución intertemporal constante, estas preferencias se articulan de la siguiente manera:

$$u_s = \frac{\left(C_s V\left(\frac{a_s^h}{\left(a_s^h\right)_a}\right)\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}; V > 0; V' \geq 0 \quad \text{(A3.14)}$$

En equilibrio general descentralizado las cpo (y más concretamente, la relativa a la posición en capital humano) se deriva tomando como dado el nivel medio social de este activo y a posteriori se introduce, por la condición de simetría, la restricción $a_s^h = \left(a_s^h\right)_a$; por el contrario, el equilibrio general del planificador considera a priori dicha restricción de simetría. Por lo demás, la única tecnología con externalidades específicas es la de producción de bienes, con rendimientos constantes sociales à la Gómez, mientras que la función de aprendizaje se nutre solamente de trabajo, con rendimientos constantes a escala tanto en tiempo de trabajo como en capital humano.

La senda estacionaria es única. Además, cuando las preferencias por el status están activas en la función de utilidad, el tiempo de trabajo es inferior al óptimo social y la tasa de crecimiento del output final, superior. Este resultado, fácil de explicar a la luz de una variable en las preferencias que provoca una distorsión en la elección descentralizada hacia el tiempo de aprendizaje, es también compatible con el argumento de la invariabilidad de la tasa de retorno de Gómez: si bien es cierto que las externalidades específicas en F dejan invariante la tasa de retorno, al afectar simultáneamente a renta y coste de inversión, la presencia del status en la función de utilidad constituye un tercer efecto sobre la cpo del capital humano que no encuentra compensación en los dos anteriores y provoca sobreinversión en capital humano para que su tasa de retorno pueda igualarse a la del resto de activos. De manera paralela a lo establecido en el corolario al resultado de Gómez, esta proposición sigue vigente incluso cuando los rendimientos privados en la producción del bien final son constantes y los rendimientos sociales, crecientes.

Otra propiedad importante de este mismo modelo es que, a mayor intensidad de las externalidades específicas al sector del bien final, el tiempo de trabajo de mercado estacionario en la solución competitiva descentralizada se hará menor y la tasa de crecimiento mayor: en efecto, unas externalidades específicas más acentuadas profundizan la distorsión introducida por el status social en las preferencias, al aumentar en la cpo del capital humano el peso relativo de la ganancia marginal inducida por la inversión, ya que estas últimas implicarán menores niveles salariales o, equivalentemente, costes marginales de la inversión más reducidos. **Esto es, externalidades más fuertes serán equivalentes a una mayor ponderación del status relativo en las preferencias.**

García-Belenguer (2007) propone otro caso específico de externalidades sectoriales, en el que estas se circunscriben al sector productor de bienes finales y adoptan una especificación muy concreta. En concreto, la tecnología de este sector puede describirse como:

$$Y_s = AK_s^{\alpha_k}\left(n_s^w a_s^h\right)^{\alpha_h} k_s^{\hat{\alpha}_k}\left(a_s^h\right)_a^{\hat{\alpha}_h};\ k_s = \frac{K_s}{Ln_s^w};\ \alpha_k + \alpha_h = 1 \text{ (A3.15)}$$

Por lo tanto, se distinguen dos tipos de efectos externos. Uno que concierne al capital físico per cápita en términos de la fuerza de trabajo de mercado, siendo L el conjunto de trabajadores y otro al capital humano “medio” del conjunto de la economía. La novedad respecto al trabajo de Lucas y otros dirigidos a estudiar la dinámica de transición estriba, por tanto, en la inclusión de externalidades relativas al capital físico con un componente específico al sector, como es su definición en términos de las horas trabajadas en el mismo. El hecho de que la función de aprendizaje no emplee en este modelo el capital físico como input sitúa este tipo de externalidades de capital como “híbridas”, a medio camino entre las agregadas y las específicas sectoriales.

El proceso de acumulación de capital físico queda descrito por la siguiente ecuación dinámica, diferente también a la del modelo de Lucas y en general a la mayor parte de la literatura de crecimiento:

$$K_{s+1} = Q_s^{1-\varepsilon}\left(a_s^h\right)^{\varepsilon} i_s^k + \left(1-\delta^k\right)K_s;\; Q_s = Q_0 g^s;\; g \geq 0 \quad \text{(A3.16)}$$

La acumulación de capital físico se ve afectada, por tanto, por un proceso de aumento de su productividad dependiente tanto de progreso técnico exógeno (se supone que cada generación de capital incorpora un mayor nivel de productividad), así como del nivel de preparación del capital humano existente en cada período, que se supone más capaz de asimilar dicha evolución tecnológica. La función de aprendizaje presenta rendimientos constantes a escala en capital humano y constantes o decrecientes en el tiempo de aprendizaje; se considera también una tasa de depreciación genérica del capital humano, diferente de la del capital físico. Las preferencias son, como es habitual, de elasticidad de sustitución intertemporal constante y dependientes solamente del consumo, maximizándose a lo largo de un horizonte infinito.

El gobierno desempeña un papel activo en este modelo -si bien las conclusiones principales son robustas a un marco sin intervención pública-, imponiendo tipos proporcionales sobre las rentas del trabajo (τ_L) y del capital (τ_K) del hogar representativo, así como concediendo subvenciones por unidad de tiempo transcurrida en el sistema educativo (θ^e) y fuera del trabajo, dentro de un marco equilibrado presupuestariamente período a período; además inyecta transferencias de suma fija en la renta disponible de los miembros de la dinastía. Las restricciones presupuestarias del gobierno y del agente representativo, con estos supuestos, serán:

$$C_s + i_s^K \leq \left(1-\tau_K\right)\left(1+r_{s-1}\right)K_s + \left(1-\tau_L\right)e_s a_s^h\left(1-n_s^h\right) + \theta^e e_s a_s^h n_s^h + T_s \quad (A3.17)$$

$$T_s + \theta^e e_s a_s^h n_s^h = \tau_K\left(1+r_{s-1}\right)K_s + \tau_L e_s a_s^h\left(1-n_s^h\right) \quad (A3.18)$$

La existencia de un estado estacionario interior en la asignación de tiempo no está garantizada. En efecto, este puede ser único, doble o no existir, dependiendo de diferentes combinaciones paramétricas; la posibilidad de encontrar estados estacionarios múltiples dependerá también de los tres parámetros fiscales comentados. En general la existencia de una doble senda estacionaria será tanto más probable cuanto mayor sea la elasticidad de elasticidad de sustitución del consumo, más intensas las externalidades y los rendimientos del tiempo de aprendizaje sean decrecientes. En cuanto a las propiedades dinámicas locales del estado estacionario: i) cuando este es único, una elasticidad de sustitución intertemporal suficientemente baja determinará estabilidad punto de silla; ii) cuando es doble, el de crecimiento más alto será estable, pero el de crecimiento bajo es indeterminado o inestable, por lo que surge la posibilidad de que aparezca una trampa de crecimiento. En este sentido, la verosimilitud empírica de la indeterminación local es mayor en un escenario de doble estado estacionario y trampa de pobreza que en otro de equilibrio estacionario único. Por otro lado, los mecanismos que incluye el modelo hacen más factible la aparición de indeterminaciones que otros en los que las externalidades agregadas se limitan al capital humano en la producción de bien final: para saltar a otra senda de convergencia hacia el equilibrio estacionario más intensiva, pongamos, en capital físico, será necesario mantener una tasa de retorno más alta del mismo, lo que exige la aplicación de más horas a la acumulación de capital humano y el aprendizaje. En este modelo, este fenómeno presenta sus propias externalidades en la ecuación de acumulación de capital físico, pero además se ve reforzado por la externalidad capital/horas de trabajo de mercado. Por tanto, estos dos canales incrementan la probabilidad de indeterminación local en comparación con otros que no los reflejan. Es más, la acumulación de estos dos efectos externos potencia la magnitud del salto en la tasa de retorno del capital físico entre una senda y otra, lo que hace más fácil la indeterminación sin necesidad de exigir valores excesivamente altos a la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Hay que destacar también que la indeterminación no es consecuencia en este modelo de reversiones en las intensidades factoriales provocadas por los impuestos, como en otros que se abordan posteriormente, lo que no obsta para que impuestos y subvenciones jueguen su propio papel en la determinación del número de estados estacionarios y en la dinámica de transición local.

El análisis dinámico global del modelo muestra que, si el tamaño de las externalidades en el stock medio de capital humano es menor que la participación del capital físico en el output y los impuestos sobre el capital físico no son excesivamente altos, entonces la senda de equilibrio general presenta monotonicidad, propiedad que asegura la existencia de un continuo de equilibrios de Markov. El que esto pueda dejar de suceder se debe en última instancia al conjunto de externalidades del modelo y al vector de valores de las tasas impositivas y subvenciones; de hecho es posible demostrar que, en ausencia de efectos externos, siempre existe una sucesión de equilibrios de Markov para cualquier esquema fiscal factible basado en tipos fijos de imposición y subvención.

El trabajo de García-Belenguer ha generado varias reacciones. En la primera, los efectos externos procedentes en la ratio de capitales se privan de su carácter sectorial específico y se generalizan al conjunto de la economía, al objeto de generar rendimientos sociales más consistentes con la evidencia empírica. El ejemplo más notable dentro de esta línea es el trabajo de **Brito y Vendetti (2010)** se centran en el análisis de un caso especial dentro de las tecnologías generales propuestas por Mulligan y Sala-i-Martí (1993): aquel caracterizado por efectos externos en los dos sectores y, simultáneamente, el mantenimiento de rendimientos constantes a escala sociales en ambas tecnologías. Se trata de una aportación importante, puesto que concilia resultados de multiplicidad de equilibrios estacionarios e indeterminación la existencia de externalidades sin recurrir a no convexidades, dada la tendencia de la evidencia empírica a señalar que las funciones de producción agregadas suelen caracterizarse por la existencia de rendimientos constantes a escala en el conjunto de sus inputs; a este respecto véase, por ejemplo, el trabajo de Basu y Fernald (1997) referido a la economía estadounidense.

En concreto, las dos funciones de producción consideradas para el bien final y el capital humano son las siguientes:

$$Y_s = A\left(n_s^{K,Y} K_s\right)^{\alpha}\left(n_s^{w} a_s^{h}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{K_s}{a_s^{h}}\right)^{\hat{\alpha}};\hat{\alpha}\in[0,1]\ (A3.19)$$

$$a_{s+1}^{h} = B\left(n_s^{K,H} K_s\right)^{\beta}\left(n_s^{h} a_s^{h}\right)^{1-\beta}\left(\frac{K_s}{a_s^{h}}\right)^{\hat{\beta}};\hat{\beta}\in[0,1]\ (A3.20)$$

Por lo demás, las tasas de depreciación de ambos activos reales se consideran nulas y las preferencias, de elasticidad de sustitución constante, dependen únicamente del consumo. En este contexto y bajo ciertas condiciones paramétricas relativas a los valores de las elasticidades de trabajo y capital en las dos funciones de producción, que no exigen una ordenación definida en intensidad en capital físico entre sectores pero que sí demandan la existencia de externalidades en al menos una de las tecnologías, existirán dos sendas de equilibrio estacionario. En concreto, habrá dos estados estacionarios incluso sin externalidades en la producción del bien final si la elasticidad del capital en este último sector es inferior a la que caracteriza la función de aprendizaje, perviven externalidades en el sector educativo y se verifican ciertas relaciones entre parámetros. En el caso opuesto (externalidades en el bien final, pero ausencia de las mismas en el sector educativo) existirán dos sendas estacionarias si y solo si la elasticidad del capital en este último sector es no nula; caso por tanto que el capital físico no intervenga en la producción de capita humano, la multiplicidad de equilibrios estacionarios queda excluida. El modelo de Uzawa-Lucas, por tanto, quedaría incluido en este caso particular, aunque con una formulación diferente de las externalidades. De estas dos sendas estacionarias, pueden ser bien las dos localmente indeterminadas, bien una determinada y la otra indeterminada.

El análisis dinámico del modelo proporciona además las condiciones de estabilidad global, supuesto que se verifiquen los requisitos para la existencia de dos equilibrios estacionarios. Para cualquier valor positivo de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, cuando la intensidad en capital físico es superior en el sector educativo que en el del bien final, hay un conjunto de condiciones iniciales que conducen a una trampa de pobreza, esto es, la senda de equilibrio conduce al estado estacionario de bajo crecimiento, pudiendo tener el equilibrio de alto crecimiento estabilidad local de punto de silla y estando marcado el de bajo crecimiento por indeterminación local. Este es un resultado importante, por cuanto que marca una diferencia importante con la mayor parte de modelos con efectos externos, ya que no exige que la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo adopte valores elevados para que se transite hacia una trampa de pobreza. Al mismo tiempo, cuando la elasticidad de sustitución intertemporal es inferior a la unidad -y el sector educativo sigue siendo el más intensivo en capital físico-, la indeterminación global se sustanciará en la existencia de dos conjuntos de medida positiva de valores iniciales, uno de los cuales -el más amplio- conduce al equilibrio de alto crecimiento, mientras que el otro converge al de bajo crecimiento. Cuando existen dos estados estacionarios y el sector del bien final es intensivo en capital físico, existe siempre un conjunto de condiciones iniciales que hacen converger al sistema al equilibrio de alto crecimiento.

Antocci, Galeotti y Russu (2012) centran su atención en la dinámica global del modelo de Brito y Vendetti, delimitando en varios casos notables del modelo las condiciones bajo las cuales pueden aparecer simultáneamente varios tipos de indeterminación global. Por ejemplo, cuando la intensidad de las externalidades es la misma en los dos sectores productores, pueden existir dos estados estacionarios cuando la intensidad del capital físico es mayor en el sector educativo que en el del bien final. En tal situación, si además se verifican determinadas relaciones entre los parámetros que intervienen en las trayectorias de las endógenas, uno de estos estados estacionarios tendrá estabilidad de punto de silla, mientras que el otro será un repulsor, teniendo en torno a sí un ciclo con límite. En esta situación se produce indeterminación global en un doble sentido. En la acepción más convencional, existe un número de puntos P en cuyo entorno pueden encontrarse puntos Q para los que, dados valores fijos del cociente entre los dos capitales, el sistema puede converger hacia cualquiera de los dos equilibrios estacionarios dependiendo de las expectativas de los agentes. Pero al mismo tiempo, incluso aunque el repulsor no es alcanzable, exisitirían múltiples sendas que describirían ciclos en torno al mismo. La riqueza del marco de Brito y Vendetti en cuanto a la generación de dinámicas globales es, pues, importante y demuestra en última instancia que la indeterminación local es una pieza de información claramente insuficiente para describir la dinámica de un modelo.

Mattana, Nishimura y Shigoka (2009) plantean un modelo en la línea de Uzawa-Lucas, si bien las externalidades no son producidas por el stock de ninguno de los dos tipos de capital, sino a resultas de la interacción de los flujos de inversión en capital humano. Sentada esta premisa, las externalidades se ubican solamente en la función de aprendizaje (con rendimientos costantes en cada uno de sus dos inputs privados), mientras que la función de producción del bien final se define exclusivamente a partir de inputs privados y dotada de rendimientos constantes a escala en estos últimos:

$$Y_s = AK_s^{\alpha}\left(n_s^w a_s^h\right)^{1-\alpha} \quad (A3.21)$$

$$i_s^h = Ba_s^h n_s^h \left(n_s^h\right)_a^{\hat{\beta}_n} \quad (\mathrm{A3.22})$$

Dependiendo de las relaciones que verifiquen los parámetros, el modelo puede presentar un número de sendas estacionarias comprendido entre cero y dos. Desde el punto de vista dinámico, esta posible multiplicidad de sendas estacionarias se traduce en indeterminación global, con sendas de equilibrio general que siguen bifurcaciones homoclínicas o ciclos periódicos, bajo distintas condiciones paramétricas.

Modelos con efectos externos en consumo y ocio.Tomando como precedente el trabajo de Galí (1994), fuera del contexto de la teoría de capital humano, **Gómez (2007)** aborda las consecuencias sobre el equilibrio estacionario de externalidades basadas en el ocio y en el consumo, por contraposición a las articuladas en torno a las diferencias entre las tecnologías privadas y sociales. Mientras las primeras reflejarían la necesidad de interacción social para disfrutar del tiempo de ocio -desde la perspectiva de Becker, equivaldría por tanto a admitir que determinadas commodities requieren en su tecnología no solamente el tiempo propio-, las segundas denotarían percepciones del consumo del conjunto de la sociedad que revierten hacia la satisfacción personal. De esta manera, centrando el análisis en la utilidad del agente representativo, esta tendría de nuevo elasticidad de sustitución intertemporal constante y vendría dada por la siguiente función:

$$U=\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s}\left[\frac{C_{s}C_{a,s}^{\nu}\left(n_{s}^{C}\left(n_{a,s}^{C}\right)^{\psi}\right)^{\eta}}{1-\sigma}\right]^{1-\sigma} \; ; \; \sigma>0 \quad \text{(A3.23)}$$

A priori se admiten signos tanto positivos como negativos en los parámetros que definen el impacto de las externalidades sobre la satisfacción. Por ejemplo, si $\nu<0$ hablaríamos de "celos" respecto al consumo del conjunto de la sociedad, mientras que si dicho parámetro tuviera un signo positivo estaríamos ante un efecto "admiración". Algo parecido podría decirse sobre el signo de ψ : el que sea negativo o positivo dependerá de si la interacción en el tiempo de ocio con el resto de la sociedad presenta complementariedades o por el contrario tiende a restringir el disfrute del tiempo propio (pensemos, por ejemplo, en efectos de congestión). En estas condiciones, la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo viene dada por:

$$\varepsilon=\frac{1}{\left[\sigma+\nu(\sigma-1)\right]} \quad \text{(A3.24)}$$

Esto es, el impacto de las externalidades en consumo, de ser positivo el parámetro correspondiente, es de mitigación de la elasticidad de sustitución siempre y cuando σ sea inferior a la unidad. El tiempo disponible por período se reparte entre aprendizaje, trabajo en la producción del bien final y ocio. La función de aprendizaje se plantea à la Lucas, con rendimientos constantes del capital humano y tiempo de aprendizaje proporcional a este activo. La tasa de depreciación de este activo es nula, como también la del capital físico. La función de producción del bien final es una Cobb-Douglas de rendimientos constantes en el conjunto de inputs privados, capital físico y humano, sin efectos externos en ninguno de estos inputs. Se admite la posibilidad de que el gobierno realice una actividad fiscal de parámetros no nulos, con imposición a tipo proporcional sobre el consumo, las rentas del capital físico y las del capital humano, compensadas por subvenciones de suma fija a las economías domésticas. Esta actividad se supone equilibrada presupuestariamente, de manera que el monto total de la recaudación iguala a las transferencias efectuadas.

Cuando los parámetros fiscales toman valores positivos, **el equilibrio general descentralizado** queda caracterizado por la elección de sendas de consumo, inversión en cada uno de los dos activos reales y asignación de tiempo dados los valores iniciales de la posición en capital físico y capital humano, así como las sendas de los precios de los factores, los tipos impositivos y la cuantía de las subvenciones, de modo que dicho conjunto de sendas simultáneamente maximicen la utilidad del hogar representativo y los beneficios empresariales. Respecto a las variables cuyo valor medio genera efectos externos, se optimiza respecto a las variables privadas y para resolver se sustituye en las condiciones de primer orden los valores “medios” o “sociales” de consumo y ocio a través de la condición de simetría, en virtud de la cual aquellos serán iguales a la elección del consumidor representativo. Esta consideración marca la diferencia principal con el equilibrio general resultante de solucionar el problema del planificador centralizado, en el que se sustituye en el lagrangiano los valores sociales por la condición de simetría y solamente después se optimiza respecto a las variables privadas. Los tipos impositivos afectan tanto a la sendas de transición de las variables endógenas como, en equilibrio estacionario, a la asignación del tiempo y a la tasa de crecimiento del output final. Tanto en la solución descentralizada como en la del planificador central pueden existir hasta dos equilibrios estacionarios. Aun así el autor supone el cumplimiento de las condiciones parametricas que conducen a la existencia de un solo equilibrio estacionario y se concentra en analizar las propiedades del mismo, soslayando el estudio de la dinámica de transición.

En el equilibrio estacionario descentralizado, las externalidades positivas del consumo reducen la tasa de crecimiento del output final cuando $\sigma > 1$, a través de un doble efecto: uno directo, ya que una mayor elasticidad de sustitución intertemporal del consumo implica una mayor suavización y un desplazamiento más intenso de consumo futuro a presente y otro indirecto, ya que a su vez esto implica un mayor ocio a largo plazo, dada la complementariedad entre factores. Es más, cuanto mayor sea el peso de la externalidades del consumo, tanto menor la elasticidad efectiva de sustitución y mayor el ocio de equilibrio a largo plazo. Lo contrario puede decirse con elasticidades de sustitución relativamente altas y, cuando esta es unitaria, entonces la externalidad en consumo no tiene impacto sobre la tasa de crecimiento en equilibrio estacionario. Por otro lado, las externalidades del ocio, en la medida en que no influyen en la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, tampoco tienen impacto sobre el equilibrio estacionario, aunque sí en las tasas de crecimiento de las variables endógenas durante la transición. Este resultado descansa en la homotecia de la función de utilidad, de modo que es la elasticidad de sustitución intertemporal efectiva del consumo -de la cual está ausente la elasticidad del ocio medio- la que gobierna la proporción entre los dos inputs a lo largo de la senda de equilibrio.

La solución del planificador presenta varias diferencias con la solución descentralizada, siendo la principal de todas ellas la consideración de una relación marginal de sustitución socialmente eficiente entre consumo y ocio que internaliza los efectos externos de uno y otro. La primera implicación del hecho anterior es que las externalidades positivas del ocio afectan al estado estacionario. En concreto, al incrementar la valoración relativa del ocio en términos del consumo, hace -ceteris paribus- que la tasa de crecimiento del output final sea menor. Otra consecuencia viene dada por un efecto algo distinto de las externalidades del consumo medio sobre el estado estacionario. A este respecto, es posible demostrar que el efecto de una variación en el ocio estacionario a consecuencia de una alteración de las externalidades en consumo puede descomponerse en la suma ponderada de los efectos obtenidos a través de dos canales: la elasticidad de sustitución del consumo efectiva y la relación marginal de sustitución eficiente entre ocio y consumo. Teniendo esto presente, mientras en el equilibrio descentralizado una elevada elasticidad de la externalidad en consumo, combinada con una elasticidad de sustitución intertemporal relativamente baja, hacía la tasa de crecimiento del output final menor, ahora el impacto es ambiguo: por una parte una elasticidad reducida contribuye a desplazar ocio hacia el equilibrio a largo plazo, pero por otra una RMS eficiente entre consumo y ocio menor implica una menor demanda de ocio para cada par de precios relativos, por lo que no puede determinarse a priori el signo resultante de combinar ambos efectos. No obstante, cuando la elasticidad de sustitución intertemporal es alta los dos efectos presentan el mismo signo y contribuyen a crear un impacto positivo sobre la tasa de crecimiento del output final, coincidiendo así con el equilibrio descentralizado; en efecto, una elasticidad alta reduce el alisado del consumo y desplaza hacia el futuro tiempo productivo, mientras que la RMS eficiente dada por las externalidades positivas del consumo implica una menor demanda de ocio. Cuando $\sigma = 1$ una mayor elasticidad de la externalidad en consumo no influye en la elasticidad de sustitución efectiva, aunque sí en la RMS eficiente, por lo que es enteramente el efecto en esta última el que arrastra el signo final.

Resulta también interesante comparar otros aspectos del contenido de la solución descentralizada competitiva y de planificación central en equilibrio estacionario. Cuando la elasticidad de la externalidad en consumo en la función de utilidad es inferior a la del ocio, el ocio estacionario en el equilibrio descentralizado será inferior al ocio estacionario del planificador. En efecto, la relación marginal de sustitución social entre consumo y ocio será en esta situación superior a la privada, lo que explica que el ocio quede relativamente penalizado respecto al consumo en la solución competitiva. Por la misma razón, la tasa de crecimiento del output y el tipo de interés real resultantes del equilibrio estacionario descentralizado serán superiores a los socialmente óptimos. En cuanto al tiempo de trabajo, el signo de su diferencia con el óptimo social dependerá del valor de σ en relación a la unidad. Así, con una elasticidad intertemporal de sustitución relativamente baja, el déficit de ocio tenderá a compensarse mediante un exceso de tiempo de trabajo de mercado para financiar un mayor consumo presente y lo inverso sucederá cuando dicha elasticidad sea relativamente alta, circunstancia en la que se primará el tiempo de aprendizaje y se penalizará el tiempo de trabajo en relación con el óptimo social[249]. Todo lo dicho se aplica en sentido contrario cuando la elasticidad del consumo medio en la función de utilidad es superior a la del ocio y, cuando ambas coinciden, el estado estacionario descentralizado coincidirá con el derivado por el planificador social.

Azariadis, Chen, Lu y Wang (2013), partiendo de un modelo en la línea del trabajo anterior de Gómez, investigan el efecto de las externalidades de ocio en la función de utilidad cuando esta es aditiva en ocio y consumo y no homotética, no existiendo además externalidades en el consumo medio. Así, la función de utilidad adopta la siguiente forma:

$$u_s = \ln C_s + \omega \frac{\left(n_s^C \left(n_{a,s}^C\right)^{\psi}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad \text{(A3.25)}$$

Las dos tecnologías de producción del bien final y capital humano son Cobb-Douglas, sin efectos externos en ninguno de sus dos inputs y con rendimientos constantes a escala en el conjunto de los inputs privados. El capital físico contribuye a la producción en ambos sectores. Las tasas de depreciación de las dos clases de capital son nulas.

Al resolver el modelo, se aprecia que existe un conjunto de restricciones paramétricas que posibilitan la existencia de un solo estado estacionario vía solución única para el tiempo de aprendizaje y, de ahí, para la tasa de crecimiento del capital humano y las restantes variables endógenas. Sin embargo, la obtención de este resultado depende crucialmente de que la elasticidad del capital físico en la función de aprendizaje sea no nula, ya que de este modo esta última será estrictamente cóncava en capital humano y este hecho podrá compensar la no concavidad de la función de utilidad y generar una única solución estacionaria. Por el contrario, cuando la mencionada elasticidad se restringe a cero y por tanto la producción de capital humano se realiza solamente sobre la base de tiempo y de valores retardados del propio stock, las ecuaciones que determinan el valor estacionario del tiempo de aprendizaje dependen de esta variable de un modo no monótono, lo que da lugar a múltiples soluciones. Este último escenario está en línea con el obtenido por Benhabib y Perli (1994) y el que se comentará a continuación de Ladrón de Guevara et al. (1997) al introducir ocio en la función de utilidad y plantear un papel asimétrico para el capital físico en las dos tecnologías de la economía.

Al margen de esta posible falta de unicidad, la tasa de crecimiento estacionario en el óptimo competitivo descentralizado se ve contaminada por los parámetros relativos al ocio en la función de utilidad, esto es, el peso del ocio total ω , así como la intensidad de las

[249] Como se desprende de esta relación, una elasticidad de sustitución intertemporal unitaria dará lugar a una elección de tiempo de trabajo igual al óptimo social.

externalidades de ocio ψ , a diferencia de lo que ocurría en Gómez (2007) debido a una estructura de preferencias diferente. De esta manera, en equilibrio estacionario la magnitud de las externalidades de ocio impacta sobre la tasa de crecimiento del output final en función del signo del producto $\psi(1-\sigma)$. Cuando el signo es positivo, situación compatible con un efecto externo tipo "admiración" y una elevada elasticidad marginal de sustitución intertemporal, la utilidad marginal del ocio privado es creciente respecto al efecto externo y por tanto aumenta la valoración relativa del ocio privado en relación al consumo, lo que lleva al hogar a elegir una mayor fracción de tiempo destinada a ocio. A su vez esto implica que para producir igual cantidad de bienes y, consecuentemente, aumentar la proporción de tiempo destinada al trabajo de mercado, será necesario contraer en mayor medida el tiempo de aprendizaje, lo que implica una reducción de la tasa de crecimiento del output final.

Capital humano como bien de consumo duradero. Otro área que ha merecido atención a causa de sus implicaciones sobre la posible emergencia de indeterminaciones es la consideración del capital humano como un bien de consumo duradero, esto es, la introducción del capital humano en la función de producción, como si se tratara de un bien de consumo duradero -recordemos que Grossman (1971) había sido el pionero en este tipo de esquema, aunque en un contexto de equilibrio parcial[250]-. **Chakraborty y Gupta (2006)** emplean las mismas especificaciones funcionales que Lucas (incluyendo efectos externos agregados del capital humano en la tecnología de producción del final, con rendimientos constantes en el conjunto de inputs privados), solo que en la función de utilidad combinan el bien de consumo perecedero (C) como el duradero (capital humano), manteniendo la estructura de elasticidad de sustitución intertemporal constante. De este modo, la especificación de la función es la siguiente:

$$U=\frac{\left(C_s^{\psi}\left(a_s^h\right)^{1-\psi}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma};\sigma>0;0\leq\psi\leq1 \text{ (A3.26)}$$

Esta variante presenta dos diferencias esenciales respecto a los resultados de Lucas. Primera, la tasa de crecimiento del stock de capital humano en estado estacionario es, en general, superior para soluciones interiores del tiempo de aprendizaje, al ser también mayor la tasa de retorno del activo. Además, bajo ciertas condiciones paramétricas el modelo es susceptible de generar más de una solución estacionaria para el tiempo de aprendizaje. Este último extremo es intuitivo. Cuando el capital humano está ausente de la función de utilidad, la tasa de crecimiento del precio sombra del capital humano no depende de este último, sino en esencia de la productividad del tiempo de aprendizaje.

250 Este tipo de construcción se aborda en el capítulo 3 sobre tasas de retorno.

Así pues, la ecuación en diferencias del tiempo de aprendizaje dependerá solamente de B (así como de otros parámetros dados del modelo) y por tanto presentará una única solución. Sin embargo, cuando el capital humano forma parte de las preferencias del hogar representativo (esto es, $\psi < 1$), la tasa de variación del precio sombra del capital humano dependerá de la relación marginal de sustitución intertemporal del consumo, la cual a su vez depende de la tasa de crecimiento del capital humano. Por lo tanto, en determinados casos pueden aparecer dos soluciones para la fracción de tiempo de aprendizaje y, en consecuencia, dos equilibrios estacionarios completos diferenciados entre sí por las tasas de crecimiento del capital humano.

Los autores estudian también la dinámica de transición del modelo. La estructura dinámica no varía en esencia respecto al modelo estándar cuando el capital humano se incluye como argumento en la función de utilidad: las condiciones de primer orden pueden reexpresarse, como siempre, en función de tres ecuaciones que reflejan la dinámica del tiempo de aprendizaje (o de trabajo), la ratio consumo-capital físico y la ratio capital físico-capital humano. Centrándonos en el caso en que existe dos sendas estacionarias, éstas presentan estabilidad local de punto de silla con tanta mayor probabilidad cuanto menor sea la intensidad de la externalidad en capital humano y cuanto menor sea la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo; en este sentido el resultado es análogo al de Benhabib y Perli (1994) y Xie (1994) en el modelo estándar de Uzawa-Lucas, aunque en los modelos de estos autores solamente existía un estado estacionario cuando el ocio no formaba parte de la función de utilidad. No obstante, para valores elevados de los rendimientos sociales en el sector del bien final no puede excluirse la indeterminación local del modelo. Cuando hay dos más de dos estados estados estacionarios hay indeterminación global, en el sentido de que son las condiciones iniciales de los stocks y el tiempo de tabajo los que determinan hacia cuál de ellos converge el sistema a largo plazo.

Modelos sin efectos externos. **Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1997)** estudian, basándose en el enfoque de Caballé y Santos (1993), la dinámica de la extensión del modelo de Lucas (sin efectos externos) propuesta por King, Plosser y Rebelo (1988), con capital físico en la función de producción de capital humano (con rendimientos constantes en ambas tecnologías), tanto con como sin ocio en la función de utilidad. El análisis se realiza añadiendo supuestos secuencialmente, para precisar la incidencia sobre el resultado de cada uno de ellos.

Comenzando por la consideración del capital físico como input en la producción de capital humano, la estabilidad global se verifica cualquiera que sea el sector más intensivo en capital físico, esto es, se converge a una única senda estacionaria desde cualquier punto de partida del sistema. También se discute en este contexto algunas propiedades dinamicas del modelo y, en particular, el efecto sobre las características del estado estacionario de shocks permanentes en la dotación de capital físico. En efecto, un incremento de la dotación de este activo llevará consigo un efecto cantidad (por el teorema de Rybczinski, aumentará la producción del sector relativamente intensivo en capital físico) y a la vez un efecto precio, ya que se abaratará en términos relativos el precio sombra del factor cuya dotación se ha expandido y a su vez esto impulsará la producción de ambos sectores. Cuando el sector educativo es relativamente intensivo en capital físico, ambos efectos apuntan en la misma dirección: aumenta la producción de capital humano tanto por el efecto cantidad como por el precio, ya que al reducirse el precio sombra relativo del capital físico la producción se desplaza hacia el sector educativo, lo que elevará el crecimiento. Sin embargo, cuando el sector productor del bien de consumo es el más intensivo en capital físico (o cuando el sector educativo no utiliza en absoluto como input capital físico, como en Lucas) entonces puede a priori no se sabe qué resultado predomina: por un lado aumenta la producción del propio bien final pero, por otro, se reduce su precio, por lo que hay mayores incentivos a transferir recursos productivos hacia el sector educativo. A este respecto se concluye que cuando el inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo es superior a la elasticidad del capital físico en la tecnología del bien final (en la nomenclatura que se viene utilizando $\sigma > \alpha_k$), el régimen que prevalece es el un tránsito hacia un equilibrio de mayor crecimiento, debido a una reasignación de recursos hacia el sector educativo (este es el denominado “régimen estándar de Lucas”); cuando la relación entre ambos parámetros es la inversa, se observará un menor crecimiento (“paradoja de Lucas”), mientras que cuando son iguales el equilibrio estacionario será invariante frente a cambios en las dotaciones (exogeneidad de la senda estacionaria).

La siguiente extensión abordada por este trabajo se refiere a la introducción del ocio en la función de utilidad, a través de dos estrategias diferentes. En la primera, en una línea más beckeriana el tiempo de ocio, o destinado a la producción de commodities, se cualifica de acuerdo con el stock de capital humano acumulado. De esta manera, continuando con el empleo de funciones de elasticidad de sustitución intertemporal constante, la función de utilidad adoptará la siguiente forma:

$$U_s = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\left[C_s^{\theta} \left(n_s^C a_s^h \right)^{1-\theta} \right]^{1-\sigma}}{1-\sigma}; \sigma \neq 1 \\ \theta \ln C_s + (1-\theta) \ln \left(n_s^C a_s^h \right); \sigma = 1 \end{matrix} \right\}; \ 0 < \theta \leq 1 \ (A3.27)$$

$$1 = n_s^C + n_s^h + n_s^w \quad (A3.28)$$

El planteamiento de esta versión del modelo con ocio presenta dos diferencias con Benhabib y Perli (1994): la existencia de un tiempo de ocio como tal en sentido estricto (en el artículo anterior se trataba de desutilidad del trabajo, sin que se reservara una franja del tiempo a la producción de commodities) y además la dimensión “calidad” del tiempo de ocio a través del stock de capital humano como factor multiplicativo. El equilibrio estacionario que presenta el modelo bajo estas hipótesis, siempre que F sea cóncava en sus dos argumentos y G[251] sea creciente y cóncava, es único y se verifica estabilidad global. Los regímenes de crecimiento estacionario tras shocks en dotaciones de capital como los descritos antes seguirán dependiendo de la relación paramétrica comentada.

La segunda vía de introducción del ocio que explora el artículo es su condición de argumento directo en la función de utilidad, sin prestar atención a su calidad y por tanto sin corregir por la posición en capital humano. La función de utilidad de la que se parte es una separable en consumo y ocio, con parte logarítmica para el consumo:

$$U_s = \ln C_s + z\left(n_s^h\right)^{\upsilon} \quad \text{(A3.29)}$$

Si las propiedades de F y G que exigimos antes se mantienen, para esta especificación concreta de la función de utilidad puede existir más de un equilibrio estacionario: a pesar de que el valor de n^w es único, el ocio estacionario puede presentar más de una solución, lo que tendrá consecuencias sobre el tiempo de aprendizaje, el crecimiento del capital humano y las restantes variables. La potencial pluralidad de equilibrios estacionarios implica además que alguno de ellos será localmente inestable; por otro lado, la convergencia a una u otra senda estacionaria dependerá de la ratio inicial de capitales, lo que lleva consigo la inestabilidad global del modelo, incluso sin haber supuesto efectos externos, a diferencia de Benhabib y Perli (1994). Es más, dada la inestabilidad de algunas sendas estacionarias cuando su número es impar y mayor a uno, la senda de transición nin siquiera llegará a estos, sino que a partir de cierto momento derivará hacia uno de los equilibrios estacionarios contiguos. Por otro lado, se observa a través de ejercicios de simulación que, como resulta intuitivo, equilibrios estacionarios con mayores stocks de capital físico se caracterizan por menores tasas de crecimiento, mayor consumo y mayor tiempo de ocio.

En cuanto a la dinámica comparativa de esta variante del modelo, de nuevo se estudian las condiciones paramétricas que determinan la aparición de equilibrios “normales”,

---

[251] Se toma la siguiente función de producción de capital humano en esta variante: $a_{s+1}^h = a_s^h G\left(n_s^h\right)$

"paradójicos" y "exógenos" cuando se produce un shock externo sobre las dotaciones de capital físico. A pesar de que la utilidad logarítmica del consumo lleva asociada una elasticidad intertemporal de sustitución unitaria, el régimen estándar, que comportaría el paso a un nuevo equilibrio con mayor crecimiento, no está garantizado y depende en buena medida del parámetro υ , que influye sobre la relación marginal de sustitución entre ocio y consumo. En efecto, el aumento de la dotación de capital físico va a compañada de un doble efecto: uno sustitución, por el que se prima el consumo frente al ocio a consecuencia de una caída del precio relativo del consumo (disminuye el precio sombra del capital físico y aumenta el precio del ocio, al elevarse la productividad marginal del trabajo en F), y al mismo tiempo un efecto riqueza positivo que aumenta la demanda de ocio, dado por el aumento de las retribuciones al trabajo que posibilita la mencionada mejora de su productividad marginal. Cuando menor sea el efecto sustitución (mayor sea υ), tanto más pesará en términos relativos el efecto riqueza, con un impacto positivo sobre la demanda de ocio. De este modo, en el régimen "paradójico" incluso aunque el tiempo de trabajo disminuya, el aumento del ocio tiene una cuantía suficiente como para generar un efecto neto de reducción sobre el tiempo de aprendizaje.

La relevancia empírica de estos resultados es notable, si bien depende de un supuesto discutible: el hecho de que la productividad marginal del capital humano sobre el tiempo de ocio es diferente de aquella sobre los restantes sectores productivos. Si aceptamos esta simplificación, la multiplicidad de equilibrios estacionarios significa que, Incluso en ausencia de externalidades, países con características productivas muy similares pueden acabar con tasas de crecimiento a largo plazo muy distintas, dependiendo de cuál sea su dotación inicial relativa de capital físico y humano. Es más, las conclusiones muestran también que países con un nivel educativo relativamente bajo (o con una proporción de capital físico elevada) propenden a crecer menos, al tener mayores incentivos a dedicar una fracción sustancial de su tiempo a ocio en lugar de al aprendizaje y a acumulación de capital humano. En este marco, el desarrollo de políticas tendentes a facilitar la acumulación de capital humano es clave.

Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1999) amplían su análiisis anterior en varias direcciones. En primer lugar, introducen costes de ajuste sobre la inversión en capital físico, a partir de una función del tipo $m\left(i_s / k_s\right)$, siendo m creciente y convexa para valores de la ratio superiores a un umbral y nula por debajo de aquel. Cuando la tecnología del capital humano presenta rendimientos constantes a escala, la discusión de resultados es muy similar a la obtenida en el artículo de 1997, aunque la especificación de la función de utilidad, siempre con elasticidad de sustitución intertemporal constante, admite una utilidad no logarítmica en el consumo, siendo el otro argumento de las preferencias ocio no aumentado por el capital humano. De nuevo el número de sendas estacionarias puede ser superior a 1, y cuando σ , la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, es inferior a 1, la senda estacionaria más dotada relativamente con capital físico también se caracteriza por un menor tiempo de trabajo, además de por un menor crecimiento, siendo el ocio el uso del tiempo que más se beneficia de este perfil de las dotaciones. Este trabajo aborda también el caso de rendimientos decrecientes de la tecnología productora de capital humano en el activo, a través de una función del tipo:

$$a_{s+1}^{h} = B\left(1 - n_s^C - n_s^w a_s^h\right)^{\gamma};\ 0 < \gamma < 1 \text{ (A3.30)}$$

En esta versión del modelo existe un único equilibrio estacionario caracterizado por valores constantes de todas las endógenas (consumo, los dos stocks de capital y los tres usos del tiempo). Por otro lado, la linearización de las condiciones de primer orden de esta versión del modelo revela que el único equilibrio estacionario existente presenta es localmente estable.

Mino (1999, 2001, 2002) es un ejemplo representativo de aparición de indeterminaciones sin necesidad de recurrir a externalidades en el capital humano, siendo la clave la no separabilidad de ocio y consumo en las preferencias del hogar representativo. En efecto, estas de nuevo pueden representarse a través de una función de elasticidad de sustitución intertemporal constante:

$$U = \frac{\left(C_s \psi\left(n_s^C\right)\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \text{ (A3.31)}$$

Dentro de estas preferencias, se ψ es una función creciente y cóncava sujeta a ciertas restricciones paramétricas concernientes a su primera y segunda derivada. En cuanto al lado de la oferta, tanto F como h presentan efectos externos en ambos tipos de capital, si bien los rendimientos son constantes. Definidos estos supuestos, se estudia la posibilidad de aparición de indeterminaciones explicitando las trayectorias de transición, para lo cual se adopta el mismo supuesto que en Xie (1994), relativo a la igualdad entre la inversa de la elasticidad intertemporal del consumo y la elasticidad del capital físico en la función de producción del bien final. Bajos estos supuestos, pueden surgir indeterminaciones. En concreto, se concluye que si existe una única senda de crecimiento estacionario esta será localmente indeterminada o totalmente inestable mientras que si existen dos, la de mayor crecimiento será localmente determinada mientras que la de menor crecimiento resultará localmente indeterminada o totalmente inestable.

En una segunda versión del modelo, Mino utiliza tiempo de ocio cualificado por capital humano à la Becker. En tal caso la función de utilidad adoptaría la forma:

$$U = \frac{\left(C_s \psi(a_s^h n_s^c)\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}; \sigma > 0 \text{ (A3.32)}$$

En este segundo escenario, si existe una senda de crecimiento estacionario esta será única y además localmente determinada.

Política fiscal y dinámica de transición. Otra rama de esta literatura intenta reemplazar a los efectos externos como generadores de indeterminaciones por los instrumentos fiscales, tanto en su vertiente de ingresos como gastos. En esta línea, **Bond, Wang y Yip (1996)** parten de un modelo sin efectos externos, con capital físico en ambas tecnologías y rendimientos constantes en los dos factores que intervienen en F y únicamente en el trabajo efectivo en h. La función de utilidad es de elasticidad de sustitución y constante y dependiente únicamente del consumo. Las políticas fiscales de las autoridades se concretan en el establecimiento de impuestos distorsionantes (proporcionales) sobre los rendimientos del trabajo en el sector productor de bienes de consumo, sobre los rendimientos del capital y subvenciones a las horas transcurridas en el sistema educativo.

En ausencia de parámetros fiscales, la clave para entender la dinámica del modelo reside en tres aspectos. Primero, existe un único equilibrio estacionario que tiene estabilidad de punto de silla con independencia de la intensidad relativa en capital de los dos sectores productivos. Segundo, en la dinámica de transición el precio relativo de los dos bienes (como cociente de sus multiplicadores de Langrange respectivos) es independiente de la evolución de consumo y capital físico, al igual que los precios relativos de los factores, que dependerán solamente de los precios relativos de los bienes y de la intensidad relativa en capital de los mismos (teorema de Stolper-Samuelson). Finalmente, el comportamiento del precio relativo durante la transición dependerá de las intensidades relativas en capital de ambos sectores. Cuando la intensidad en capital del bien final es menor que la del capital humano, para un stock relativo de los dos capitales inferior al de equilibrio estacionario el capital físico tenderá a dirigirse hacia la tecnología de producción de capital humano, cuya producción se incrementará en términos relativos respecto a la del bien final. Puesto que en equilibrio estacionario los dos stocks deben volver a crecer a la misma tasa, el consumo deberá caer para que una mayor parte de la producción del bien compuesto pase a alimentar el stock de capital físico. En la medida en que los salarios reales caerán en comparación con el precio del capital (aumenta la producción del sector capital intensivo), esta evolución será consistente con la caída del consumo, haciendo el ajuste estable. Al mismo tiempo, la senda de los precios es inestable en el entorno del equilibrio estacionario, lo que obliga a que estos salten inmediatamente hacia su valor estacionario. Sin embargo, cuando la intensidad en capital del sector productor del bien final es mayor, los precios son estables respecto a su valor estacionario y por tanto pueden aumentar gradualmente, al tiempo que lo hace la proporción entre el capita físico y el humano. Teniendo en cuenta que el consumo saltará a su valor estacionario desde el principio, la mayor producción del bien final exigirá un aumento gradual del precio relativo del capital humano para lograr que su tasa de crecimiento converja de nuevo a la del capital físico al llegar al estado estacionario.

La introducción de impuestos y subvenciones genera cambios en las tasas de crecimiento de equilibrio estacionario, al provocar cambios en las condiciones relevantes de primer orden que las determinan. A su vez, la política fiscal hace más importante la distinción entre intensidades relativas en capital en valor (como participación de los costes de un input sobre los costes totales de producción, adecuadamente corregidos de impuestos y subvenciones) y en unidades físicas. En efecto, al linearizar el sistema de condiciones de primer orden en torno al nuevo equilibrio estacionario se advierte que: 1) el coeficiente que gobierna la evolución de los precios relativos en el entorno del equilibrio estacionario presenta la misma dependencia que antes ante las intensidades en capital (valor) relativas en dos dos sectores y 2) El determinante de la matriz jacobiana del sistema, valorada en el entorno del equilibrio estacionario, depende de la relación entre las diferencias de intensidades relativas en términos físicos y en valor.

Sin embargo cuando los impuestos son suficientemente distorsionantes como para provocar reversiones entre ambas, pueden aparecer situaciones de inestabilidad o indeterminación. Así, cuando el sector productor de capital humano es intensivo en capital después de impuestos, pero intensivo en trabajo antes de impuestos, el nivel de precios relativos salta inmediatamente hacia su equilibrio estacionario (al ser el proceso de ajute de los precios relativos inestable, como sucedía sin política fiscal), por lo que el ajuste se hace a precios fijos y vía cantidades. Ahora bien, la dinámica se hace inestable porque la intensidad en capital en unidades físicas es mayor en el sector del bien final, escenario que exigiría un ajuste gradual del nivel de precios para poder converger al equilibrio estacionario. Por el contrario, cuando el sector educativo en valor es más intensivo en trabajo y en unidades físicas más intensivo en capital, de nuevo un ajuste en precios gradual garantiza la convergencia, pero el determinante del jacobiano presenta dos raíces negativas y una positiva, lo que apunta a un continuo de sendas.

Alonso-Carrera y Freire-Serén (2004) plantean un modelo de tres sectores en el que los instrumentos fiscales también pueden hacer aparecer múltiples equilibrios, incluso afectando simétricamente a los factores productivos, a diferencia de Bond et al. (1996). Las preferencias del consumidor representativo dependen únicamente del consumo y son, como es habitual, de elasticidad de sustitución intertemporal constante. Los 3 sectores considerados son el de bien final, un bien intermedio (E) que se utiliza como input en el sector educativo y la propia producción de capital humano. Todos ellos emplean como inputs trabajo, el del bien final y el bien intermedio capital físico y el de capital humano el bien intermedio. En los 3 casos las tecnologías son Cobb-Douglas, de rendimientos constantes en el conjunto de los inputs y no existen efectos externos. En definitiva, las 3 funciones de producción relevantes quedan recogidas por las siguientes especificaciones, donde A, W y B son las respectivas productividades multifactoriales:

$$Y_s = A\left(n_s^{K,Y} K_s\right)^{\alpha} \left(n_s^{w,Y} a_s^h\right)^{1-\alpha} \quad (A3.33)$$

$$E_s = W\left(n_s^{K,E} K_s\right)^{\eta} \left(n_s^{w,E} a_s^h\right)^{1-\eta} \quad (A3.34)$$

$$a_{s+1}^h = B\left(E_s\right)^{\beta} \left(n_s^h a_s^h\right)^{1-\beta} + \left(1-\delta^h\right) a_s^h \quad (A3.35)$$

$$1 = n_s^{K,Y} + n_s^{K,E}; 1 = n_s^{w,Y} + n_s^{w,E} + n_s^h \quad (A3.36)$$

La actuación fiscal del gobierno se concreta en el establecimiento de impuestos y subvenciones proporcionales y de suma fija, siendo estos últimos endógenos para satisfacer la condición de presupuesto equilibrado en todo período. Se imponen impuestos sobre rentas del capital y laborales (sea cual sea el sector de mercado en el que se generan éstas) y se conceden subvenciones tanto al coste de oportunidad que supone el tiempo de aprendizaje como a la adquisición del bien intermedio en el proceso educativo. La restricción presupuestaria flujo del consumidor representativo comprende, en el lado de los empleos, el gasto el consumo, la inversión en capital físico, los costes derivados de la producción de capital humano, adecuadamente corregidos por los tipos de subvención y los impuestos de suma fija; en de los recursos encontramos las rentas salariales y de capital después de impuestos. Asi, en el trabajo de Bond et. al. encontrábamos dos tipos de distorsiones: aquellas introducidas por los tipos impositivos más otras inducidas por su aplicación de manera no uniforme en el modelo, de manera que dentro del sector de capital humano uno de los factores (trabajo) recibía una subvención, mientras que otro era gravado. Ahora los dos, trabajo y el bien intermedio, son beneficiarios de una subvención.

El equilibrio general se caracterizará por una senda para consumo, inversión en capital físico y humano y asignaciones de tiempo elegidos por el hogar representativo, fracciones de tiempo y cantidades de inputs contratados por la empresa representativa, cumplimiento de la restricción presupuestaria del gobierno, vaciado en el mercado de bienes y en el de bienes intermedios, entrañando este último la igualdad entre las cantidades producidas y las demandadas por los hogares para producir capital humano. La estructura dinámica del modelo queda caracterizada por tres variables: una de estado (la ratio entre los dos tipos de capital humano) y dos de control, la ratio consumo/capital físico y el valor marginal intertemporal del capital humano, del cual dependen los precios relativos y la participación relativa de los inputs en la remuneración sectorial. Una vez más el sistema dinámico linearizado en el entorno del equilibrio estacionario presenta una estructura recursiva, en la que el valor marginal del capital humano y, derivadamente, los precios relativos, presentan una evolución independiente del resto de las variables del sistema.

La senda de equilibrio estacionario se caracteriza, como es habitual, por tasas de crecimiento constantes para los dos stocks de capital y el consumo (siendo iguales estas tasas), así como valores constantes para las fracciones de capital asignadas al sector final y de bienes intermedios, las horas de trabajo en el bien final y el valor marginal intertemporal del capital humano. En estas condiciones existe un único equilibrio estacionario interior. Dicha senda estacionaria, presentará, en ausencia de políticas fiscales, estabilidad de punto de silla siempre que la intensidad en capital del sector de bienes finales sea superior a la propia del de bienes intermedios.

Cuando se ponen en marcha políticas fiscales como las descritas y siempre y cuando tanto el bien intermedio como el tiempo de aprendizaje constituyan inputs del sector productor de capital humano y las tecnologías de bienes de mercado sean diferentes, dependiendo de las combinaciones de los parámetros propios del modelo así como de aquellos representativos de impuestos y subvenciones el equilibrio estacionario podrá mantener su estabilidad local de punto de silla o presentar indeterminación o inestabilidad local. Sintetizando el contenido de estas condiciones, la estabilidad de punto de silla se logrará si y solo si -de nuevo- la ordenación relativa de las intensidades en capital entre una combinación del sector de capital humano y el de bienes intermedios[252] y el de bienes finales es la misma en términos físicos que de costes. Esto se debe a que, aunque el sistema será inestable bien respecto a precios o cantidades, será estable en la otra dimensión, lo que posibilitará la estabilidad local. Supongamos, a modo de ejemplo, que el sector educativo es relativamente intenso en capital en unidades físicas y también intenso en capital en términos de valor o costes. La primera característica implicará que, ante un incremento del precio relativo del capital humano en el entorno del equilibrio estacionario,

---

[252] La combinación se establece mediante la consideración del producto de las elasticidades de capital y bienes intermedios en ambos, esto es, $\beta\eta$. Cuando de ahora en adelante se aluda a la comparación entre las intensidades del sector educativo y de bienes finales, por el primero deberá entenderse esta combinación entre el sector educativo y el de bienes intermedios.

aumentará el precio del alquiler del capital físico (teorema de Stolper-Samuelson), con lo que se elevará la tasa de retorno de este activo frente a la del capital humano. El aumento consiguiente de producción del bien final reducirá la utilidad marginal del consumo y, con ella, el precio sombra relativo del capital físico, por lo que el proceso será inestable desde el punto de vista de los precios. Desde el ángulo de las cantidades, sin embargo, y a consecuencia del teorema de Rybzcinsky, un aumento en la dotación relativa de capital físico tenderá a aumentar compensatoriamente, elevando la producción de capital humano y reduciendo consiguientemente su precio relativo.

Sin embargo, cuando la ordenación de estas intensidades difiere entonces las condiciones de indeterminación e inestabilidad son las opuestas a las obtenidas por Bond et.al: ahora un sector educativo relativamente intensivo en trabajo en coste pero intensivo en capital físico en unidades físicas conducirá a inestabilidad, mientras que en el artículo de referencia era fuente de indeterminación y viceversa. Veamos por qué. La eliminación de la asimetría en la estructura impositiva dentro del sector educativo y su mantenimiento entre sectores de mercado conduce al pleno funcionamiento tanto de los teoremas de Stolper-Samuelson como de Rybzcynski. Cuando el sector educativo es relativamente intensivo en capital físico en unidades físicas, como ya sucedía en Bond, el precio relativo del capital humano es también inestable. Sin embargo, ahora también el ajuste en cantidades es inestable: si en el entorno de la senda de equilibrio estacionario aumenta el stock relativo de capital fisico y capital humano, aumentará la producción relativa de capital físico por ser este intensivo en capital físico en términos de costes, por lo que se acentuará la desviación respecto a la senda estacionaria.

Información suplementaria sobre modelos de LBD e innovación endógena.

Jovanovic (1996), estudia, dentro de una versión estocástica del modelo de Parente, aquella combinación de condiciones iniciales que garantizan la solución de crecimiento constante a largo plazo vía adaptación continua a nuevas tecnologías, diferenciéndolas de aquellas otras que conducen a las empresas a mantener indefinidamente su tecnología y, consiguientemente, las conducen al estancamiento a largo plazo, dada la forma funcional de acumulación de conocimiento. Este último resultado puede producirse debido a una conducta miópica del empresario en un contexto de incertidumbre sobre el proceso estocástico que rige la trayectoria del output y el que gobierna la evolución del capital humano.

Supongamos que el capital humano es una variable estocástica que sigue su propia tendencia de crecimiento dentro de una misma tecnología y que sufre desviaciones aleatorias respecto a esta tendencia dadas por una variable aleatoria z distribuida normalmente. El output depende positivamente de la eficiencia propia del grado tecnológico con que se opera (n), así como negativamente de la varianza observada del capital humano respecto a su tendencia[253]:

$$Y_n = A_n\left[1-\left(a_n^h - E\left(a_n^h\right)\right)^2\right];$$

$$a_n^h = \overline{a}_n^h + z_n^h;\ E\left(a_n^h\right) = \overline{a}_n^h;\ \left(a_n^h - E\left(a_n^h\right)\right)^2 = \sigma_Z^2\ (A3.37)$$

Este es un cambio respecto al trabajo de Parente, en el que en un entorno de certidumbre la variable relevante era el stock de experiencia en sí misma y no su volatilidad. A la vista de las desviaciones observadas entre valor esperado y realizado del capital humano, el empresario va aprendiendo las características del proceso estocástico que gobierna el capital humano y va formulando expectativas progresivamente más perfectas. Por otra parte, la transición entre tecnologías tiene un coste en términos de erosión del capital humano-experiencia, como en Parente. Este coste, que tiene también un componente aleatorio, será tanto mayor cuanto de mayor entidad sea el salto tecnológico y cuanto más específico sea el capital humano respecto al grado tecnológico en el que opera la empresa. Esta función de pérdida de experiencia se recoge a través de la siguiente ecuación:

$$a_{n+g}^h = \alpha^{g/2} a_n^h + \varepsilon_g\ (A3.38)$$

$$\varepsilon_g \sim N\left(0, \rho_g \sigma_\varepsilon^2\right)\ (A3.39)$$

$$\rho_g = \begin{Bmatrix} \dfrac{\left(1-\alpha^g\right)}{\left(1-\alpha\right)},\ \alpha \neq 1; \\ \mathrm{g},\ \alpha = 1 \end{Bmatrix}\ (A3.40)$$

[253] Función de producción basada en Prescott (1972) y Wilson (1975). La varianza del stock de activo real entra con signo negativo en la función de producción en la medida en que implica costes de obtención de la información los cuales, a su vez, suponen un desvío de factores productivos de su uso alternativo, la generación de bien final. En definitiva, se trata de una traslación de la función de producción empleada por Parente a un entorno de incertidumbre en el que la consecución de información puede generar economías de escala. Desde otro punto de vista, la función puede interpretarse como descriptiva de una mayor eficiencia adquirida a través de un conocimiento más profundo del proceso productivo.

La notación es la siguiente: g es la magnitud del salto tecnológico y α es el grado de especificidad del capital humano respecto a la tecnología operada. Cuando $\alpha = 1$ y $\sigma_{\varepsilon}^{2} = 0$ entonces el crecimiento del capital humano se mantiene constante con independencia del tamaño del salto tecnológico, mientras que si $\alpha = 0$ el grado de especificidad es máximo. Conforme la empresa va adoptando nuevas tecnologías, está inmersa en un proceso de aprendizaje, de suerte que tras cada realización del output neto realiza una reestimación bayesiana, incorporando toda la nueva información disponible, de la varianza del capital humano. El equilibrio debe corresponder a un punto fijo en este proceso, esto es, a una situación en la que expectativa sobre varianza y varianza observada coincidan.

En una dinámica de adopción de nuevas tecnologías, se define la función output neto de un salto tecnológico de tamaño g -partiendo de una tecnología inicial de grado 0- y de una varianza posterior del salto tecnológico x, $\pi(x,g)$, consecuencia de las especificaciones formuladas anteiormente de la función de producción y la transición del capital humano entre tecnologías:

$$\pi(x,g) = A_k\left[1 - \sigma_Z^2 - \alpha^{g/2}x - \rho_g\sigma_{\varepsilon}^2\right] \text{(A3.41)}$$

En la medida que este output neto, que se intenta maximizar, se define solamente para un solo período (o, equivalentemente, en un solo tránsito a una nueva tecnología), hablamos de un proceso miope. Esta miopía se traduce en que una estrategia consistente en mantener la tecnología operativa y no saltar puede ser indefinidamente la óptima. En efecto, dada la linealidad del output neto respecto a x, existirá un conjunto de valores de x para los que que el output neto asociado a la ausencia de cambio en tecnología es superior al output neto generado por un cambio (a consecuencia de la erosión parcial de la experiencia). Si la expectativa de x de la empresa se encuentra en este tramo, no se adoptará una nueva tecnología. Por el contrario, una empresa cuya expectiva de x sea mayor que el extremo superior de este tramo sí incorporará una nueva tecnología. Es más, a partir de este momento realizará adopciones sucesivas de nuevas tecnologías. ya que la varianza esperada convergerá hacia el punto fijo que caracteriza a la autorrealización de las expectativas con un ritmo de cambio tecnológico continuo. En cualquier caso, conviene insistir, este resultado de bifurcación descansa en un proceso atípico de formación de expectativas.

Por último, de este tipo de modelización se desprende un corolario sobre “adelantos” tecnológicos entre empresas. Puede darse el caso de dos empresas, una con un bajo nivel de output y otra con un nivel elevado, de las cuales la primera tenga una expectativa de x superior a la segunda, Es más, la expectativa inicial de x es tan reducida en la segunda empresa, que permanece pegada a su tecnología inicial, mientras que la segunda empresa se adentra en un proceso de adopción de tecnlogías continuamente mejores. La consecuencia será que, al cabo de cierto tiempo, la primera de las empresas acabará superando a la segunda en output neto y capital humano acumulado, a pesar de haber partido en desventaja.

Romer (1990b). El artículo generaliza la estructura productiva del anterior modelo de 1990 y añade nuevos elementos, que en esencia no alteran las conclusiones de aquel. En primer lugar, el diseño de la economía se hace algo más complejo, manteniendo el sector productor de bienes de consumo, el de inputs duraderos y el de nuevos diseños o patentes y añadiendo el de producción de ciencia básica, cuyo output constituirá un input adicional en la tecnología de patentes. La principal novedad de esta segunda versión del modelo es la endogeneización de capital humano, del cual distingue tres tipos: físico (de nuevo dado, que puede suponerse generado en el pasado a partir de inversiones de tiempo en nutrición y diversos cuidados destinados a la mejora de la salud), educativo ($a_s^{h,KP}$,de tipo cognitivo, acumulado a partir del aprendizaje en la fase primaria y secundaria del sistema educativo) y científico ($a_s^{h,KS}$,también cognitivo, adquirido en la fase post-secundaria del sistema educativo). La acumulación de los dos últimos tipos de capital humano se realiza a partir de la asignación de tiempo a las actividades de producción correspondientes: para conciliar la necesidad de modelización con el hecho de que en la realidad el capital educativo y el científico se cimentan secuencialmente, se propone un esquema de acumulación por tramos del siguiente tipo[254]:

$$a_{s+1}^{h,KP} = \left\{ \begin{matrix} n_s^{KP} + \left(1-\delta^{KP}\right) a_s^{h,KP}, a_s^{h,KP} \leq \overline{a}_s^{h,KP}; \\ a_s^{h,KP}\left(1-\delta^{KP}\right) \text{ en otro caso} \end{matrix} \right\} \quad (A3.42)$$

$$a_{s+1}^{h,KS} = \left\{ \begin{matrix} n_s^{KS} + \left(1-\delta^{KS}\right) a_s^{h,KS}, \text{ si } a_s^{h,KP} = \overline{a}_s^{h,KP}; \\ 0 \text{ en otro caso} \end{matrix} \right\} \quad (A3.43)$$

En definitiva, cuando el capital educativo alcanza un cierto umbral, la acumulación se detiene y comienza la acumulación de capital científico. No obstante ambos pueden tener lugar en el mismo período. Junto a estos tipos de capital humano, se define la variable “experiencia”, producto de procesos de “learning by doing” en los sectores de bienes de

254 Alternativamente puede suponerse un horizonte infinito de planificación resultante de un esquema de generaciones sucesivas enlazadas mediante un vínculo de altruismo, de manera que cada período engloba todos los acontecimientos que acaecen durante la vida del individuo.

consumo e inputs duraderos, que contribuye también a aumentar la eficiencia del trabajo junto al capital humano en sentido estricto. La estructura de acumulación será similar a las funciones anteriores:

$$a_{s+1}^{h,z} = a_s^{h,z}\left(n_s^c + \sum_{j=1}^{M} n_s^{x_j}\right) + \left(1-\delta^z\right)a_s^{h,z} \quad \text{(A3.44)}$$

Las dos clases de capital humano cognitivo, así como la experiencia, están sujetas a las condiciones de acumulación habituales, que incluyen por tanto los efectos de las correspondientes tasas de depreciación, diferentes en cada caso. En cuanto a los inputs de los sectores productivos, el de bienes de consumo utiliza capital humano básico o físico, educativo primario, experiencia e inputs duraderos. La tecnología de inputs duraderos, una vez adquirida la correspondiente patente, se nutre de las mismas variables que la del bien de consumo. La función de producción de patentes genera output a partir de capital educativo primario, capital científico, inputs duraderos, un subconjunto de patentes y ciencia básica. Por último, la ciencia básica se produce a partir de patentes, ciencia básica y capital científico. El mecanismo de adquisición de patentes por el sector productor de inputs sería análogo al del artículo previo, mientras que a su vez los productores de patentes deberían adquirir a un cierto precio la ciencia básica.

En equilibrio, debería determinarse la asignación de recursos del capital educativo entre la producción de bienes de consumo, inputs duraderos y patentes, así como la del capital científico entre patentes y ciencia básica y la de la experiencia entre bienes de consumo e inputs duraderos. Paralelamente, las patentes deberán distribuirse entre el sector de inputs duraderos, ciencia básica y el propio sector de patentes, mientras que deberá determinarse también la cantidad de conocimientos de ciencia básica adquiridos por los productores de patentes. El conjunto de estas decisiones se plasma en una restricción más compleja de usos del tiempo, que ahora abarcarán la acumulación de los dos tipos de capital humano cognitivo, así como los períodos transcurridos en la producción de cada uno de los cuatro sectores, teniendo en cuenta que a su vez esta última fracción de tiempo afectará simultáneamente a los stocks de más de un tipo de capital humano. El tiempo de adquisición de experiencia se obtendrá una vez conocidas las fracciones destinadas a la producción de bien de consumo y de inputs.

En resumen, el mecanismo de funcionamiento agregado del modelo es en esencia el mismo que el del trabajo previo de Romer, solo que desdoblando las categorías de capital humano y añadiendo un sector productivo más. Es más, Romer no soluciona este modelo extendido en sí mismo, sino que se remite a su versión simplificada anterior para obtener una solución cerrada. Esta segunda versión pretende solamente aproximar a la realidad el modelo compacto, especificando qué late detrás de cada una de las simplificaciones sobre las que descansa y en particular aproximándolo al lenguaje clásico de la teoría del capital humano y explicitando su papel en la generación de conocimiento.

Aghion y Howitt (1992) plantean un modelo de innovación endógena influido tanto por Romer (1990a) como por el concepto schumpeteriano de destrucción creativa, que se recoge a través de la idea de obsolescencia que ciertos productos sufren a medida que comienzan a producirse otros nuevos. En línea con la distinción previa de Romer, los autores diferencian dos tipos de factor trabajo (no cualificado y cualificado), que se asigna entre los 3 sectores productivos de la economía. El trabajo cualificado se ubica tanto en la producción de bienes intermedios (con una función de producción lineal) como en la investigación, siendo en el primero de ellos donde se forman los salarios a este tipo de factor. Mientras, el trabajo no cualficado es el input del sector productor de bienes finales, cuya función de producción es cóncava en el mismo y está afectada por un parámetro de productividad, que recoge el impacto acumulado de las sucesivas innovaciones. Existe pues una distribución binaria del capital humano en dos categorías, viniendo dada la proporción de cada tipo de cualificación respecto al total de trabajo disponible a través de dotaciones exógenas. A este respecto, el modelo no endogeneiza los mecanismos de acumulación de cada tipo de capital humano.

Cuando se produce una innovación, el empresario que la obtiene disfrutará de parte de sus rentas durante un cierto tiempo en régimen de monopolio. La llegada de la siguiente innovación implicará el propietario de la nueva patente desplazará al anterior y pasará a disfrutarla en exclusiva; por tanto serán los entrantes los que lleven a cabo actividades de investigación. La ocurrencia de una innovación sigue un proceso aleatorio de Poisson, con media $\lambda\phi\left(n_s^{KP}, n_s^{KS}\right)$, siendo ϕ una función cóncava y con rendimientos constantes a escala y denotando n el número de trabajadores con cualificaciones medias y especializadas. La función de beneficio del productor de la patente viene dada por:

$$\pi_s = \lambda\phi\left(n_s^{KP}, n_s^{KS}\right)V_{s+1} - e_s^{KP}n_s^{KP} - e_s^{KS}n_s^{KS} \text{ (A3.45)}$$

V_{s+1} es el valor futuro de la patente, configurado por el beneficio monopólico asociado a la explotación de la patente, descontado a s y utilizando como tasa de descuento el tipo de interés corregido por una prima de riesgo que depende negativamente del número de trabajadores de cualificación media futuros, cuya relación negativa con el valor de la patente se explica a continuación. La única decisión óptima a adoptar por la sociedad es la asignación de efectivos cualificados, dada su dotación, entre los sectores de producción de inputs intermedios y de investigación. Dadas unas expectativas sobre trabajo en el sector de investigación en el período s+1, las condiciones de primer orden del manager de este sector que busca en s el diseño de una patente se sintetizan en una función decreciente de demanda de trabajo en el período s respecto a dichas expectativas -decrecimiento que se hereda de la función de valor de la patente definida antes-, en la medida en que i) una mayor cantidad de trabajo cualificado aplicado a investigación aumentará la probabilidad de la llegada de una innovación en el futuro y por tanto reduce las probabilidades de disfrute de la renta de una eventual innovación presente y ii) un menor volumen de trabajo en el sector de manufacturas incrementará el salario de equilibrio para el salario cualificado, reduciendo el beneficio para la actividad investigadora. El equilibrio de previsión perfecta se caracterizará por aquel nivel de empleo esperado en el sector de investigación tal que coincide a posteriori con el empleo óptimo en equilibrio general. Dado que el ritmo de generación de patentes determina en última instancia el crecimiento de la productividad en el sector de bienes finales, se observa un efecto escala que discurre desde el número de trabajadores cualificados a la probabilidad de culminación con éxito de la investigación y al ritmo de crecimiento del output en equilibrio general.

En estado estacionario el empleo cualificado en el sector de investigación es constante en ausencia de aumentos en la dotación de empleo cualificado en el conjunto de la economía; por tanto el valor esperado de la llegada de patentes será constante y, en última instancia, también lo será el crecimiento del output final. Un aumento de esta dotación conducirá a un mayor volumen de contratación de trabajo en investigación, a partir de un doble efecto. Primero, para un determinado volumen de contratación en la industria de bienes intermedios, aumentará el empleo de trabajo cualificado en investigación, por lo que también se elevará el ingreso esperado a consecuencia de una mejora de la esperanza de llegada de innovaciones. Segundo, se reducirá la remuneración al trabajo cualificaco de equilibrio, efecto que también implicará la reducción de los costes marginales de producción. A consecuencia de ambos efectos, aumenta el beneficio marginal esperado del desarrollo de patentes y a resultas de ello se incrementa la demanda de trabajadores de este tipo, acelerando el crecimiento del output final a través del factor de eficiencia.

Los propios Aghion y Howitt (1998) amplían su modelo base descrito anteriormente para mostrar las complementariedades entre la acumulación de capital físico y el crecimiento del stock de innovaciones; en cualquier caso, se sigue considerando una dotación de trabajo exógena.

Acemoglu (2012), basándose en trabajos previos propios (1998, 2002, 2003) y en Gancia y Zilibotti (2009), desarrolla un modelo en el que coexisten dos tipos de procesos de producto: innovación y estandarización de producto, de manera que cada uno de ellos emplea un tipo diferente de capital humano en su tecnología (de formación elevada y baja, respectivamente). En general los salarios de los trabajadores cualificados en equilibrio serán, como mínimo, iguales a los de baja cualificación, ya que los primeros podrían ocuparse también de desarrollar el trabajo de los segundos. Tanto tecnologías de innovación como de estandarización poseen funciones de producción de rendimientos constantes a escala que transforman las unidades de trabajo de cada tipo en output en relación uno a uno. El motor fundamental de crecimiento del modelo es la innovación, al generar un número neto más elevado de variedades, aunque la estandarización también puede incrementar la producción, como veremos, para ciertos rangos de valores. No existe una tecnología de acumulación de capital humano, como tampoco para el número de bienes en la economía, siendo variable exclusivamente el porcentaje de cada tipo de productos respecto al total. A pesar de no endogeneizarse el crecimiento en capital humano, los resultados ponen de manifiesto una vez más la importancia de este a la hora de determinar la tasa de crecimiento del output a largo plazo.

La producción total de una economía (de bien final, ya que no hay bienes intermedios en este modelo) se compone de un conjunto de variedades estandarizadas y otras disfrutadas en exclusiva por un entrante gracias a la existencia de una patente que le otorga al inventor tal privilegio. Esta estructura queda representada por el siguiente índice de producción:

$$Y_s = Z_s \left[\int_0^A \left(x_s^j \right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = Z_s \left[\int_0^{A_L} \left(x_s^{L,j} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj + \int_0^{A_H} \left(x_s^{H,j} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad \text{(A3.46)}$$

El parámetro Z constituye un efecto externo agregado de productividad que será mayor cuanto más elevado sea el número de variedades existentes (A), mientras que A_L, A_H denotan las variedades que utilizan en su producción trabajadores de baja y elevada cualificación, respectivamente. ε representa la sustituibilidad entre ambos tipos de productos. La sustituibilidad entre los dos niveles de formación de los trabajadores en cualquiera de los dos procesos productivos es nula.

Cuando un entrante desarrolla una patente que le permite copiar la producción de un bien hasta ese momento en exclusiva, este es el que pasará a ocuparse de proveerlo, ahora de un modo estandarizado, al mercado. Esta proposición se justifica sobre la base de un juego en varias fases en la que, tras conocer la duplicación de la patente por el entrante, la empresa instalada decide si lucha con ella mediante una competencia à la Bertrand. Dado que los costes marginales de ambas vienen dados por los respectivos salarios de trabajadores cualificados y no, si los salarios de los cualificados son superiores a los no cualificados se producirá la entrada y el mercado será copado por el entrante, mientras que si son iguales se dará a lugar a una multiplicidad de equilibrios, pero se asume que la entrada sólo se materializa si el resultado del juego es favorable al entrante; en caso contrario, el instalado continúa con la producción en exclusiva. Finalmente, un escenario con salario de los trabajadores cualificados inferior al de los no cualificados blindaría el mercado para el empresario propietario de la patente original, aunque no puede constituir nunca un equilibrio. Así pues, en un equilibrio de subjuego perfecto siempre existirá un solo productor de cada variedad, sea cual sea su grado de estandarización. La proporción total de productos innovadores y estandarizados vendrá dado, por un lado, por la dotación relativa de ambos tipos de capital humano y, por otro, por la proporción de variedades de cada tipo respecto al total.

En estado estacionario las proporciones de ambos tipos de productos deberán ser constantes, para lo cual el retorno de ambas actividades, innovación y estandarización, deberán igualarse. Estos son, respectivamente, decrecientes[255] y crecientes respecto a la proporción de productos de alta tecnología, para una determinada elasticidad de sustitución entre los mismos. Por tanto el valor estacionario del porcentaje de productos de alta tecnología será aquel que iguale ambas tasas de retorno (o el situado en la confluencia de las dos curvas, equivalentemente). La tasa de retorno común a ambas actvidades (junto con la tasa intertemporal de descuento) determinará el crecimiento estacionario del número de variedades de cada tipo, del total conjunto de variedades de la economía, de la producción de output final y del consumo. La relación entre crecimiento del output y grado de estandarización tiene forma de U invertida, primero creciente y después decreciente. En el primer tramo, para porcentajes muy elevados de productos innovadores, la productividad de los trabjadores cualificados se hace tan reducida que una transferencia de parte de sus tareas a los no cualificados constribuye a incrementar la producción total, hasta alcanzar un punto óptimo dado por los parámetros del modelo. Traspasado dicho punto, la situación es la inversa y a medida que se acentúa la sobre-estandarización se reduce la tasa de crecimiento del output.

En este marco, las dotaciones relativas de ambos tipos de capital humano pueden jugar un papel importante para contribuir a incrementar la tasa de crecimiento estacionaria del output, aunque la política óptima dependerá del tramo de la curva que

[255] En efecto, cuanto mayor sea la proporción de nuevas variedades, menor será la productividad relativa de los trabajadores cualficados frente a los no cualficados, ya que los primeros deberán atender de un modo crecientemente ineficiente a un gran número de tareas.

relaciona crecimiento del output y grado de estandarización se encuentre en la economía. En el tramo decreciente, el grado de estandarización es demasiado alto y esto se manifiesta en una prima salarial por cualificación demasiado baja. Así pues, un incremento en la dotación relativa de trabajadores cualificados contribuiría a aumentar la rentabilidad de la producción de innovaciones y a reducir el peso de la estandarización en el número de variedades, elevando la tasa de crecimiento estacionario. No obstante, cuando el grado de estandarización es insuficiente la política más adecuada sería aumentar la proporción de trabajadores no cualificados respecto a los cualificados si el objetivo es maximizar el crecimiento del output en equilibrio estacionario. En resumen, el modelo muestra la complementariedad de innovación y estandarización como motores de crecimiento, así como el papel relevante de la política de capital humano para explotar sus trade-offs en un sentido favorable al crecimiento.

Blackburn, Hung y Pozzolo (2000) llevan a cabo una reformulación de Arnold (1998), introduciendo algunas modificaciones a los supuestos generales aunque conservando en lo sustancial la estructura básica. En su trabajo la producción del bien final se lleva a cabo mediante la intervención de un fracción del capital humano, homogéneo, así como del vector de bienes intermedios, presentando rendimientos constantes a escala en el conjunto de los inputs. La producción de bienes intermedios se lleva a cabo en el misma empresa representativa que lleva a cabo la investigación (puede pensarse en dos departamentos diferentes), por lo que se evita introducir un precio de transferencia a las patentes de producción. El capital humano es un factor productivo tanto en el sector de bienes finales, que funciona en competencia perfecta, como “aguas arriba” en la empresa productora de bienes intermedios e innovación, que disfruta de poder de mercado. La función de inversión bruta en capital humano se construye á la Lucas.

En este último sector, además, la producción de bienes intermedios se realiza mediante un coste fijo en términos de bien final (y sobre este coste la maximización del beneficio conduce a la fijación de un precio vía mark-up); mientras, en el departmento de innovación se introducen dos aspectos novedosos: un umbral mínimo de capital humano y el hecho de que el resultado de los esfuerzos de investigación es una probabilidad de éxito en el desarrollo de la patente para la producción de una nueva variedad de bien intermedio. Cada una de las empresas innovadoras produce un solo input intermedio en cuantía dada y busca producir nuevas variedades mediante la maximización de los beneficios esperados de tal actividad. Esta optimización se realizará tomando como variable de control la fracción de capital humano a contratar, que se remunerará al salario determinado en el sector del bien de consumo. De este manera, el ingreso esperado de la innovación estará compuesto por la probabilidad de éxito en la misma, definida más arriba, multiplicada por el valor del output lanzado; para determinar el beneficio al ingreso esperado se le detraerán tanto los costes fijos como el alquiler del capital humano. No existe pues un activo “conocimiento” como tal que se acumule, si bien la base científica disponible (sintetizable en el número de variedades de bienes intermedios conocidas) forma parte, junto con el capital humano, del vector de inputs cuyo concurso incrementa la probabilidad de éxito en el proceso de investigación. En cualquier caso, al resolver el modelo en equilibrio estacionario de nuevo la tasa de crecimiento del output dependerá esencialmente de la productividad en la función de producción de capital humano y de los parámetros que definen las preferencias del individuo (tasa subjetiva de descuento y elasticidad de sustitución intertemporal constante), al igual que en el precedente de Arnold. El nivel del umbral mínimo de empleo de capital humano en el sector de investigación no juega ningún papel en el valor de las tasas de crecimiento estacionarias, aunque sí en la dinámica de transición.

Bucci (2003) construye un modelo con una estructura similar al de Romer (los mismos tres sectores -bien final, bienes intermedios y sector investigador, que genera licencias para la ampliación del número de bienes intermedios producidos-, con presencia de capital humano en cada uno de ellos. La acumulación de capital humano se lleva a cabo mediante una función de producción à la Lucas, con rendimientos constantes en el nivel previo del activo. La producción del bien final es à la Blackburn, la de bienes intermedios lineal en el stock de capital humano y la producción de patentes se realiza sin intervención del stock previo de conocimiento (recogido en el número de variedades de bienes intermedios), por medio de una función proporcional a la fracción de capital humano utilizada en dicho sector. **En estado estacionario las fracciones de tiempo asignadas por los trabajadores a cada sector son constantes, mientras que la tasa de acumulación de capital humano es igual al crecimiento del número de variedades y a la de expansión del output final.**

Zeng (2003) matiza los resultados de los modelos anteriores, incluyendo un conjunto más amplio de variables -aparte de la productividad del capital humano y las preferencias- que determinan la tasa de crecimiento estacionaria. La clave de este resultado la proporciona la función de acumulación de capital humano, que depende en general tanto de la fracción de tiempo invertida en aprendizaje como de la aplicación de un input de mercado, asimilable al bien compuesto final. El número de trabajadores en la economía es constante. Por lo demás, cada productor de bienes intermedios es un monopolista que utiliza capital físico y humano en sus tareas. El productor de bien final combina en su tecnología todas los inputs intermedios existentes, cuyos precios toma paramétricamente, viniendo afectado cada input por una productividad diferente.

Existe también innovación vertical y horizontal (esto es, tanto en la calidad de los productos intermedios como en el número de los mismos). Estos procesos, que se modelizan siguiendo a Howittt (1999), se sustancian en un innovador líder que obtiene una productividad máxima de uno de los inputs existentes (que pasa a sustituir a la antigua variedad) y en el incremento del número de variedades a lo largo del tiempo. La innovación vertical tiene como variable endógena la esperanza de una distribución de Poisson en la que interviene esencialmente el gasto realizado en este tipo de actividad -en unidades del bien final- y el número de productos depende análogamente del gasto realizado en esta variante de investigación. Innovación y producción de bienes intermedios se realizan en la misma empresa y son subvencionadas proporcionalmente al gasto efectuado por el gobierno, que financia sus gastos mediante la imposición sobre las rentas del trabajo y del capital físico. La restricción presupuestaria del gobierno, por lo tanto, representará una ecuación vinculante en el problema de optimización, como también la de vaciado del mercado de bienes, que refleja la utilización del bien final en sus distintos usos: consumo, inversión en capital físico y en capital humano y gasto en cada una de las variedades de innovación.

Además, el gasto en innovación -tanto horizontal como vertical- se deflacta por la productividad del innovador líder, indicando con ello que el progreso tecnológico hace progresivamente más compleja la culminación satisfactoria del esfuerzo investigador. La tasa de crecimiento de la productividad del líder dependerá proporcionalmente del esfuerzo en innovación vertical. Tanto esta función de acumulación como las tecnologías de innovación vertical como horizontal presentan rendimientos constantes a escala en el conjunto de sus inputs. En equilibrio estacionario la productividad del líder, el capital humano y el número de variedades crecen a una tasa constante, mientras que el output per cápita crece también a una tasa constante que depende de los parámetros tecnológicos de innovación vertical y horizontal, los tipos de subvención e impositivos fijados por el gobierno y los coeficientes que conforman la productividad del capital humano[256].

Stokey (1991) opta por destacar las conexiones entre la acumulación de capital humano y la producción de nuevos bienes con un grado de calidad creciente. A este fin desarrolla la línea iniciada en su trabajo de 1988, trasladando a un contexto de generaciones sucesivas la línea modelizadora en clave schumpeteriana que desarrollaban en aquellos

[256] Hay que subrayar que si la inversión bruta en capital humano depende exclusivamente de la cantidad aplicada del propio input y no hay intervención alguna de los inputs de mercado, entonces se reproduce el resultado de Arnold y Blackburn et al. y las políticas de estímulo a la I+D no influirán en la tasa de crecimiento de la economía a largo plazo.

años autores como Boldrin o Aghion y Howitt para agentes representativos. En concreto, propone como marco una economía poblada por un número elevado de hogares de vida infinita, cada uno de los cuales constituye una dinastía compuesta de una corriente infinita de generaciones sucesivas que viven durante un período. El tamaño de las cohortes es constante y se normaliza a 1 en todo período. El patriarca de la dinastía optimiza tomando en cuenta el horizonte infinito a lo largo del cual se desenvuelve la sucesión de cohortes que constituyen aquella. La formación tiene lugar solamente durante la primera fracción de vida (siendo la longitud de dicha fracción endógena), la cual tiene lugar a partir del nivel de capital humano heredado, mientras que en el segundo subperíodo hay una dedicación exclusiva a la producción de mercado. Como es habitual en los modelos de horizonte infinito, el capital humano se acumula entre generaciones a partir de una tecnología no convexa, que constituye el motor de crecimiento a largo plazo. Esta última puede escribirse como $a_{s+1}^{h} = a_{s}^{h} G\left(n_{s}^{h}\right)$, siendo G creciente y cóncava.

La composición de cada cohorte es heterogénea, de suerte que la función $\Omega(z,s)$ mide el número de individuos vivos y activos laboralmente durante el período s (es decir, aquellos que han concluido su subperíodo de formación) que poseen un nivel de capital humano de, como mínimo, z. En cada período existe un continuo de bienes y un continuo de características de los mismos indexadas con números reales y ordenadas en sentido creciente, de tal forma que cuanto más elevado es el índice de la calidad tanto mayor puede considerarse esta. De esta manera, se establece una medida de calidad en el consumo mediante la función Q(y,s): puesto que cada bien de calidad y o superior contiene una unidad de y en su interior, Q mide la cantidad de la calidad y incuida en la cesta de consumo durante el período s. La tecnología de producción es constante en el tiempo y presenta rendimientos constantes a escala. El trabajo es el único factor productivo y cada trabajador produce por período un flujo igual a una unidad de un bien con una calidad inferior o igual a su capital humano. Por tanto deberá verificarse período a período $Q(z,s) \leq \Omega(z,s)$.

Las preferencias, de elasticidad de sustitución constante, se definen sobre el continuo de calidades, que se define también en el rango $[0,\infty)$. Así, el primer individuo de la generación maximizará[257]:

[257] El modelo se plantea originalmente en tiempo continuo.

$$U=\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s}\left[\frac{U\left[Q(.,s)\right]}{1-\sigma}\right]^{1-\sigma};$$

$$Q(.,s)=\int_{0}^{\infty}Q(y,s)\,dy \quad (A3.47)$$

Existirá además una remuneración w(z,s) ligada a un nivel z de capital humano y definida en términos de uno de los bienes, seleccionado como numerario. Cada variedad, que se supone producida en un régimen de competencia perfecta, se vende a un precio P(z,s), el cual se igualará a su coste marginal, esto es, w(z,s). Esta razón, unido al hecho de que bienes con mayores calidades llevarán asociados mayores precios, llevará a que la restricción de desigualdad que mide el índice de calidad y la distribución de capital humano se verifique con igualdad estricta. Además del capital humano, se introduce un activo financiero remunerado a un tipo de interés real r.

El problema competitivo descentralizado podrá resolverse, como es habitual, mediante un proceso de dos etapas. **En la primera, se optimiza la renta disponible por cada individuo de la cohorte mediante la elección del tiempo de aprendizaje**. Esto es, la función objetivo a optimizar sería, en tiempo discreto, $\left(1-n_s^h\right)w\left(a_s^h G\left(n_s^h\right),s\right)$, concentrando en un único período la corriente de beneficios y costes marginales que habitualmente se distribuye a lo largo de 2. Esta variante en la modelización procede de la inserción de un marco originalmente concebido dentro de la teoría de ciclo vital en horizontes de vida uniperiódicos, lo que fuerza a realizar subdivisiones dentro de cada período para diferenciar patrones de actividad en cada fase de la vida. Otro aspecto notable en el planteamiento de esta primera etapa es que no se internalizan en la optimización los efectos de retroalimentación de la acumulación de un mayor stock de capital humano en la formación salarial; dicho de otro modo, en la función objetivo se utiliza a_s^h , que es el stock legado a la cohorte nacida en s, pero no se tiene en cuenta que a su vez este cambia a consecuencia de la aplicación de un tiempo de aprendizaje durante el primer subperíodo. Stokey racionaliza este supuesto argumentando que la presencia del stock de capital humano en la tecnología de aprendizaje responde a la presencia de efectos externos en el capital “medio” de toda la economía, respecto al cual la aportación de cada agente individual es infinitesimal.

En la segunda fase de resolución, se lleva a cabo la maximización por el cabeza de la dinastía de la utilidad, sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal renta disponible. A su vez esta viene dada por la corriente descontada de las rentas salariales, sobre la base de la senda de períodos de aprendizaje determinada endógenamente en el primer subperíodo de vida. Esto es:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[P(.,s)Q(.,s) \right] - \left[w\left(a_s^h, s\right) \Omega\left(a_s^h, s\right) \right] \leq 0;$$

$$P(.,s)Q(.,s) = \int_0^{\infty} P(z,s)Q(z,s)\, dz \quad (A3.48)$$

Esta segunda etapa de optimización se traducirá en una senda de cantidades de calidad producidas a lo largo del tiempo. Suponiendo que la función G adopte la siguiente forma $G = 1 + g\left(a_s^h, n_s^h\right)$, donde la derivada parcial de g respecto al capital humano recoge el impacto de externalidades, imponiendo ciertas condiciones a la derivada parcial respecto al tiempo se puede demostrar la existencia de, al menos, un estado estacionario en el que el tiempo de aprendizaje es constante a largo plazo y por tanto el capital humano crece a una tasa constante, asi como la calidad de los bienes de consumo. Si además el tamaño de los efectos externos es relativamente reducido, el estado estacionario será único.

Redding (1996) plantea un marco de generaciones sucesivas e incertidumbre en el que los individuos, idénticos entre sí, heredan en el momento de su nacimiento el stock de capital (neto de depreciación) de la generación previa. Su vida se prolonga a lo largo de dos períodos; durante el primero de ellos tienen la opción de destinar una fracción de tiempo al aprendizaje y otra al trabajo en producción de mercado, mientras que dedican íntegramente el segundo período de vida a ofertar su servicios de trabajo. La función de acumulación de capital humano es susceptible de generar rendimientos constantes a escala en el activo y depende también del tiempo de aprendizaje a través de una relación no lineal:

$$a_2^h = a_1^h \left(1 + \theta (n_s^h)^{\gamma}\right);\ 0 < \gamma < 1;\ \theta > 0 \ \text{(A3.49)}$$

$$a_1^h = (1 - \delta) a_0^h \quad (A3.50)$$

En la medida en que el exponente que afecta al tiempo de aprendizaje está comprendido entre cero y la unidad, los rendimientos de este input serán decrecientes. Existe un solo sector productivo en la economía, que se ocupa de proveer bien de consumo. Su tecnología depende solamente del trabajo efectivo aplicado (fracción de tiempo corregida por el correspondiente stock de capital humano acumulado) y de un factor de eficiencia, conforme a la siguiente ecuación:

$$Y_s = A_s \left(a_s^h n_s^w\right) \ \text{(A3.51)}$$

Suponiendo que una generación vive en los períodos 1 y 2 , al comienzo del período 1 los empresarios invierten en esfuerzo de investigación para aumentar la eficiencia de la producción, con resultados inciertos. La inversión, que exige una cantidad fija de output, está asociada a una cierta probabilidad de éxito siempre que el output aplicado supere un determinado umbral dado. Si tiene éxito, la eficiencia productiva del capital humano se multiplicará por un factor superior a la unidad (λ) a comienzos del período 2, mientras que la eficiencia a comienzos del período 1, común a todos los empresarios vendrá dada por el número de procesos de innovación llevados a cabo con éxito en el pasado: $A_1 = \lambda^m$, normalizándose a 1 la eficiencia en el período de origen de la economía. El carcácter aleatorio del resultado de la innovación genera incertidumbre en las expectativas de los consumidores, a través de los salarios a percibir en el período 2 (y derivadamente, las tasas de retorno de su inversión en capital humano). Por otra parte, los salarios se fijan siguiendo a Acemoglu (1994), en un contexto de búsqueda en el que el mercado de trabajo se vacía con un emparejamiento aleatorio entre trabajadores y empresas; una vez realizado el emparejamiento, el trabajador permanecerá durante los dos períodos de su existencia en la misma empresa. El salario se fijará por negociación entre empresario y trabajador, siendo B la constante que liga su salario a la productividad marginal del tiempo trabajado; es el resultado incierto de este proceso de búsqueda el que impide firmar a empresarios y trabajadores contratos salariales multiperiódicos. Bajo estos supuestos, si la fracción esperada de empresarios que innovan con éxito es μ , entonces el salario esperado será:

$$E_1 e_2 = E_1 A_2 = \left[\mu\lambda + (1-\mu)\right] A_1 \quad \text{(A3.52)}$$

Esta expectativa se utiliza por los trabajadores para maximizar su utilidad intertemporal, dependiente del consumo, respecto a la formación a adquirir en el momento inicial y antes de su entrada en la empresa; por su parte, el empresario decidirá, antes de contratar al trabajador, su grado de involucración en actividades de I+D, teniendo en cuenta el incremento de eficiencia del trabajador a que puede dar lugar la actividad de investigación y la proporción del excedente que puede ser capaz de capaz de capturar mediante negociación bilateral. El equilibrio general con expectativas racionales se determina à la Nash. La interacción entre optimización de empresarios y trabajadores genera dos tipos de equilibrios general: i) Equilibrios de elevada inversión en I+D. Si los trabajadores esperan que el nivel de esfuerzo investigador sea elevado, entonces invertirán más en capital humano, al ser su tasa de retorno superior; a su vez, este hecho eleva la tasa de retorno de la inversión en investigación del empresario, que será más propenso a acometerla; ii) Equilibrios de baja inversión en I+D, con características simétricas. Al final será un conjunto de condiciones paramétricas las que determinen qué tipo de equilibrio de Nash prevalece. En estado estacionario, la tasa de crecimiento de la economía dependerá exclusivamente de los parámetros relativos a la tecnología de aprendizaje cuando el equilibrio sea de baja inversión en I+D, mientras que dependerá también de los parámetros que caracterizan la investigación (probabilidad de innovar con éxito y salto en la eficiencia del trabajo de materializarse dicha innovación) cuando se trate de un equilibrio de alta I+D -resultado paralelo al de Zeng (2003)- También de manera similar al artículo de Zeng, las variables de política económica podrán afectar la tasa de crecimiento a largo plazo: por ejemplo, subvenciones a las actividades de I+D harán más probable la emergencia de un equilibrio de alta I+D y elevada cualificación laboral.

Schicchitano (2010) extiende el modelo de Redding, introduciendo principalmente dos variaciones: heterogeneidad en los trabajadores y dos tipos de educación: *schooling* y *on the job training*. La heterogeneidad en los trabajadores se pone de manifiesto tras su contratación por la empresa y en función de qué tipo de entrenamiento le proporciona esta. La tecnología educativa, basada en Acemoglu (1997) pone de manifiesto la complementariedad existente entre ambas vías de acumulación de capital humano; siendo τ el factor de aumento educativo debido a la actividad de on-the-job-training:

$$a_2^h = a_1^h\left(1+\gamma(n_s^h)^\theta\right)\left(1+\tau\right);0<\theta<1;\gamma>0;\tau>0 \quad \text{(A3.53)}$$

El inicio de una actividad de investigación se realiza en el primer período, mientras que el OJT se proporciona en el segundo. Este aprendizaje en la empresa puede ser de dos tipos, general o específico, en función de si se proporciona a todos los trabajadores o, en el segundo caso, si se provee solamente a aquellos trabajadores involucrados en la investigación (cuando esta decide acometerse y tiene éxito). En cualquier caso, los beneficios de la investigación sobre la productividad serán captados solamente por aquellos trabajadores que hubieran estado dedicados a esta actividad y no al conjunto. A su vez, dado un coste fijo de proporcionar el entrenamiento, el beneficio para la empresa de emprender la inversión en investigación depende del número de trabajadores entrenados, pudiéndose diferenciar un retorno distinto cuando la formación es general o específica. Desde el punto de vista del trabajador, este maximiza su utilidad intertemporal respecto a la fracción de tiempo consumida en aprendizaje fuera del centro de trabajo durante la primera fase de su vida. Por tanto, el coste de este aprendizaje exterior a la empresa, como es habitual, implica un coste de oportunidad dado por el salario de equilibrio durante dicho período. En el segundo período, el salario real vendrá dado por las expectativas sobre el compromiso de la empresa en materia de I+D. En concreto, suponiendo que σ es el porcentaje de trabajadores que participan en la investigación, las expectativas sobre el salario del período 2 admiten dos formulaciones diferentes. Si la formación es general, siendo μ de nuevo la esperanza de empresas que culminan con éxito la actividad de I+D:

$E_1 e_2 = E_1 A_2 = (1+\tau)\left[\sigma\left\{\mu\lambda + (1-\mu)\right\} + 1 - \sigma\right]$ (A3.54)

Si la formación es específica:

$E_1 e_2 = E_1 A_2 = \left[\sigma(1+\tau)\left\{\mu\lambda + (1-\mu)\right\} + 1 - \sigma\right]$ (A3.55)

De esta manera[258], surgen 4 tipos posibles de decisiones de equilibrio en la inversión en educación efectuada por los trabajadores en su primer período de vida, cruzando la realización o no de investigación y el tipo de entrenamiento proporcionado a los trabajadores: equilibrios con alta investigación y entrenamiento general o específico y, análogamente, equilibrios con baja investigación y entrenamiento general o específico. La formación de capital humano será siempre superior en un equilibrio con formación general a otro con formación específica, siempre que haya actividad en I+D. De esta manera, puede establecerse una ordenación en términos de optimalidad paretiana de los 4 posibles tipos de equilibrio general resultantes: el superior será el de inversión en I+D y formación general; el inferior, el de ausencia de formación en I+D y formación específica; en un plano intermedio quedarían los equilibrios de formación general y ausencia de inversión en I+D y el de formación específica e inversión en I+D, que son dominados por el primero pero a su vez dominan al de ausencia de inversión en I+D y formación específica. La ordenación de los equilibrios intermedios dependerá del valor adoptado por el aumento de capital humano en el segundo período propiciado por la formación OJT. El equilibrio general con expectativas racionales es de tipo Nash, como en Redding, con determinación de la formación tipo schooling basada en las expectativas sobre el comportamiento empresarial y beneficios empresariales formulados sobre las pautas de optimización de los trabajadores. Existirán dos tipos de equilibrio, con y sin formación específica, y dentro de ellos la empresa decidirá si proporciona I+D en el primer período o no, confrontando el pago de la estrategia con el coste fijo de la realización de I+D. Cuál sea el equilibrio alcanzable con expectativas racionales vendrá determinado esencialmente por condiciones paramétricas.

En estado estacionario, los parámetros que influyen en el crecimiento de output del bien final en cada uno de estos equilibrios corresponden tanto a la tecnología del capital humano y, eventualmente, a la de investigación, según se trate de un equilibrio con inversión en I+D o no, al igual que en el trabajo de Redding; a diferencia de este último, sin embargo, la tasa de crecimiento vendrá también marcada no solo por el capital humano acumulado vía schooling, sino por los parámetros propios de la estrategia de formación

---

[258] Los diferentes retornos de la empresa en función de su estrategia vendrán dados por la parte de esta productividad incremental de que consiga apropiarse en un marco de negociación bilateral del salario, menos los costes fijos de distinto orden derivados de la formoacin OJT.

elegida por el empresario. **También a diferencia de Redding, si el equilibrio no contiene inversión en I+D no irá necesariamente asociado al menor de los crecimientos estacionarios posibles**, **siempre y cuando sea compensado por una formación general de suficiente entidad**. Una implicación directa de este tipo de solución es la efectividad de las subvenciones a la formación de los trabajadores menos cualificados a la hora de elevar el crecimiento a largo plazo, incluso aunque los restantes parámetros estructurales de la economía hagan difícil la consecución de un equilibrio con inversión en I+D.

Colonna (2014), basándose también en un marco de búsqueda en el mercado de trabajo similar al proporcionado por Acemoglu (1994) construye un modelo capaz de generar una trampa de baja cualificación y bajo nivel de innovación en las empresas. En efecto, por un lado la escasez de trabajo cualificado encarece su coste y reduce la tasa de retorno de la inversión en I+D, mientras que por otro la baja inversión en I+D mengua la productividad del trabajo y recorta a su vez la tasa de retorno de la inversión en capital humano.

El marco analítico, como en los precedentes mencionados de Redding y Scicchitano, está adaptado a la teoría de la búsqueda y presenta por tanto influencias más débiles de la línea de Becker-Lucas. El capital humano deja de ser un activo acumulativo, asociándose la adquisición del mismo a la elección binaria entre dos niveles de formación, que da lugar a una segmentación del número total de trabajadores, en formados y sin formación. La adquisición de formación llevará consigo un coste aleatorio -y distribuido uniformemente dentro del intervalo $[0,1]$ en términos de pérdida de utilidad. La llegada de ofertas de empleo se produce también mediante un proceso aleatorio, de Poisson en este caso. En cuanto a la empresa representativa, toma decisiones de una doble índole: i) De escala, eligiendo tanto una dimensión de planta que pueda albergar al conjunto de trabajadores contratados -a jornada completa- y de tecnología, aumentando la productividad total de los factores conforme selecciona una tecnología más desarrollada. Estas decisiones de escala se resuelven mediante un sistema de 2 ecuaciones cuyas incógnitas son la planta y el nivel tecnológico, en la medida en que a largo plazo tanto los beneficios como los costes dependen solamente de estas dos variables, dados los niveles de las endógenas de corto plazo. ii) Decisiones sobre costes variables, condicionadas por las decisiones de escala, a través de las cuales se elige el número de trabajadores cualificados y sin formación que se contrata. Los procesos de contratación llevan asociados unos costes decrecientes y convexos respecto al total de trabajadores desempleados. Los dos tipos de trabajadores constituyen un input en la función de producción CES de la empresa y cada uno de ellos tiene asociada un eficiencia constante, si bien la de los cualificados es superior.

Las decisiones de corto y largo plazo se resuelven retroactivamente, esto es, primero se adoptan las decisiones de contratación en cuanto al número de trabajadores de cada tipo a los que se emplea y, más tarde, se optimiza respecto a las variables de capacidad. La función de beneficios a corto depende de la función de producción, afectada por el correspondiente parámetro de productividad representativo de la decisión de inversión tecnológica, menos los costes salariales y de reclutamiento de cada tipo de trabajador. Por lo que respecta al problema de escala, la determinación de la tecnología se realiza mediante la maximización de la función de beneficios a corto (para unos niveles dados de sus endógenas) menos los costes de mejora tecnológica por trabajador, multiplicados por la capacidad en términos de número máximo de trabajadores que puede emplear la empresa. La segunda cpo, respecto a la capacidad, se deriva maximizando la función de beneficios menos los costes de capacidad. Ambas funciones de costes a largo son crecientes y convexas respecto al grado de inversión tecnológica y capacidad, respectivamente.

El salario real de cada grupo de trabajadores se determina mediante un proceso de negociación en el mercado de trabajo, de modo que, como es habitual en el marco de búsqueda, aquel es proporcional a su productividad marginal; se admite el desempleo, luego no se impone ninguna condición de vaciado en la determinación del salario real. La maximización del beneficio a corto plazo, una vez seleccionada la variable de escala, pasa por la maximización de la corriente de beneficios en un horizonte infinito, viniendo dados los costes por la retribución salarial a cada grupo de trabajadores y los costes de selección, en función del número de vacantes creadas para cada tipo de trabajo. La evolución de la plantilla de cada categoría laboral vendrá dada por el número de vacantes creadas más una constante aleatoria (la media de la distribución de Poisson) multiplicada por el número de trabajadores existentes en el mercado dentro de cada tipología de formación.

El estado estacionario existe siempre, aunque pueden encontrarse varios si la función de producción empresarial exhibe complementariedad entre trabajadores cualificados y no cuaificados. En este escenario de múltiples equilibrios, existen dos resultados cuya interacción explica la existencia de una trampa de baja formación y baja tecnología que se comentó anteriormente. Primero, a mayor productividad, mayor contratación de trabajadores cualificados, ya que incluso aunque los costes de reclutamiento de estos sean mayores, esta diferencia se diluye a causa de su mayor productividad relativa. Segundo, los incentivos a innovar e invertir en nuevas tecnologías productivas son tanto mayores cuanto más importante sea la plantilla de trabajadores cualificados en el seno de la empresa, ya que este hecho permite a la empresa beneficiarse más de una reducción en los costes de contratación unitarios relativos[259]. Así, países con una dotación escasa de trabajo cualificado tienden a padecer altos costes de reclutamiento de trabajadores cualificados, lo que penaliza su contratación a corto plazo. A su vez, este hecho penaliza la inversión en tecnología. En sentido contrario, el nivel bajo de productividad repercute en la maximización de beneficios a corto plazo, haciendo que el diferencial de costes de reclutamiento desfavorable a los cualificados pese más y retroalimentando el proceso.

ANEXOS AL CAPITULO IV

Propiedades de la tasa de retorno en equilibrio general respecto a n para $T > 2$ con rendimientos constantes en capital humano.

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2}}{dn_s^h} = \Phi_1\left\{-\alpha\left(1+Bn_s^h\right)^{-\alpha-1} B\left(1-n_s^h\right)^{-\alpha} - \alpha\left(1-n_s^h\right)^{\alpha-1}\left(1+Bn_s^h\right)^{-\alpha}\right\} < 0;$$

$$\Phi_1 \equiv \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left(1-n_{s+1}^h\right)^{-\alpha}\left(1+B\right) > 0 \ \ (A4.1)$$

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2}}{\partial n_{s+1}^h} = \Phi_2\alpha\left(1-n_{s+1}^h\right)^{-\alpha-1} > 0;$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left(1-n_s^h\right)^{\alpha}\left(1+Bn_s^h\right)^{-\alpha}\left(1+B\right) > 0 \ \ (A4.2)$$

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2}}{\partial B} = \Phi_3\left(1+Bn_s^h\right)^{-\alpha}\left(-\alpha+1\right) > 0$$

$$\Phi_3 = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} > 0 \ \ (A4.3)$$

Propiedades de la tasa de retorno en equilibrio general respecto a x con rendimientos decrecientes del capital humano.

---

[259] El problema de maximización de beneficios tanto a corto como a largo plazo puede reformularse en términos de la ratio entre cualificados y no cualificados, lo que permite comprobar que: i) la inversión tecnológica es creciente en dicha proporción; ii) es independiente de la capacidad elegida. Dicha proposición no se verifica a la inversa, de modo que empresas más productivas escogerán una mayor capacidad.

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{dx_s^h} = AB(1-\alpha)\varepsilon\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon} K_{s+1}^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon-\alpha} \begin{cases} (\varepsilon-1)\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-2}\Gamma^{-\alpha} - \\ -\alpha\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1}\Gamma^{-\alpha-1}B\varepsilon\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1} \end{cases}$$

$$+\left(\frac{1}{x_{s+1}^h}\right)^{\varepsilon-1} \frac{\Gamma^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-2}\left\{\Gamma(\varepsilon-1)-\varepsilon B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)(1-\varepsilon)\right\}}{\left[1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\right]^{2(1-\varepsilon)}} < 0;$$

$$\Gamma = \left[1+B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\right] \quad (A4.4)$$

Los dos sumandos de la derivada son negativos, por lo que la pendiente de la tasa conserva su signo negativo sin ningún condicionante.

Respecto al signo de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial x_{s+1}^h} = (1-\varepsilon)\left(x_{s+1}^h\right)^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1}\frac{1}{\Gamma^{1-\varepsilon}} > 0 \quad (A4.5)$$

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial B} = A(1-\alpha)\varepsilon\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon} K_{s+1}^{\alpha}\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon-\alpha}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1}\Gamma^{-\alpha}\left\{1-\alpha\left[\frac{B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}}{\Gamma}\right]\right\} -$$

$$-\left(\frac{x_s^h}{x_{s+1}^h}\right)^{\varepsilon-1}\frac{(1-\varepsilon)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}}{\Gamma^{2-\varepsilon}} <> 0 \quad (A4.6)$$

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial a_s^h} = AB(1-\alpha)\varepsilon\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon} K_{s+1}^{\alpha}\left(x_s^h\right)^{\gamma-1}\Gamma^{-\alpha}\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon-\alpha}\begin{Bmatrix}(1-\alpha-\varepsilon)+ \\ +B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\alpha\varepsilon\Gamma^{-1}\end{Bmatrix}+$$

$$-\left(\frac{x_s^h}{x_{s+1}^h}\right)^{\varepsilon-1}\frac{(-\varepsilon)(1-\varepsilon)B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon-1}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}}{\Gamma^{2-\varepsilon}} <> 0 \quad (A4.7)$$

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,x}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial \overline{n}^w} = A(1-\alpha)\varepsilon K_{s+1}^{\alpha}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon-1}\left(a_s^h\right)^{1-\varepsilon-\alpha}\begin{Bmatrix}(1-\alpha)\left(\overline{n}^w\right)^{-\alpha}\left(1-\overline{n}^w\right)^{1-\varepsilon}\Gamma^{-\alpha}+ \\ +(1-\varepsilon)\left(1-\overline{n}^w\right)^{-\varepsilon}\left(\overline{n}^w\right)^{1-\alpha}\Gamma^{-\alpha}\left[-1+\alpha\frac{B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\gamma}}{\Gamma}\right]\end{Bmatrix}+$$

$$+\left(\frac{x_s^h}{x_{s+1}^h}\right)^{\varepsilon-1}\frac{(1-\varepsilon)^2 B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(x_s^h\right)^{\varepsilon}\left(1-\overline{n}^w\right)^{-\varepsilon}}{\Gamma^{2-\varepsilon}} <> 0 \quad (A4.8)$$

La parcial respecto al input utilizado en s+1 mantiene su signo positivo, aunque la internalización en la tasa de los efectos del capital humano en s+1 sobre el crecimiento del stock llevaría consigo la aparición de una indefinición en el signo de la derivada parcial. El signo de la parcial respecto a la productividad multifactorial es indefinido, incluso eliminando uno de los tres componentes de la tasa de retorno. La razón es que el primer sumando de la derivada parcial es positivo, mientras que el segundo es negativo. Este resultado indeterminado ya aparecía cuando los rendimientos del capital humano eran constantes. Esta indeterminación en signo no desaparecería con rendimientos constantes a escala en x. Finalmente el signo respecto a la jornada de trabajo se mantiene indefinido, pese a que las ganancias de capital arrojan una aportación positiva; sin embargo recordemos que la indefinición procedía de la tasa en 2 períodos, problema que se arrastra al ampliar el horizonte.

Finalmente, en cuanto al signo de la derivada respecto al capital humano, el segundo de sus sumandos es positivo. Para que el primero lo sea también, bastará que se cumpla la misma condición suficiente que se detectó para el caso de 2 períodos:

$1 \geq \alpha + \varepsilon$ (A4.9)

Análisis de las propiedades de la tasa de retorno respecto al tiempo con rendimientos decrecientes del capital humano.

Empezando, como venimos haciendo, por la pendiente de la tasa:

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{dx_s^h} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \left(1-n_{s+1}^h\right)^{-\alpha} \left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon} \left\{ \Gamma^{-\alpha} \left(1-n_s^h\right)^{\alpha} \left(n_s^h\right)^{-\varepsilon} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\alpha}{1-n_s^h} - \dfrac{\varepsilon}{n_s^h} - \\ -\dfrac{(\varepsilon-\alpha)(1-\varepsilon)\left(n_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}}{\Gamma} \end{array} \right] \right\} <> 0 (A4.10)$$

A priori el signo de la derivada es ambiguo. Pueden establecerse varias condiciones suficientes para que el signo de la pendiente sea globalmente negativo, pero la única puramente paramérica es que $\varepsilon \geq \alpha$. Esta condición basta para que el signo de la pendiente se haga negativo. En caso contrario, cualquier otra condición sería contingente al valor de alguna de las endógenas en el período considerado, razón por la que no podría extraer ninguna conclusión general sobre el signo.

En cuanto al signo de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial n_{s+1}^h} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \left(1-n_s^h\right)^{\alpha} \Gamma^{-\alpha} \left(n_s^h\right)^{-\varepsilon} \left[\begin{array}{l} \left(1-n_{s+1}^h\right)^{-\alpha-1} \alpha \Gamma^{\varepsilon} \left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon} + \\ +\Gamma^{\varepsilon} \varepsilon \left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon-1} \left(1-n_{s+1}^h\right)^{-\alpha} \end{array} \right] > 0 \ (A4.11)$$

El signo de la parcial respecto al tiempo de aprendizaje en s+1 es inequívocamente positivo. Pasando a la parcial respecto a B:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;\varepsilon<1}}{\partial B} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right)^{-\alpha} \left(n_s^h\right)^{-\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon-\alpha)\Gamma^{\varepsilon-\alpha-1}\left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon}\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{1-\varepsilon} + \\ \Gamma^{-\alpha}(1-\varepsilon)\left(1-n_{s+1}^h\right)\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left[1-\alpha\dfrac{B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{\gamma}}{\Gamma}\right] \end{array} \right\} <> 0 \ (A4.12)$$

La parcial arroja un signo indefinido a priori, aunque una condición suficiente para que se haga inequívocamente positivo es, de nuevo, $\varepsilon \geq \alpha$. Por tanto si la pendiente de la tasa de retorno tiene signo positivo, un shock en la productividad multifactorial desplazará dicha curva a la derecha sin ambigüedad alguna en el signo. Si, por el contrario, $\alpha > \varepsilon$, el término entre llaves de la derivada parcial tendrá un primer sumando positivo y otro negativo, por lo que a apriori el signo quedará indeterminado.

Centrándonos ahora en la parcial respecto al capital humano:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2}}{\partial a_s^h} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right)^{-\alpha}\left(n_s^h\right)^{-\varepsilon}\left\{\begin{array}{l}(-\varepsilon)(\varepsilon-\alpha)\Gamma^{\varepsilon-\alpha-1}\left(n_{s+1}^h\right)^{\varepsilon}\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon-1}B\left(n_s^h\right)^{1-\varepsilon}- \\ -\varepsilon\Gamma^{-\alpha}\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon-1}B(1-\varepsilon)\left(1-n_{s+1}^h\right)\left[1-\alpha\dfrac{B\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left(n_s^h\right)^{1-\varepsilon}}{\Gamma}\right]\end{array}\right\} <> 0 \quad (A4.13)$$

A priori el signo es indefinido, aunque la condición sufiente $\varepsilon \geq \alpha$ también es en este caso suficiente para romper la ambigüedad, de suerte si se cumple los dos sumandos entre llaves serán negativos y por tanto toda la derivada parcial tendrá el mismo signo. De lo contrario el primer sumando será positivo y el segundo negativo.

Propiedades de la tasa de retorno respecto a n con rendimientos crecientes a escala en el capital humano.

Analizando en primer lugar la pendiente de la tasa de retorno, observamos que esta es negativa:

$$\text{Si } \Gamma \equiv \left[1+d_s B n_s^h\right] > 0;$$

$$d_s \equiv \left[\theta-\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\right] > 0;$$

$$\frac{d\, rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR}}{dn_s^h} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} d_s\left(1-n_{s+1}^h\right)^{-\alpha}\left\{\begin{array}{l}-\alpha\left(1-n_s^h\right)^{-\alpha-1}\Gamma^{-\alpha}\Delta-\alpha\Gamma^{-\alpha-1}d_s B\left(1-n_s^h\right)^{-\alpha}\Delta- \\ -\dfrac{\Gamma^{-\alpha-\varepsilon-1}\varepsilon\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}Bd_s}{d_{s+1}^2}\end{array}\right\} < 0;$$

$$\Delta = \frac{1}{d_{s+1}} + \left(1-n_{s+1}^h\right)B \quad (A4.14)$$

Abordaremos ahora las derivadas parciales de la tasa respecto a los elementos habituales. Empezando por la parcial respecto al opuesto del tiempo de trabajo en s+1, esta presenta un signo definido positivo siempre que $B > 1$:

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR}}{\partial n_{s+1}^{h}} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha} \Gamma^{-\alpha}\left(1-n_s^h\right)^{\alpha} d_s \left\{\frac{\alpha}{d_{s+1}} + \left(1-n_{s+1}^h\right)\left(B-1\right)\right\} <> 0 \text{ (A4.15)}$$

En cuanto a las parciales respecto a B y al capital humano, ninguna de estas dos derivadas parciales tendría tampoco un signo definido.

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR}}{\partial B} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} d_s \left\{\left(1-n_{s+1}^h\right)\left(1-\alpha\frac{d_s B n_s^h}{\Gamma}\right) - \frac{1}{d_{s+1}}\frac{d_s n_s^h}{\Gamma}\left(\alpha + \frac{\varepsilon\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\Gamma^{-\varepsilon}}{d_s}\right)\right\} <> 0 \ (A4$$

$$\frac{\partial rr_{s,s+1}^{h,n}\Big|_{ge}^{T>2;IR}}{\partial a_s^h} = \left(\frac{K_{s+1}}{K_s}\right)^{\alpha}\left[\frac{1-n_{s+1}^h}{1-n_s^h}\right]^{-\alpha} \left\{\begin{array}{l} \Gamma^{-\alpha}\Delta d_{s,a}\left[1-\alpha\dfrac{d_s B n_s^h}{\Gamma}\right] - \\ -\dfrac{\Gamma^{-\alpha-\varepsilon} d_s \varepsilon\left(a_s^h\right)^{-\varepsilon}\left[\dfrac{1}{a_s^h} + \dfrac{d_{s,a} B n_s^h}{\Gamma}\right]}{d_{s+1}^2} \end{array}\right\} <> 0 \ (A4.17)$$

En el primero de los casos, una posible condición suficiente para obtener un signo positivo en el conjunto de la derivada parcial sería:

$$\left(a_0^h\right)^{-\varepsilon} < \frac{\alpha\theta}{\alpha-\varepsilon}, \text{con } \alpha > \varepsilon \text{ (A4.18)}$$

Sin embargo, tal condición deviene imposible desde el momento en que $\varepsilon > 1$ y los rendimiento a escala de F son constantes. En consecuencia, el signo de la parcial dependerá del tamaño relativo de los dos términos entre corchetes, el primero positivo y el segundo negativo. La ambiguedad resulta del hecho de que un incremento de la productividad del aprendizaje incrementa la productividad marginal del tiempo en s+1, reduciendo el coste de producción del activo en tal período frente al coste de producción en s y, por tanto, reduciendo la tasa de retorno. Algo similar puede decirse sobre el signo ambiguo de la parcial respecto al capital humano, en el sentido de que una expansión del capital humano futuro reducirá el coste marginal de producción en s+1 y hará, consecuentemente, menos atractiva en términos relativos la producción del activo en s.

ANEXOS AL CAPÍTULO V.

El modelo de Han y Mulligan (2001) de restricciones de crédito. Estos autores construyen un modelo estocástico que anida las tres situaciones más características de acceso al crédito, cada una con resultados diferentes en términos de acumulación de capital humano y persistencia de los shoks sobre la renta y las capacidades dinásticas. La estructura general se basa en cohortes que viven durante dos períodos, aunque durante el primero carecen de preferencias propias y reciben pasivamente la atención de sus padres; durante el segundo período de vida, cada individuo tiene un hijo, trabaja y muere.

Los cabezas de familia poseen un grado de altruismo intermedio, de forma que su utilidad esperada depende tanto de su consumo en el período s como del de la generación inmediata de sus descendientes en s+1. Estas preferencias presentan además elasticidad de sustitución intertemporal constante, de modo que:

$$E_s U = E_s\left[\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(C_s^{s-1}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \psi\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(C_{s+1}^{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right] \text{(A5.1)}$$

Donde ψ representa el grado de altruismo intergeneracional, de modo que la ponderación de los dos consumos no tiene por qué ser la misma. En cuanto a las restantes restricciones, estas dependen del grado de imperfecciones que se supongan en el mercado de crédito. La renta de los padres, Y, se reparte entre consumo, inversión en capital humano en los hijos, cuyo precio relativo en términos del bien de consumo es unitario[260] y legados a los mismos, B. La tasa de depreciación se toma implícitamente igual a 1, al identificarse inversión en el activo real con stock del mismo en la siguiente generación. Aunque el sector escolar no se modeliza explícitamente, se supone que subyace a los gastos paternos en la construcción del capital humano de sus hijos.

Las rentas familiares tienen un doble origen: el legado paterno, que genera entre períodos un tipo de interés r, más las rentas salariales, que dependen del capital humano a través de la función $A\left(a_s^h\right)^\gamma$. Ambas están sometidas a la acción de un shock multiplicativo χ, cuya distribución log-normal tiene por media y varianza μ, ξ^2, cuya realización no se conoce en el momento en que los padres toman las decisiones de consumo e inversión. Por su parte A puede considerarse un parámetro que mide la habilidad innata de los individuos y en principio difiere entre generaciones. Por último, los padres no dan por sentado grado alguno de altruismo en sus hijos, pese a que éste siempre sea relevante de facto, por lo que el consumo de la siguiente generación se supondrá igual a su renta. Así, las preferencias se maximizarán respecto a los dos consumos, el legado y la inversión en capital humano en la generación inmediata, sujetas a las dos siguientes restricciones presupuestarias flujo:

---

260 Se trata por tanto de un modelo sin endogeneización del tiempo, en el que el input en la función de acumulación del capital humano es el propio bien de consumo y la ecuación dinámica del capital establece, implícitamente, una relación 1 a 1 entre la cantidad aplicada de este factor y la inversión bruta. Esta configuración posibilita que la modelización de la acumulación del activo sea análoga a la que podría realizarse con capital físico, aunque excepción hecha de sus rentas.

$$C_s^{s-1} + a_{s+1}^h + B_{s+1} = Y_s = \left[(1 + r_{s-1}) B_s + A_s \left(a_s^h \right)^\gamma \right] \chi_s \quad (A5.2)$$

$$C_{s+1}^s = Y_{s+1} = \left[(1 + r_{s-1}) B_{s+1} + A_{s+1} \left(a_{s+1}^h \right)^\gamma \right] \chi_{s+1} \quad (A5.3)$$

En la resolución y simulación de las sendas de equilibrio, se discuten varias soluciones posibles. Una primera, en la que los mercados de capitales son perfectos, lo que permite a B tomar cualquier signo. En la práctica, esto significa que los padres pueden tomar prestado con cargo a los ingresos futuros de los hijos. Cuando existen fricciones, sin embargo, se impondrá que $B \geq 0$. A su vez, dentro de un marco de fricciones las restricciones podrán ser no vinculantes ($B > 0$) o vinculantes (B=0).

Con mercados de capitales imperfectos pero restricciones no vinculantes, siendo ϑ el multiplicador de Lagrange de la restricción de los legados, este será 0. Por tanto la posición en capital humano futura adoptará el mismo valor que en una economía sin restricciones crediticias, valor que será determinado por el siguiente par de cpo (donde λ son los multiplicadores de Lagrange de cada una de las restricciones presupuestarias consideradas en el problema de optimización):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial B_{s+1}} = -\lambda_s + E(\chi_{s+1}) \lambda_{s+1} (1 + r_s) = 0 \quad (A5.4)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_{s+1}^h} = -\lambda_s + E(\chi_{s+1}) \lambda_{s+1} \gamma A_{s+1} \left(a_{s+1}^h \right)^{\gamma - 1} = 0 \quad (A5.5)$$

$$a_{s+1}^h = \left(\frac{1 + r_s}{A_{s+1} \gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Conocido el valor óptimo de la inversión en capital humano, es posible despejar el consumo y el valor óptimo de los legados, dada la renta de los padres, a partir de las cpo del consumo. Este será, tanto con restricciones de crédito no vinculantes como con mercado de crédito perfecto:

$$B_{s+1} = \frac{Y_s - a_{s+1}^h \left[1 + (\psi\mu)^{-\sigma} \frac{(1 + r_s)^{1-\sigma}}{\gamma} \right]}{1 + (\psi\mu)^{-\sigma} (1 + r_s)^{1-\sigma}} \quad \text{(A5.6)}$$

Obsérvese que el tamaño del legado es creciente respecto a la renta de los progenitores, por lo que cuanto más baja es esta, tantas más probabilidades de que el tamaño óptimo sea negativo. La restricción será vinculante para aquellas familias cuyo legado, evaluado en la inversión en capital humano óptima, sería negativo cuando institucional-mente esta opción no está permitida. En este caso para obtener el valor óptimo del capital humano legado a los descendientes puede utilizarse una ecuación implícita a la que se llega haciendo uso de las cpo del consumo, junto a la de la inversión en capital humano:

$$\frac{\left(C_s^{s-1}\right)^{-1/\sigma}}{\psi\left(C_{s+1}^{s}\right)^{-1/\sigma}}=\frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_s-a_{s+1}^h=C_s^{s-1}=\left(\gamma\psi\mu\right)^{-\sigma}A_{s+1}^{1-\sigma}\left(a_{s+1}^h\right)^{\gamma-\sigma(1-\gamma)}\quad (A5.7)$$

A partir de esta última, el stock de capital humano de los hijos puede expresarse en función de la renta de los padres y de la propia habilidad innata de los hijos, esto es, $a_{s+1}^h=\Phi\left(Y_s,A_{s+1}\right)$. En cualquier caso, puede comprobarse que este es inferior al que resulta cuando la restricción no era vinculante. Este resultado puede interpretarse en el sentido de que, si los padres hubieran podido acceder a crédito, el capital humano hubiese legado a la generación futura hubiera sido superior. Este resultado conecta con el de Becker y Tomes (1979) visto en el capítulo 2, en el sentido de que el endeudamiento permite a la familia romper el vínculo entre el ingreso de los padres y las posibilidades filiales de acumulación. Cuando dicha opción no está disponible, sin embargo, esta posibilidad desaparece y una familia puede encontrarse estancada en un equilibrio de rentas bajas durante muchas generaciones, a no ser que un shock aleatorio la saque de esta situación.

Algunos parámetros del modelo resultan clave a la hora de delimitar las posibilidades de movilidad intergeneracional. Entre ellos habria que mencionar la elasticidad del capital humano frente a la renta para las familias restringidas de crédito, esto es, $\partial\ln a_{s+1}^h/\partial\ln Y_s$, calculada sobre la función Φ. En general esta elasticidad será variable y dependiente del vector $\left(Y_s,A_{s+1}\right)$, aunque es siempre nula cuando las familias no están restringidas. Otro parámetro importante es la persistencia del consumo de la generación futura frente a incrementos exógenos en el consumo de los padres, entendiendo por estos últimos aquellos que mantienen constantes las preferencias y la habilidad de los padres (esto es, aquellos que conciernen directamente a su renta, dejando aparte el efecto del shock aleatorio). Cuando las familias no están restringidas por el mercado de crédito de manera vinculante, la persistencia es total, esto es, la elasticidad entre ambas variables es unitaria. La razón es la vigencia del teorema de Fisher, en virtud del cual consumo e inversión en capital humano de los hijos se determinan separadamente; de esta manera, al estar elevados al mismo exponente consumo propio y filial en la función de utilidad, es claro que la relación entre ambos, despejada de la igualdad entre relación marginal de sustitución[261] y tasa de retorno y expresada en logaritmos, debe presentar elasticidad unitaria. Por el contrario, con restricciones de crédito vinculantes el consumo y la inversión en capital humano son interdependientes, lo que implica que la tasa de retorno del capital humano es indirectamente función del consumo en s, por lo que la elasticidad del consumo de s+1 frente a este último será diferente a 1; en concreto esta tomará el valor $\varepsilon = \gamma / \left[\gamma + \sigma \left(1 - \gamma \right) \right] < 1$. De aquí que la persistencia de mejoras en el consumo en generaciones posteriores sea inferior con restricciones crediticias, al filtrarse parte de ellas a decisiones de inversión en capital humano a través de la correspondiente elasticidad frente a la renta paterna.

Sentadas estas premisas, es posible simular el grado de movilidad intergeneracional a que dan lugar los distintos escenarios tras estimar las cpo en logaritmos, bajo diferentes hipótesis sobre la transmisión intergeneracional de las habilidades innatas A. Así, las simulaciones se realizan suponiendo tanto una estructura determinística como parcialmente estocástica para A; en el primer caso, $A_{s+1} = \theta A_s$,donde $\theta \in (0,1)$ representa el grado de heredabilidad de este parámetro; en el segundo, $A_{s+1} = \theta A_s + \varepsilon_{s+1}$, donde ε es una perturbación aleatoria distribuida independientemente de χ . En un principio se fija un grado de altruismo intergeneracional y se realiza la simulación para un rango de elasticidades de sustitución intertemporales; la estimación OLS de las ecuaciones de movimiento del consumo y los ingresos, previa a las simulaciones, se realiza asignando valores aleatorios de A, χ en un colectivo de 10.000 familias, suponiendo normalidad en las variables A,ε y fijando su varianza. El resultado está en línea de los trabajos de Becker y Tomes (1979, 1986) en los siguientes aspectos: i) Cuando no se observan restricciones de crédito, la variabilidad intergeneracional del consumo es menor que cuando dichas restricciones existen y son vinculantes; ii) Para un nivel de altruismo dado, la persistencia estimada de los ingresos mayor es la asociada con restricciones crediticias vinculantes, es intermedia cuando estas existen pero no son vinculantes y la menor es la asociada a mercados de capitales perfectos; en este último caso, el grado de persistencia es menor al valor calibrado del parámetro de heredabilidad de las habilidades innatas. La alteración de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo dentro del rango determinado produce efectos especialmente visibles en las familias restringidas de crédito, de modo que a medida que aumenta aquella, disminuye la persistencia, aunque dentro del rango consid-

261 A su vez la tasa de retorno del capital humano es función exclusivamente de parámetros del modelo.

erado para σ la persistencia es siempre mayor que con restricciones de crédito no operativas.

Otro hallazgo relevante de este trabajo es que, cuanto mayor es la heterogeneidad inicial en el nivel de habilidad innata -esto es, mayor es la varianza en la distribución normal de ln A-, mayor es la persistencia de los ingresos para los grupos no sujetos a restricciones operativas de crédito. Una primera consecuencia de este resultado se refiere a estudios de corte transversal referidos a familias sobre las que no pesan restricciones de crédito operativas, ya que conduce a reinterpretar algunas diferencias de persistencia de ingresos observadas entre países, como las existentes entre Suecia y Estados Unidos. Bajo el prisma tradicional, se tendía a explicar este fenómeno aludiendo a las diferentes instituciones sociales en uno y otro país, de modo que en Suecia los instrumentos redistributivos de mayor entidad contribuían a compensar en mayor medida las limitaciones de los mercados de capitales. A la luz de este trabajo, sin embargo, las diferencias de persistencia pueden obedecer simplemente a una mayor heterogeneidad en las condiciones de partida, en igualdad de eficiencia de los mercados de capital y altruismo intergeneracional equiparable. Este es un efecto explicable desde un punto de vista puramente estadístico: puede demostrarse que el estimador OLS de la persistencia de los ingresos es asintóticamente creciente respecto a la varianza de A. La principal conclusión es que, dada esta propiedad y sin negar que las restricciones crediticias tengan, como muestra la teoría, un impacto sobre la movilidad intergeneracional, cuando la heterogeneidad es elevada este puede ser difícilmente distinguible, al sobre-estimarse la persistencia de los ingresos de aquellas familias no afectadas por aquellas. Una segunda consecuencia se centraría en los estudios empíricos por estratos de población, en los que se compara la persistencia de la renta dependiendo de la severidad de las imperfecciones en los mercados de capital: así, los efectos de las restricciones crediticias pueden quedar parcialmente enmascarados cuando la dispersión de las habilidades de la población es relativamente alta por distintas razones (geográficas, étnicas, etc.); en efecto, la persistencia estimada en los diferentes grupos arrojaría unas diferencias menos significativas de las reales. Cuando a la heterogeneidad en A se le añade heterogeneidad en altruismo, esto es, una estructura estocástica entre familias del tipo $\psi_i = \psi + \zeta_i$, siendo ζ_i una variable estocástica específica a cada familia distribuida normalmente y de media nula, se obtiene una estimación inferior de los parámetros de persistencia para todos los grupos, al interactuar la heterogeneidad introducida A y ψ. En este segundo caso la heterogeneidad en el altruismo genera un sesgo en la dirección contraria que la de A.

Modelo de Lochner y Monge-Naranjo sobre restricciones crediticias.

El modelo de Lochner y Monge-Naranjo (2011), con y sin restricciones de crédito[262] resulta de la evolución de trabajos anteriores de los mismos autores, principalmente el de 2002. El modelo resulta relevante para constatar en un entorno sin altruismo las consecuencias de las restricciones crediticias sobre movilidad interegeneracional y está en la línea de Berham (1995), aunque la estructura es algo más simple, para dar cabida a una evaluación de los efectos de las políticas públicas correctivas. Así, aunque su modelo se basa en individuos que viven dos períodos y adoptan las decisiones de inversión en su propio capital humano, los argumentos serían trasladables a un entorno familiar en el que, con un grado de altruismo dado, los padres determinan la inversión en el aprendizaje de sus hijos, como los analizados anteriormente. La función de utilidad depende de los consumos de ambos períodos de vida. En el primero de ellos el individuo vive del legado familiar, que se traduce en una dotación de activos financieros B, consume e invierte en su propio capital humano por medio del input x, pudiendo canalizar alternativamente su ahorro o endeudarse mediante la adquisición o emisión de bonos b, que devengan intereses reales r. Los ingresos laborales del segundo período adoptan la forma $Af\left(a_{s+1}^{h}\right)$, siendo A de nuevo la habilidad innata del individuo. La depreciación del capital humano es unitaria y la función de aprendizaje se entiende directamente proporcional al input utilizado: $a_{s+1}^{h} = x_{s}^{h}$. Las dos restricciones presupuestarias serán:

$$C_{s}^{s} = B_{s} + x_{s}^{h} + b_{s+1} \quad (A5.8)$$
$$C_{s+1}^{s} = Af\left(x_{s}^{h}\right) - \left(1 + r_{s}\right)b_{s} \quad (A5.9)$$

Las cpo respecto al capital humano y el consumo establecerán, la primera, la igualdad entre la tasa de retorno del primero, $Af'\left(x_{s}^{h}\right)$ y la de los bonos y, la segunda, entre la relación marginal de sustitución intertemporal del consumo y la tasa de retorno de los bonos. Sin restricciones de crédito, la demanda de capital humano dependerá positivamente de la habilidad innata, mientras que la demanda de crédito lo hará negativamente del legado recibido y positivamente de la abilidad, por dos razones: se deseará invertir más y además , para un nivel de inversión dado, los ingresos serán mayores. Esto sin perjuicio de la operatividad del teorema de separación de Fisher, ya que los dos anteriores factores afectan a la decisión óptima de consumo para un nivel dado de renta intertemporal: el

[262] Otro modelo similar es el planteado por Caucutt y Lochner (2012), a partir de un ciclo vital estructurado en 6 períodos. Trabajos empíricos recientes destacables sobre la importancia de las restricciones crediticias en las decisiones de educación son los de Carneiro y Heckman (2002), Cameron y Taber (2004), Steinbrickner y Steinbrickner (2008) o Goodman (2010).

primero porque, dado un tipo de interés, una mayor inversión en el primer período implica un mayor recurso al endeudamiento en el mismo[263]; el segundo a través del correspondiente efecto renta, que aumenta los consumos de ambos períodos. Este último efecto renta es el mismo que explica que, para un nivel de inversión dado, una mayor habilidad genere una mayor renta vital y, derivadamente, un mayor nivel de consumo en ambos períodos. O, equivalentemente:

$$\frac{\partial b_{s+1}}{\partial A} > \frac{\partial x_s^h}{\partial A} \text{ (A5.10)}$$

Las restricciones de crédito toman la forma de una cota superior en la cuantía del endeudamiento que puede asumirse en s: $b_{s+1} \leq \overline{b}$. Las propiedades del equilibrio cuando la restricción es vinculante no difieren esencialmente de las analizadas cuando es el individuo el que recibe la inversión pasivamente de su familia. Por un lado, la tasa de retorno del capital humano, evaluada en el equilibrio, será superior a 1+r. Por otro, es posible encontrar un nivel critico de la dotación financiera, $\overline{B}(A)$ tal que si $B_s < \overline{B}(A)$ la restricción es vinculante, siendo dicho nivel creciente respecto a la habilidad innata A. La dotación inicial del individuo juega un papel análogo a la renta exógena de la familia en s en el enfoque de Han y Murphy. Por tanto, cuando la dotación financiera se sitúa por debajo del nivel mínimo para eludir la restricción, la relación marginal de sustitución intertemporal del consumo se igualará a la tasa de retorno del capital humano y de esta única cpo, que refleja la tensión entre el deseo de alisalimiento del consumo y la maximización de la riqueza intertemporal, podrá despejarse el nivel de inversión en el activo

$$\frac{u'\left(B_s + \overline{b} + x_s^h\right)}{\beta\left(Af\left(x_s^h\right) - \left(1 + r_s\right)\overline{b}\right)} = Af'\left(x_s^h\right) \text{ (A5.11)}$$

Como en el modelo con altruismo, el nivel de inversión en capital humano evaluado en el óptimo restringido será inferior al alcanzable en aquel en que la restricción de crédito no es operativa y ademá dicha inversión es estrictamente creciente en B_s . Una de las propiedades más interesantes del modelo es que, a diferencia del problema sin restricciones de crédito, el signo de la derivada de la inversión en capital humano respecto a A será indefinido a priori, aunque cuando la elasticidad de sustitución intertemporal en consumo sea menor o igual a 1 el signo será negativo. Esto se debe a que, mientras en el problema no restringido tanto el efecto sustitución como renta operan en el mismo sentido, cuando

---

263 El consumo del primer período será una determinada proporción de la renta intertemporal, proporción que vendrá dada por la forma de las preferencias; por tanto, dado este nivel, una mayor inversión en capital humano necesariamente redundará en una menor posición en bonos.

hay límites operativos al endeudamiento el intento de aumentar el consumo, al ser mayor A, solo puede hacerse en el primer período de vida mediante la reducción de la inversión. En vista de este hecho, cuando las preferencias por la suavización del perfil del consumo son más marcadas, tiende a predominar el segundo de los efectos y la derivada en el punto de equilibrio será consiguientemente negativa.

Estructura básica del modelo de Eckstein y Zilcha (1994).

Eckstein y Zilcha (1994) proponen un modelo en el que los agentes viven durante dos períodos, trabajando durante el primero y consumiendo sus rentas del ahorro durante el segundo, localizándose la educación de los hijos en el primero de ellos a partir de una función educativa de rendimientos constantes en tiempo dedicado a la educación de los hijos y constantes o decrecientes en capital humano. Las preferencias del individuo, homotéticas, dependerán de su consumo en ambos períodos de vida, el tiempo de ocio (que es rival solamente del invertido en la educación de la prole, ya que el tiempo de trabajo se considera inelástico) y el capital humano adquirido por la siguiente generación. La función de producción del bien final tiene rendimientos constantes a escala en el conjunto de capital físico y trabajo efectivo. En una economía de estas características, siempre que la utilidad marginal cruzada entre ocio de los adultos y capital humano de los hijos sea positiva, el equilibrio descentralizado no constituirá una asignación eficiente[264], al proveer de un nivel de capital humano sub-óptimo a la próxima generación. Para que el equilibrio descentralizado recuperara la eficiencia paretiana sería necesario que las preferencias de los adultos internalizaran la renta salarial y el ocio de los hijos.

Como posible solución, los autores analizan los efectos de la intervención gubernamental en un contexto de heterogeneidad de los individuos que pertenecen a la misma cohorte; esta diferenciación se logra mediante la introducción de un parámetro aleatorio en las preferencias sobre el stock de capital de los hijos que afecta a la utilidad marginal cruzada con el ocio. Además la intervención del gobierno se centra en la provisión de horas extra de educación, unidas a las que proporcionen los padres; el nivel de capacitación de los educadores públicos se asimilará al nivel medio de capital humano de cada período. Las horas de educación se financian mediante un impuesto proporcional sobre las rentas laborales, relacionándose ambas variables a través de una restricción de presupuesto equilibrado. El equilibrio que se deriva de esta configuración arroja, cuando los tipos son inferiores a cierto umbral (o, equivalentemente, la provisión de escolarización es

[264] La falta de eficiencia se dictamina por comparación con un modelo que retiene los supuestos tecnológicos del anterior, salvo por las preferencias, que dependen de las mismas variables, solo que con una estructura dinástica a lo largo de un horizonte infinito.

moderada) un nivel de output superior (y de capital humano[265]) a partir de cierto momento del tiempo que los que caracterizan una situación en la que el tipo impositivo sea nulo. La razón de este resultado diferido en el tiempo es que la introducción del impuesto genera una reducción del ahorro y por tanto una menor acumulación de capital físico, que incide en principio negativamente en el output. Por razones análogas se deduce que en estado estacionario existe una relación en forma de U invertida entre el nivel de output (o su tasa de crecimiento) y el tipo impositivo, con un punto óptimo que constituye una referencia para las autoridades fiscales. En cuanto a la eficacia de la intervención pública sobre la distribución de la renta, es posible demostrar que cuando el tipo impositivo de nuevo es moderado la desigualdad en la distribución se aminora; a diferencia del resultado señalado para el output, esta proposición se verificará para todo período. Asimismo la economía convergirá a un estado estacionario en el que el grado de desigualdad es también inferior.

Estructura general del modelo de Hassler y Rodríguez-Mora (2000).

Hassler y Rodríguez Mora (2000) modelizan la movilidad social por medio de una economía con dos tipos de agentes: empresarios y trabajadores, de manera que cada individuo tiene la oportunidad -sin estar constreñidos por barreras de ningún tipo- de decidir a lo largo de su vida en qué grupo se encuadra. Mientras los trabajadores se distinguen por recibir una renta fija, los empresarios son remunerados por su capacidad de tomar decisiones en circunstancias complejas, conforme a un conjunto de habilidades adquiridas. Si bien el modelo no se estructura en torno a un capital humano homogéneo, como es la práctica más frecuente en la literatura, mediante su decisión binaria de pertenencia a uno u otro grupo los agentes[266] optan por conducir su carrera de una determinada manera a la vista de sus pagos relativos; una vez hecha este elección, se mantendrá a lo largo de toda su vida y será irreversible. En este último sentido, la decisión se guiará por la maximización de la utilidad vital, que para los trabajadores dependerá de su salario y para los

[265] O, alternativamente, tasas de crecimiento. Recuérdese que la forma de los rendimientos del capital humano en la función de aprendizaje está abierta por hipótesis en este modelo.

[266] Si se quisieran incorporar costes de acceso a la condición de empresario -reflejando el precio de los inputs de la adquisición de un tipo de capital humano- sería posible hacerlo dentro de la función de beneficio empresarial sin que los resultados del modelo se vieran modificados sustancialmente. En cualquier caso detrás del todo el modelo late una elección endógena de adquisición de uno u otro tipo de capital humano, al ser irreversible la decisión tomada al comienzo de la vida.

empresarios estocásticamente de su beneficio, puesto que este, como veremos, posee algunos componenentes no determinísticos.

En una versión de crecimiento exógeno del modelo, los empresarios intentan maximizar su beneficio estocástico en un entorno de cambio tecnológico que no controlan. Cada tecnología, que se desenvuelve estocásticamente conforme a un proceso browniano, lleva asociados niveles más elevados de productividad, que inciden positivamente en el beneficio. Al mismo tiempo, cada tecnología lleva asociada una tasa de descuento no conocida y el esfuerzo empresarial por adaptarse a un entorno tecnológico nuevo se representa mediante la elección de un parámetro para intentar llevar lo más cerca a cero la tasa de descuento. Más formalmente, este función de beneficio se puede escribir como:

$$\Pi = e^{-(r_A - a)^2}\left[2e^{A_s} l_s^{1/2} - w_s l_s\right] \text{(A5.12)}$$

Los empresarios intentarían, por tanto, elegir un parámetro “a” lo más próximo posible a la tasa de descuento x, que es a su vez un índice de desarrollo tecnológico. El beneficio dependerá entonces positivamente de la productividad que prevalezca en cada período A, negativamente de los salarios y positivamente del grado de precisión que logren en su adaptación al medio. Es claro que, en estas condiciones, una baja capacidad de adaptación puede llevarles a incurrir en pérdidas o en beneficios muy reducidos, que haga más atractiva una carrera como trabajador. Por su parte el parámetro x en el período s dependerá de su valor en s-1, así como de una tasa de crecimiento distribuida estocásticamente. La precisión en la anticipación de la tecnología dependerá de dos factores: el conocimiento transmitido de padres a hijos -que sólo se producirá de empresarios a sus hijos- y la inteligencia innata de los sujetos, también aleatoria y representada por una variable binaria, alta o baja.

Bajo estos supuestos, la existencia de movilidad social en el estado estacionario dependerá del valor de la esperanza de la tasa de crecimiento tecnológico. Si este es relativamente bajo, las innovaciones serán escasas y la transmisión intergeneracional tendrá un mayor valor; por ello no habrá movilidad social en dicho estado estacionario. Por el contrario, si la tecnología crece rápidamente y el legado de conocimientos dentro de las dinastías empresariales permite una precisión baja, serán los individuos con una mayor inteligencia (en el sentido de capacidad innata de adaptación al medio) los que obtendrán mayores beneficios de iniciar una carrera como empresarios.

El modelo también admite una extensión, al endogeneizar la inversión en tecnología y asimilarla a una inversión empresarial, pero el resultado no hace en esencia sino reforzar las conclusiones anteriores. Todo empresario tiene acceso una tecnología básica y puede optar por introducir una más moderna, que lleve consigo una mayor productividad pero al coste de introducir una mayor incertidumbre, de modo que su experiencia previa con la tecnología básica se hace menos útil. La movilidad social que se produce en el estado estacionario dependerá, de nuevo, de las características de la distribución aleatoria de la tasa de descuento, con tantas más probabilidades de movilidad social cuanta más incertidumbre añada la elección de una tecnología que incorpore un escalón dado de productividad. En este contexto -bien sea en la versión de crecimiento exógeno o en la de endógeno- de nuevo la educación pública puede jugar un papel de fomento de la movilidad, al aumentar el conocimiento de los factores determinísticos de la distribución estocástica de la tasa de descuento del beneficio de aquellos individuos no hijos de empresarios -y, desde otro ángulo, potenciar el peso de la inteligencia como filtro de la movilidad social, lo que aumenta la igualdad de oportunidades-.

ANEXOS AL CAPÍTULO VI

Dinámica del modelo dinástico de agentes heterogéneos en presencia de rendimientos decrecientes en E. Competencia perfecta descentralizada sin intervención pública.

El modelo se resuelve a partir de 7 variables endógenas: $\Gamma_{Cq}, \Gamma_{Cu}, \Gamma_{Eq}, \Gamma_{Eu}, \Gamma_{aq}, \Gamma_{au}, \Gamma_{a}$. A su vez, se cuenta con 7 ecuaciones: las dos restricciones presupuestarias dinamizadas, las dos cpo que igualan la relación marginal de sustitución y las tasas de retorno, las dos ecuaciones de acumulación del capital humano y la definición de capital humano medio ponderado.

Para comenzar a extraer conclusiones sobre la dinámica del modelo, conviene sentar algunos principios sobre la interacción entre la desigualdad en el crecimiento de las tasas de acumulación de capital humano y la tasa de acumulación de cualquiera de los grupos, individualmente considerado. Recordemos que se demostró que, con rendimientos constantes, al ser necesariamente equiproporcionales las variaciones de ψ_s^j y E_s^j a lo largo del tiempo, la parcial de cualquiera de las tasas de acumulación respecto a ψ_s^j era nula. La primera dificultad que surge con rendimientos decrecientes es que las variaciones de ψ_s^j y E_s^j no tienen por qué ser equiproporcionales. No obstante, calcularemos como referencia el impacto sobre la tasa de acumulación cuando las variaciones son equiproporcionales, para después extraer algunas conclusiones para el resto de los casos. En este caso, se verifica:

$$\frac{\partial \Gamma_{a,s+1}}{\partial \psi_s^j} = B^j \left(\bar{n}_s^h\right)^\gamma \left(E_s^j\right)^\gamma \left(1-\kappa\gamma\right) > 0;\ \kappa > 0 \text{ (A6.1)}$$

Si la proporcionalidad es estricta ($\kappa = 1$), el signo es positivo, denotando que si son los hogares u, por ejemplo, los que acumularan más lentamente esto haría que el efecto externo en su tecnología de aprendizaje se impusiera sobre el encarecimiento relativo de los servicios escolares, en términos netos, se impulsara la tasa de acumulación, y al revés para los hogares q. Si el cambio en E fuera menos que proporcional a lo largo de la trayectoria de equilibrio ($\kappa < 1$), la varíación en E sería todavía menor, lo que reforzaría el signo positivo de la derivada. Sin embargo, si la variación de E es más que proporcional, y suficientemente intensa este podría convertirse en el factor dominante, generando un signo negativo en la derivada. Esto sucedería siempre que $\kappa > 1/\gamma$.

Las implicaciones de uno y otro signo son muy distintas. Bajo las combinaciones adecuadas de signo para unos y otros individuos, el sistema tiende a reducir la divergencia entre las tasas de acumulación en cuanto esta se produce; sin embargo, si estas no están presentes, la divergencia se reforzará con el tiempo, siendo imposible, como se verá después, que los dos grupos puedan alcanzar asignaciones de equilibrio general en la integridad de sus sendas. Para ilustrar esta idea puede tomarse un ejemplo referido al grupo u. Suponiendo que estos hogares acumulasen más lentamente y el ahorro decreciera, el valor de los servicios escolares adquiridos deberían disminuir a lo largo del tiempo, lo que implicaría que la reducción paulatina de E sería más que proporcional. En estas circunstancias, el signo de la derivada de la tasa de acumulación podría ser positiva o negativa. Si fuera positiva, se acelera el crecimiento del capital humano de los u[267], lo que genera al mismo tiempo una disminución en la caída del ahorro y una ralentización en el encarecimiento relativo de los servicios escolares para estas familias; ambos cambios presionan en dirección de frenar la caída de E y de mitigar el crecimiento de la desigualdad con los q, iniciándose un proceso primero de estrechamiento de la diferencia entre las tasas de acumulación y más tarde de inversión del signo de la diferencia. No obstante, si el signo de la derivada de la tasa de acumulación fuera negativo, el crecimiento

[267] La disminución de E presiona simultáneamente al alza el componente de rentas de la tasa de retorno, por lo que el crecimiento del consumo se verá impulsado al alza. Si el modelo es estable o esta es una senda de equilibrio, sin embargo, el gap con el crecimiento de la renta se reducirá antes de que el ahorro se anule. La comparación de la tasa de retorno con $\frac{\partial \Gamma_s^j}{\partial \psi_s^j}$ permite establecer que el efecto sobre la tasa de crecimiento del consumo será mayor, siendo todo lo demás igual, cuanto menor sea E.

del stock de capital humano de los u disminuiría, acelerando la reducción del ahorro y la caída de E, lo que haría esta trayectoria incompatible con el equilibrio general al llevar el ahorro a zona negativa en tiempo finito. Es más, en el momento en que el ahorro tocara su suelo la adquisición de E propiciaría una tasa de retorno infinita, lo que descalifica esta trayectoria como una de equilibro general.

Mientras, para los hogares q, ψ_s^q disminuiría con el tiempo, al crecer más su propio stock que el medio, por lo que la convergencia entre grupos exigiría también un signo positivo de la tasa de acumulación respecto al efecto externo. Un simple contrajemplo basta para comprobar que el caso contrario no daría lugar a una senda de equilibrio. Si $\Gamma_{Cq} < \Gamma_{aq}$, el valor de los servicios escolares debería aumentar, por lo que disminuciones de ψ_s^q se verían acompañadas de incrementos más que proporcionales de $E_s^{pr,q}$. Si el signo de la derivada de la tasa de acumulación respecto al efecto extern fuera negativo, la esta se incrementaría cada vez más, mientras que el crecimiento del consumo se amortiguaría al disminuir la tasa de retorno, por lo que el ahorro se expandiría cada vez más y se quebraría la condición de transversalidad. **En consecuencia, aquellas sendas asociadas con un signo negativo de la derivada de la tasa de acumulación frente al efecto externo no serán compatibles con equilibrio general[268] para los dos grupos. Un signo positivo de esta derivada será una condición necesaria para la obtención de sendas de equilibrio general.**

La identificación de posibles estados estacionarios se realizará por el mismo orden que cuando la tecnología presentaba rendimientos constantes en E. El primer tipo que puede verificarse es aquel en el que tanto el peer effect como el volumen de servicios educativos demandado son constantes a lo largo de la senda estacionaria. Para comprobar que este estado estacionario no es viable, basta comparar el cociente de inputs E aplicados por cada grupo que propiciaría la igualdad entre las tasas de acumulación con aquel que garantizaría el cumplimiento de las cpo en estado estacionario, esto es, igua-

[268] En algunas trayectorias el sentido de la variación de E no está completamente definida a priori, lo que no obsta para que este resultado se mantenga. Por ejemplo, si $\Gamma_{Cu} < \Gamma_{au}$, el incremento del valor de los servicios escolares sería compatible con una aumento como una reducción de E a lo largo de la senda. Ahora bien, tanto si la disminución es menor que proporcional como si se registra un aumento los efectos son los mismos: una derivada positiva de la tasa de acumulación respecto a ψ_s^u. Análogos comentarios cabría hacer cuando $\Gamma_{Cq} > \Gamma_{aq}$, siendo q el grupo que acumula más rápido.

laría simultáneamente RMS con las tasas de retorno del activo para los dos grupos. En cuanto a estas últimas, en estado estacionario los primeros miembros de la cpo se igualarían, al reflejar las tasas de acumulación que, presuntamente, son las mismas y el término de la tasa correspondiente a las ganancias de capital del activo se haría unitario para los dos grupos, al permanecer E constante. Por tanto, las rentas marginales del activo para ambos grupos deberían ser las mismas, pero ello es imposible, porque el nivel relativo de los E que lo permite es distinto que aquel que garantiza la misma acumulación para los hogares q y u. En definitiva, se produce una sobredeterminación del problema que hace inviable este tipo de solución.

Conforme al párrafo anterior, el valor necesario de los E relativos que conseguiría una igualación de las tasas de acumulación. Para ello deberán igualarse las funciones de inversión bruta en el activo, obteniendo:

$$\frac{E_s^{pr,q}}{E_s^{pr,u}} = \left(\frac{B^u}{B^q} \frac{\psi_s^u}{\psi_s^q} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{B^u}{B^q} \frac{a_s^{hq}}{a_s^{hu}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{(A6.2)}$$

Si se realiza análoga restricción a la efectuada con rendimientos constantes, se evitará que en s=0 la diferencia entre los stocks de capital humano sea tal que más que compense la mayor productividad en el aprendizaje de los q (o dicho de otra manera, que la escolarización absorbida por los hogares u debiera ser superior a la de los q para que las tasas de acumulación se igualasen):

$$\frac{B^u}{B^q} \frac{a_s^{hq}}{a_s^{hu}} < 1 \quad \text{(A6.3)}$$

Por lo que respecta a la ratio de servicios educativos que lograría el cumplimiento simultáneos de la igualdad entre la RMS y las tasas de retorno del capital humano para los dos grupos, esta sería:

$$\frac{E_s^{pr,q}}{E_s^{pr,u}} = \left(\frac{B^q}{B^u} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{(A6.4)}$$

La segunda alternativa para el estado estacionario concierne al peer effect variable, unido a un E variable, con un desplazamiento de ambos en estado estacionario a lo largo de una hipérbola equilátera, de suerte que su producto se mantenga constante. Sin embargo, este estado estacionario, igualmente compatible con la constancia de la ratio entre consumo y capital humano, sería igualmente inviable, lo que puede demostrarse por simple reducción al absurdo. Supongamos que existiera una senda estacionaria como la descrita. Puesto que la relación marginal de sustitución intertemporal sería entonces igual a la tasa de acumulación del capital humano, multiplicada por el inverso de la tasa de preferencia temporal, podría despejarse dicho valor constante de la igualdad entre la relación marginal de sustitución y la tasa de retorno. Esto es:

$$\left[1+B^{j}\left(\overline{n}^{h}\right)^{\gamma}\left(E_{s}^{j}\right)^{\gamma-1}\Theta\right]=\beta\left[\Gamma_{E,j}^{1-\gamma}+A\left(1-\overline{n}^{h}\right)B^{j}\left(\overline{n}^{h}\right)^{\gamma}\gamma\left(E_{s}^{j}\right)^{\gamma-1}\right];\ \Theta=\psi_{s}^{j}E_{s}^{j} \text{ (A6.5)}$$

Reordenando términos, esta igualdad podrá cumplirse para un Θ constante solamente si se verifican simultáneamente las dos condiciones que se identifican más abajo. Es fundamental notar que es esencial en este resultado el hecho de que, al diferir las tasas de acumulación, ψ no puede ser constante y tampoco E.

$$\begin{cases}\beta A\left(1-\overline{n}^{h}\right)\gamma=\Theta \\ \Gamma_{Ej}=\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}>1\end{cases} \text{ (A6.6)}$$

Sin embargo, la última de estas condiciones no es compatible con la definición de capital humano medio ponderado ni su dinámica. En efecto, para que el valor de los servicios escolares demandados permanezca constante, a partir de la restricción presupuestaria dinamizada de cualquiera de los dos grupos es posible comprobar que debería satisfacerse:

$$\frac{\Gamma_{a}}{\Gamma_{aj}}=\frac{1}{\Gamma_{Ej}} \text{ (A6.7)}$$

Consiguientemente, la segunda condición implica que la tasa de crecimiento del capital medio debería ser inferior a la de cualquiera de las dos tasas de acumulación, lo cual es imposible por construcción. Luego tal valor constante de los servicios de escolarización que además sea compatible con las restantes condiciones del problema no existe, al menos simultáneamente para los dos grupos. ¿Podría existir solamente para uno de ellos? La respuesta es que tampoco, ya que el valor constante de E implicaría que el cociente entre la tasa de acumulación del capital medio ponderado y la del grupo sería distinta de 1, pero esto también es imposible: cuando las tasas de acumulación difieren, el mero cambio de los pesos entre períodos hace inviable dicha constancia. **Así pues, cuando las tasas de acumulación difieren no existe un equilibrio estacionario con tasa de ahorro constante para ninguno de los dos grupos y solamente uno de ellos podrá experimentar una variación nula de su ahorro en un período determinado.**

Un caso especial al que es importante hacer referencia, especialmente en el contexto de esta literatura, es el de la **posibilidad de emergencia de trampas de pobreza**, esto es, equilibrios en los que indefinidamente la inversión en capital humano de al menos uno de los dos grupos fuera nulo. En este tipo de equilibrio, la tasa de crecimiento bruta de los servicios educativos sería unitaria y el consumo se igualaría a la renta laboral, al no haber necesidad de generar ningún ahorro positivo. Por tanto, podría decirse que se trata de un caso excepcional en el que la tasa de ahorro sería cero, pero constante en el tiempo. Las dos condiciones derivadas, sin embargo, permiten excluir esta posibilidad, a diferencia de lo que sucedía con rendimientos constantes a escala en E. Puesto que entrañaría, por una parte, $\Theta = 0$, para valores del tiempo de aprendizaje inferiores a 1 esto sería imposible. Por otra parte, siempre que $\gamma < 1$ la tasa de crecimiento bruto de E no podría igualarse a la 1. **De esta manera, las trampas de pobreza no pueden surgir como soluciones de equilibrio general en este entorno.**

En consecuencia, aquellos estados estacionarios que simultáneamente muestran una ratio consumo/capital humano constante y tasas de acumulación parejas entre grupos quedan excluidos. **Una propiedad del modelo, que constituye parcialmente una excepción al principio anterior, es que todas aquellas sendas de equilibrio general a lo largo de las cuales el signo de la derivada de la tasa de acumulación respecto al efecto externo es negativo pueden conducir a un pseudo-estado estacionario con peer effect y E constante para aquel grupo que acumula más rápido, aunque este no constituiría un equilibrio general cuando se atiende a la situación del grupo que acumula más despacio**. Supongamos que es el grupo u aquel cuyo capital humano tiende a una tasa de acumulación nula por empezar el horizonte acumulando más despacio, en combinación con un signo negativo de la derivada de la tasa de acumulación respect al efecto externo. A partir de este momento, la tasa de acumulación del capital humano medio convergerá más rápidamente hacia la tasa de acumulación de q. La senda sobre la que deberán situarse los q para llegar a este estado estacionario sería una tal que $\Gamma_{aq} < \Gamma_{Cq}$: a lo largo de ella, $E_s^{pr,q}$ aumentará menos que proporcionalmente; si lo hace suficientemente, $\frac{\partial \Gamma_{aq}}{\partial \psi_s^q} < 0$ y la tasa de acumulación se elevará. Al mismo tiempo, ante el retroceso de la tasa de retorno del activo, disminuirá la tasa de crecimiento del consumo. En el límite, ψ_s^q se estabilizará y se alcanzará una senda estacionaria en la que el consumo pueda crecer a la misma velocidad que la acumulación del activo y $E_s^{pr,q}$ alcance también su nivel estacionario. Este sería el único casoen el que podría existir una senda estacionaria con peer effects y E constante, al converger la tasa de crecimiento del capital medio con la del grupo que alcanza dicha senda, aunque al coste de la depauperación progresiva del grupo que diverge. Es destacable que, aunque el signo negativo de la derivada de la tasa de acumulación permite a uno de los grupos alcanzar el equilibrio, esta asignación no es de equilibrio general, por lo que no cabe hablar de una excepción a la proposición formulada anteriormente sobre la necesidad de contar con un signo positivo en dicha derivada.

Este mismo argumento justifica la imposibilidad de hacer operativo un mercado de bonos en el que oferta y demanda de fondos prestables estuviese integrada por los hogares q y u, respectivamente. Si tal mercado funcionara, las relaciones marginales de sustitución de q y u deberían igualarse, por las que las diferencias entre las rentas marginales de los dos se compensarían 1 a 1 con diferencias de signo contrario entre las tasas de crecimiento de sus E. Sin embargo, al encontrarse atadas las tasas de crecimiento del consumo debido a la existencia de un único tipo de interés de equilibrio, la diferencia entre las tasas de crecimiento de E tendría un comportamiento monótono que llevaría al sistema, de un modo u otro, a inclumplir las condiciones de equilibrio general. En efecto, denotanto por rm la renta marginal del activo, si $rm(i) > rm(j) \Rightarrow \Gamma_{Ei} < \Gamma_{Ej}$. Esta trayectoria reforzaría, no obstante, el signo y la magnitud de la diferencia entre las rentas marginales del activo, lo que intensificaría la prelación de tasas de crecimiento de E inicial. En el caso especial de que la ratio de servicios escolares demandados fuera tal que $rm(q) = rm(u)$, el crecimiento de la escolarización de ambos grupos debería ser al menos inicialmente la misma; sin embargo, q acumularía más rápido que u. Esto a su vez implica que los E no podrían crecer a la misma velocidad, al ser inviable el crecimiento de los consumos a un tiempo cuando la acumulación es dintinta. Y en el momento en que se rompe la igualdad en el avance de los E de nuevo nos encontraríamos en el caso inicial.

Retomando el problema del estado estacionario, si las versiones convencionales del mismo se han demostrado inviables, ¿qué clase de equilibrio general cabría esperar en esta versión del modelo? Teniendo en cuenta que las cpo del mismo no permiten derivar una solución cerrada del mismo, deberían utilizarse técnicas de cálculo numérico para su resolución. Utilizaremos para ello una conjetura sobre el valor de equilibrio del volumen de los servicios escolares demandados, tal que $E_s^{pr,j} = \varphi^j\left(\psi_s^j\right)a_s^{hj}$. Esto es, en equilibrio general ordinario la escolarización privada aplicada por los agentes sería igual a un parámetro, diferente para cada grupo y dependiendo del valor del peer effect de cada período, multiplicado por la posición en capital humano de ese mismo período. Tal conjetura se apoyaría en la igualdad entre las RMS y las tasas de retorno del capital humano, de modo que la sustitución de E por su conjetura permitiría obtener dicha función. La igualación entre las tasas de acumulación, propia del estado estacionario, exigiría que en el mismo se cumpliese, sustituyendo E por su conjetura:

$$\theta_s \equiv \frac{a_s^{hq}}{a_s^{hu}} = \left(\frac{B^q}{B^u}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \Psi_s^{\frac{\gamma}{1-\gamma}};\ \Psi_s = \frac{\varphi_s^q}{\varphi_s^u} \text{ (A6.8)}$$

Se tratará pues de estudiar la dinámica del parámetro θ y comprobar si este puede llegar a un valor estacionario, ya que ello implicaría la constancia de los peer effects. Dicha ratio de niveles relativos de capital humano puede reformularse como una ecuación en diferencias no lineal:

$$\theta_s = \theta_{s-1} \frac{\left[1 + B^q \left[m + (1-m)\frac{1}{\theta_{s-1}}\right]\left(\varphi_{s-1}^q a_{s-1}^{hq}\right)^\gamma\right]}{\left[1 + B^u \left[m\theta_{s-1} + (1-m)\right]\left(\varphi_{s-1}^u a_{s-1}^{hu}\right)^\gamma\right]} \text{ (A6.9)}$$

Para calcular el valor estacionario, se toma $\theta_s = \theta_{s-1} = \theta$ y $\varphi_s^j = \varphi_{s-1}^j = \varphi^j$, resultando:

$$\left[B^q m\theta + (1-m)B^q\right]\theta^\gamma \Psi^\gamma = B^u m\theta^2 + B^u(1-m)\theta \text{ (A6.10)}$$

En la medida en que los stocks iniciales de capital humano son positivos y la tasa de depreciación nula, el valor $\theta = 0$ puede descartarse y la ecuación anterior puede dividirse por θ . Ensayando la solución dada por (A6.8) , la ecuación se cumple, por lo que existe un valor estacionario de la ratio relativa de capitales, lo que implica que ambos grupos acumulan al mismo ritmo. Además, estudiando el comportamiento de la función , se observa que esta se aproxima asintóticamente a ∞ cuando $\theta \to 0$ y a $-\infty$ cuando $\theta \to \infty$, así como el hecho de que para valores positivos de θ solamente experimenta un solo paso de signo positivo a negativo, lo que garantiza que el estado estacionario hallado es único. Sin embargo, el hecho de que no pueda obtenerse una solución cerrada para φ^j ni un resultado concluyente sobre el signo de su segunda derivada impide derivar condiciones paramétricas que garanticen una determinada dinámica en el entorno del estado estacionario identificado.

Dejando aparte la estabilidad del estado estacionario, incluso aunque el sistema convergiese dinámicamente hacia el mismo, este último no puede constituir un equilibrio general con los supuestos realizados, ya que no satisface la condición de transversalidad. En efecto, si la conjetura de E en función del capital humano del período resuelve el problema[269], en ese caso la tasa de acumulación será creciente en el tiempo en estado estacionario, pudiéndose escribir la misma como:

$$\Gamma_j = 1 + \left(a_s^h\right)_a \varphi^j \left(\psi^j\right) \text{ (A6.11)}$$

Se observa, por tanto, que la tasa sería creciente, lo que haría imposible que en el límite de la senda el valor descontado del stock se anulara, dada una tasa de descuento intertemporal constante. Consiguientemente, **la senda estacionaria obtenida no es consistente con la totalidad de las cpo del problema y de ahí que no pueda considerarse una solución al mismo.** En el apartado siguiente se discutirá cómo la modificación de dos supuestos de entorno permitirá resolver el problema con rendimientos decrecientes en el input x.

Si los parámetros B fueran los mismos, el modelo tampoco podría alcanzar una tasa de acumulación común para ambos grupos si los stocks iniciales fueran diferentes, a diferencia de lo concluido con rendimientos constantes. El umbral que se necesita para que las tasas de acumulación se igualen desde un comienzo sería:

$$\left(\frac{E_0^q}{E_0^u}\right) = \left(\frac{a_0^q}{a_0^u}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ (A6.12)}$$

La función φ de la conjetura sería ahora común para los dos grupos, al eliminarse la divergencia en B. Supongamos que esta condición de acumulación al mismo ritmo se cumpliera. En tal caso $\psi_s^j = \psi_{s+1}^j = \psi^j$, por lo que la conjetura de cada grupo permanecería constante entre períodos. En consecuencia, la conjetura relativa necesaria para que las tasas de acumulación fueran las mismas sería:

$$\frac{\varphi^q}{\varphi^u} = \left(\frac{a_0^q}{a_0^u}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \text{ (A6.13)}$$

Es inmediato demostrar, a partir de las cpo, que la sustitución de esta conjetura no lograría el cumplimiento simultáneo de estas para los dos grupos excepto si los stocks iniciales fueran los mismos (solución trivial, ya que se estaría ante un solo hogar representativo).

Modelo con dinastías. Resultados de la aplicación de los mismos supuestos que en el modelo de OLG.

---

[269] Por lo demás, esta conjetura se corresponde con la solución típica cuando el único activo es el capital humano. El hecho de que sea variable por período obedece a que el precio relativo del gasto educativo también lo es.

Se consideran rendimientos constantes a escala en E y, como principales elementos diferenciales a los vistos inicialmente, precios de los servicios educativos a largo plazo en función del capital humano de cada grupo y ausencia de efectos externos en la tecnología educativa. Con estas premisas la tasa de retorno del capital humano será la siguiente:

$$rr_{s,s+1}^{h,e}\Big|_{ge}^{j} \equiv B^{j}\left(1-\overline{n}^{w}\right)\left[A\overline{n}^{w}-E_{s+1}^{j}\right]+1+B^{j}\left(1-\overline{n}^{w}\right)E_{s+1}^{j}=A\overline{n}^{w}B^{j}\left(1-\overline{n}^{w}\right)+1 \quad \text{(A6.14)}$$

Como puede observarse, la consideración simultánea de todos los efectos externos bajo esta tecnología conduce a la misma tasa de retorno formulada inicialmente, ya que el segundo término de las ganancias de capital se compensa perfectamente con la externalidad en el precio de los servicios educativos. Por lo demás, la renta marginal tampoco varía porque, aunque el stock de capital humano propio forma parte de la productividad marginal del activo y como tal aparece en el numerador de este término, también constituye su denominador -precio unitario del input en unidades del numerario-, cancelándose consiguientemente dicha variable en numerador y denominador.

La tasa de retorno es, por tanto, constante y mayor para los individuos q y, por razones análogas a las expuestas en el apartado que desarrollaba el modelo dinástico, esta estructura implica la necesidad de que el consumo privado crezca a la misma tasa a la que se acumula el capital humano para cada grupo; en consecuencia, el nivel de servicios educativos será constante, como también la tasa de acumulación para cada categoría de cualificación, **lo que trae consigo una senda estacionaria a la que se llega sin dinámica de transición. A lo largo de la misma y cuando no media ninguna intervención pública, la cantidad de servicios educativos demandados por los hogares más cualificados es superior a la absorbida por los no cualificados, lo que implica una brecha creciente entre sus niveles de capital humano, como sucedía en el modelo dinástico con peer effect.** Por el contrario, si los parámetros B coincidiesen, la competencia perfecta descentralizada igualaría las demandas de servicios educativos y las tasas de acumulación.

Cuando las habilidades difieren, sin embargo, puede recurrirse a viejos conocidos para lograr la equiparación de las tasas de acumulación del capital humano desde un primer momento. La aplicación de la política de impuestos y subvenciones sería análoga a la vista en la primera versión del modelo dinástico, de suerte que la misma subvención crítica lograría un nivel de escolarización de las familias u por encima de las q tal que compensara completamente el diferencial entre sus productividades marginales. También caben políticas de provisión pública de educación excluyente de gastos privados, aunque si no van acompañadas de una política de excelencia generarán tasas de acumulación diferentes, al carecer esta versión del modelo de una transición al estado estacionario que permita lograr la equiparación de las tasas por medio de un aumento de la desigualdad. Por último, bajo un régimen mixto con cupones, resulta lógico suponer que los individuos internalicen en las ganancias de capital la productividad marginal de una posición en capital humano más elevada en s+1 sobre los servicios educativos totales, aunque no las consecuencias de su propia acumulación sobre el tipo impositivo a través de unos mayores costes de provisión del cupón para el gobierno, por carecer de información precisa sobre la tecnología de funcionamiento de la escuela pública. En tales circunstancias, las tasas de retorno con cupones pasarían a ser:

$$rr_{s,s+1}^{hE,q}\Big|_{ge}^{Pc}=\left(1-\tau^{Pc}\right)A\bar{n}^{w}B^{q}\left(1-\bar{n}^{w}\right)+1+B^{q}\bar{E}^{c}\quad (A6.15)$$

$$rr_{s,s+1}^{hE,u}\Big|_{ge}^{Pc}=\frac{\left(1-\tau^{Pc}\right)}{\left(1-\theta^{e}\right)}A\bar{n}^{w}B^{u}\left(1-\bar{n}^{w}\right)+1+B^{u}\bar{E}^{c}\quad (A6.16)$$

En estas condiciones, puede obtenerse directamente que el mismo tamaño crítico de la subvención que venía utilizándose, aplicado sobre el gasto privado complementario, genera una cantidad aplicada conjunta de servicios educativos que compensa exactamente las diferencias en las productividades de aprendizaje y equipara las tasas de acumulación de q y u. Asimismo se demuestra también que, si $B^{q},B^{u}\geq 1$, como se viene suponiendo desde el comienzo, el tipo impositivo con cupones positivos volverá a ser mayor que el tipo privado con intervención, por lo que se producirá una expulsión parcial del gasto total al incrementar el tamaño del cupón.

En cuanto al problema del PB con esta tecnología, por una parte la optimalidad en el consumo exigirá igualación de las tasas de crecimiento. Por otra, la tasa de retorno social coincidirá con la privada[270]. Esto significa que, con productividades B diferentes, será imposible tener una solución distinta para los servicios aplicados por cada grupo, ya que es imposible que tasas de retorno diferentes se igualen entre sí a una tasa común de crecimiento del consumo. En consecuencia, el PB deberá derivar una solución común para los dos grupos. La tasa de retorno social de una inversión de este tipo será:

$$rr_{s,s+1}^{h\bar{E}}\Big|^{PB}=1+\frac{A\bar{n}^{w}\left[mB^{q}a_{s}^{hq}+\left(1-m\right)B^{u}a_{s}^{hu}\right]}{a_{s}^{h}}\ \text{(A6.17)}$$

De este modo, la tasa de retorno, que difiere de la obtenida en la versión anterior del modelo dinástico a causa del cambio operado en la tecnología educativa, no será en gen-

[270] Con cupones la tasa de retorno social de la inversión privada en educación perdería su tercer sumando, en comparación con la desglosada antes.

eral constante entre períodos salvo si $B^q = B^u$. De aquí se deduce que: i) el sistema escolar público puro no será un óptimo social, puesto que ni cumple la condición de optimalidad social del consumo, ni se atiene a los parámetros de variabilidad de la provisión exigidos en el PB; ii) el sistema público de excelencia -instrumentado, como antes, por medio de un mix de individuos de ambos tipos de cualificación- constituiría un óptimo social, ya que la equiparación de los parámetros permitiría obtener una tasa de retorno constante a lo largo de la senda de equilibrio general. **La ausencia de peer effects, consiguientemente, potencia el atractivo del régimen público de excelencia de la escuela pública desde la perspectiva de la eficiencia social, mientras que con peer effects las ventajas de este se originaban más bien en sus efectos más beneficiosos sobre la desigualdad.**

Modelo OLG con transferencias intergeneracionales endógenas determinadas à la Ehlich y Lui. Se trata de verificar si, con preferencias logarítmicas, la función objetivo con altruismo perfecto empleada por Ehrlich y Lui (1991) puede proporcionar una única solución para el valor óptimo del coeficiente p. En efecto, según este enfoque cada cabeza de familia, en su etapa de madurez s, seleccionará p tal que el valor de este maximice las preferencias de la siguiente generación durante el período en el que “sufre” pasivamente los efectos de tal elección, esto es, en s+1. No tendrá sentido maximizar teniendo en cuenta el impacto sobre la vida completa de los descendientes inmediatos porque a su vez, estos tendrán la oportunidad de optimizar respecto a p durante su madurez. Por tanto, bajo este enfoque el problema para los adultos en s estriba en calcular p que resuelva:

$$\frac{\partial U_{s+1}^{sj}}{\partial p_{s+1}^{j}} = 0 \text{ (A6.18)}$$

El único efecto de p sobre la utilidad de los descendientes es el directo de minoración de su renta, toda vez que los adultos en s adoptan su decisión de acumulacion de acuerdo con el valor de p fjado por sus padres y no según el valor que fijen óptimamente ellos mismos. De este modo, la cpo se transformará en:

$$\frac{(1+\beta)}{\left(1-p_{s+1}^{j}\right)} = 0 \text{ (A6.19)}$$

Condición que indica el valor óptimo de p sería nulo. Este resultado, como se comentó en el texto principal, no es robusto en el sentido de que con una utilidad de elasticidad de sustitución intertemporal constante como la utilizada por Ehrlich y Lui el valor óptimo de p es positivo. Esto se debe a que, al no ser en este último caso la tasa de ahorro sobre la renta disponible constante, es la igualdad entre la relación marginal de sustitución intertemporal y la tasa de retorno del capital humano la ecuación a través de la que se determina el valor óptimo de E. Ahora bien, en este caso la p que fijen los padres afectará a su tasa de acumulación, por lo que el problema de optimización de la utilidad de la siguiente generación constará de un término más, dado por la influencia indirecta de p sobre el stock de capital sobre el que los hijos basan la obtención de sus rentas laborales. De esta forma, la cpo a resolver en p sería:

$$\frac{dU_{s+1}^{s,j}}{dp_{s+1}^{j}}=\frac{\partial U_{s+1}^{s,j}}{\partial a_{s+1}^{hj}}\frac{\partial a_{s+1}^{hj}}{\partial p_{s+1}^{j}}+\frac{\partial U_{s+1}^{s,j}}{\partial p_{s+1}^{j}}=0 \text{ (A6.20)}$$

Como se avanzó, la solución a esta ecuación no es neutral respecto a B, si bien el signo de la derivada parcial es indeterminado. Esto puede comprobarse sin más que diferenciar totalmente la siguiente cpo respecto a B y p[271]:

$$(1-\sigma)B=p_{s+1}\left\{B+\sigma\left[\beta B p_{s+1}^{1-\sigma}\right]\right\}^{1/\sigma} \text{ (A6.21)}$$

[271] El modelo original de Ehrlich y Lui utiliza tiempo como input del capital humano y establece probabilidades de longevidad en el paso del período de madurez al de vejez, así como a lo largo de esta última. Para simplificar la ecuación se elimina el riesgo de muerte, aunque se mantiene la optimización respecto al tiempo -el cambio al factor productivo que venimos utilizando en este apartado no desvirtuaría los resultados-.